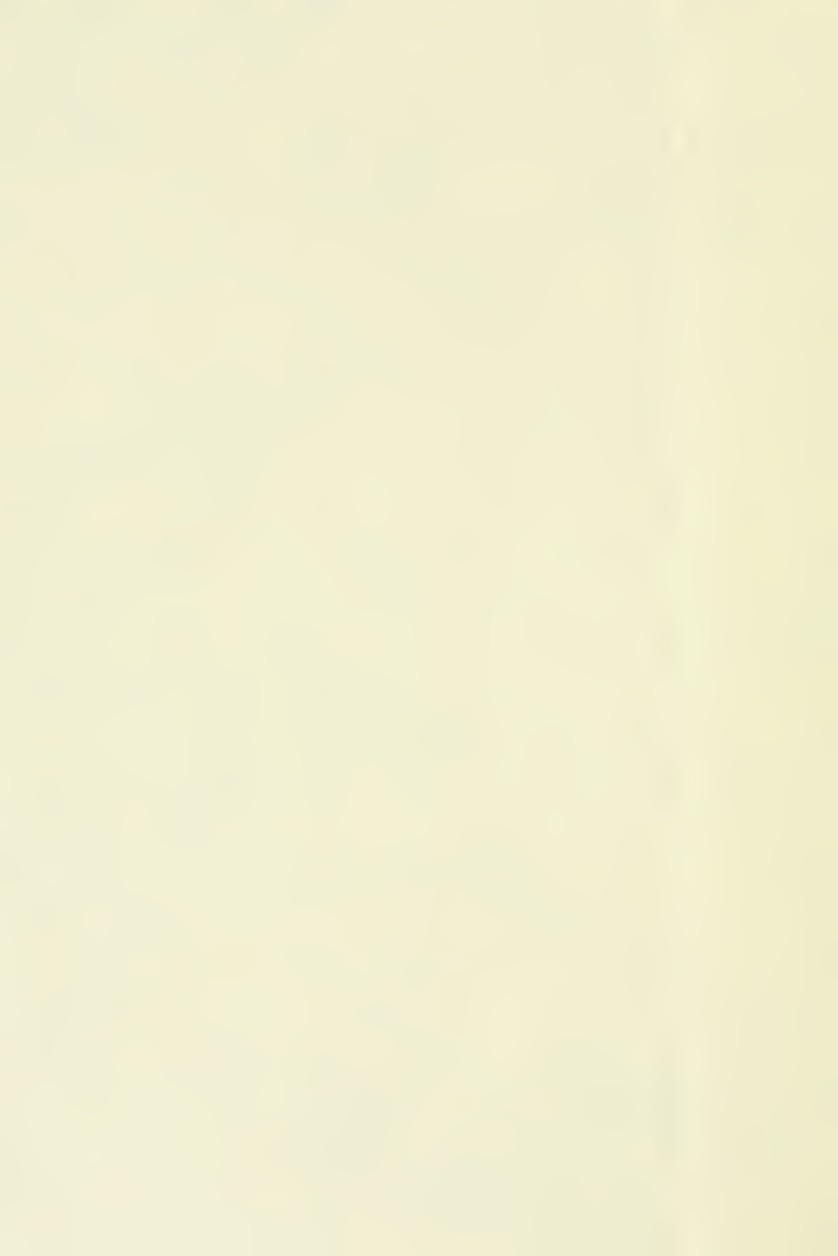








VORLESUNGEN ÜBER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

VON

EMANUEL CZUBER

O. Ö. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

ERSTER BAND

MIT 115 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE, SORGFÄLTIG DURCHGESEHENE AUFLAGE



LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1906

Vorwort zur ersten Auflage.

Die „Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung“, welche ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, sind in erster Linie für Studierende an Technischen Hochschulen bestimmt; ich darf jedoch hoffen, daß sie auch von Studierenden der Mathematik im engeren Sinne mit Nutzen werden gebraucht werden.

Bei Abfassung derselben war es mein Bestreben, mich auf den Boden der modernen Forschung zu stellen und in bezug auf die Auswahl des Stoffes und seine Verfolgung ins Einzelne jene Grenzen einzuhalten, welche mir durch den Zweck des Buches geboten erscheinen. Für den Studierenden der technischen Disziplinen bildet die Differential- und Integral-Rechnung in der Regel den Abschluß der mathematischen Vorbildung; er soll in den betreffenden Vorlesungen neben einer tüchtigen Schulung des Geistes jene Kenntnisse erwerben, die zu einer wissenschaftlichen Erfassung und Behandlung der Probleme der Technik, zum Verständnis der reichen Literatur auf diesem Gebiete erforderlich sind. Für denjenigen, welcher die Mathematik zu seinem Berufsstudium erwählt hat, ist eine gründliche Einführung in die Methoden und den Formelapparat der Infinitesimal-Rechnung die unerläßliche Voraussetzung eines erfolgreichen Betriebes spezieller Fachstudien. Rücksichtlich beider Kategorien empfiehlt es sich, den theoretischen Aufbau auf jenes Maß zu beschränken, das mit den vorhandenen mathematischen Kenntnissen und dem unmittelbaren Bedürfnisse in richtigem Einklange steht.

Was bei dem Techniker durch das spezielle Ziel des Studiums der Infinitesimal-Rechnung bedingt ist, das erfordern bei dem angehenden Mathematiker didaktische Rücksichten:

ich meine die organische Verbindung der Theorie mit ihrer Anwendung. Der Techniker studiert die Mathematik, um davon bei der Lösung wichtiger Probleme der großen Praxis Gebrauch zu machen; dem Mathematiker dienen die Anwendungen nicht so sehr, das Studium zu beleben, als vielmehr es zu vertiefen, die klare Erfassung der theoretischen Sätze zu vermitteln. Daß es vornehmlich die geometrischen Anwendungen der Analysis sind, welche sich für diesen Zweck empfehlen, bedarf kaum der Begründung: um in sie einzutreten, ist eine spezielle Vorbereitung nicht erforderlich, und die Probleme der Mechanik, Physik und Geodäsie schließen sich ihnen eng an.

Bei der Auswahl der Beispiele hielt ich mir vor Augen, daß es sich nicht darum handeln darf, zum alleinigen Zwecke der Einübung die Formeln auf eine Reihe mehr oder weniger gleichartige Fälle anzuwenden. Vor allem kam es mir darauf an, überall dasjenige klar hervortreten zu lassen, was jeweilen beleuchtet werden sollte; außerdem aber suchte ich durch die Beispiele den zugeführten Wissenstoff zu vermehren.

Daß die geometrische Interpretation der analytischen Sätze ausgiebig herangezogen wurde, versteht sich bei den Zielen des Buches von selbst.

Wie weit die getroffene Auswahl des Stoffes und seine Darstellung im Einzelnen mit den eben gekennzeichneten Intentionen sich decken, darüber hat das fachmännische Urteil anderer zu entscheiden.

Noch liegt es mir ob, der Verlagsbuchhandlung für die gediegene Ausstattung und meinem Assistenten, Privatdozenten Dr. Karl Zsigmondy, für seine freundliche Hilfe bei der Druckrevision zu danken.

Wien, Neujahr 1898.

E. Czuber.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Bei der Bearbeitung der zweiten Auflage hat die Gesamtanlage des Werkes eine Änderung nicht erfahren, da mir weder die Urteile der Kritik noch die eigenen seither gemachten Erfahrungen eine solche als notwendig erscheinen ließen. Hingegen ist alle Sorgfalt darauf verwendet worden, den Inhalt abzurunden und den Zwecken, für welche das Buch bestimmt ist, vollkommener anzupassen; wo es angezeigt schien, die Darstellung präziser zu gestalten und die Ergebnisse schärfer zu formulieren. Von größeren Erweiterungen des Inhaltes seien erwähnt im I. Bande die hyperbolischen Funktionen, der Begriff der Funktion einer komplexen Variablen; im II. Bande die Eulerschen Integrale, die Fourierschen Reihen, Moment- und Schwerpunktsbestimmungen, die Sätze von Green. Die Einfügung historischer und literarischer Notizen wird manchem willkommen sein; auch die ziemlich zahlreichen, an passenden Stellen vorgelegten Probleme dürften zur Verwendbarkeit des Buches beitragen. So hoffe ich, die Absichten, welche mir bei der Anlage des Werkes vorschwebten, der Verwirklichung näher gebracht zu haben.

Meinem früheren Assistenten, Prof. Dr. Karl Carda, habe ich für die freundliche Mitwirkung beim Korrekturenlesen zu danken.

Wien, Dezember 1905.

E. Czuber.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Differential-Rechnung.

Erster Abschnitt.

Variable und Funktionen.

§ 1. Entwicklung des Zahlbegriffs.

§ 2. Variable.

§ 3. Funktionen.

Zweiter Abschnitt.

Differentiation von Funktionen einer Variablen.

§ 1. Der Differentialquotient und das Differential.

§ 2. Allgemeine Sätze über Differentiation.

§ 3. Differentialquotienten der elementaren Funktionen.

§ 4. Allgemeine Sätze über den Zusammenhang einer Funktion mit ihrem Differentialquotienten.

§ 5. Die höheren Differentialquotienten und Differentiale.

§ 6. Transformation der unabhängigen Variablen.

Dritter Abschnitt.

Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen.

§ 1. Partielle Differentialquotienten und Differentiale. Das totale Differential.

§ 2. Die höheren Differentialquotienten und Differentiale.

§ 3. Differentiation zusammengesetzter und impliziter Funktionen.

§ 4. Transformation der Variablen.

Vierter Abschnitt.

Reihen.

§ 1. Reihen mit konstanten Gliedern.

§ 2. Reihen mit variablen Gliedern.

§ 3. Die Formeln und Reihen von Taylor und Maclaurin.

§ 4. Die elementaren Funktionen einer komplexen Variablen.

§ 5. Die unbestimmten Formen.

Fünfter Abschnitt.

Maxima und Minima der Funktionen.

§ 1. Maxima und Minima der Funktionen einer Variablen.

§ 2. Maxima und Minima der Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen

§ 3. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer abhängigen Variablen.

Sechster Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Untersuchung von Kurven und Flächen.

A. Ebene Kurven.

§ 1. Die Tangente und die Normale.

§ 2. Asymptoten.

§ 3. Gestaltung einer Kurve in der Umgebung eines Punktes.

§ 4. Verhalten zweier Kurven in der Umgebung eines gemeinsamen Punktes.

§ 5. Länge eines Kurvenbogens. Bogendifferential.

§ 6. Krümmung ebener Kurven.

§ 7. Die singulären Punkte ebener Kurven.

§ 8. Einhüllende Kurven.

B. Raumkurven und krumme Flächen.

§ 1. Tangente und Normalebene einer Raumkurve. Die erste Krümmung oder Flexion.

§ 2. Oskulationsebenen einer Raumkurve. Die zweite Krümmung oder Torsion.

§ 3. Tangenten und Tangentialebenen, Normalen und Normalebenen einer krummen Fläche.

§ 4. Einhüllende Flächen.

§ 5. Die Polarfläche einer Raumkurve.

§ 6. Krümmung von Kurven auf krummen Flächen.

Berichtigung.

Die Fußnote auf S. 189 ist zu streichen.

Erster Teil.

Differential-Rechnung.

Erster Abschnitt.

Variable und Funktionen.

§ 1. Entwickelung des Zahlbegriffs.

1. Rationale Zahlen. Grundlage der Arithmetik ist die *natürliche Zahlenreihe.* Werden auf die Zahlen derselben die Operationen des *Addierens, Multiplizierens* (Bilden einer Summe aus mehreren gleichen Summanden) und *Potenzierens* (Bilden eines Produkts aus mehreren gleichen Faktoren) angewendet, so führt dies über jene Zahlenreihe nicht hinaus, d. h. das Resultat ist immer wieder eine Zahl dieser Reihe.

2. Die der Multiplikation *inverse* Operation, die *Division,* welche verlangt, zu gegebenem Produkt und einem gegebenen Faktor den andern Faktor zu finden, hat ihre Lösung in der Zahlenreihe nur dann, wenn das Produkt, der Dividend, ein *Vielfaches* des bekannten Faktors, des Divisors, ist. Um sie auch im andern Falle ausführbar zu machen, ist die Schaffung *neuer* Zahlen notwendig. Von der Voraussetzung ausgehend, daß die *natürliche Einheit* in jede beliebige Anzahl gleicher Teile teilbar sei, zerlegt man, um die Division $a:b$ zu vollziehen, jede der a Einheiten des Dividends in b gleiche Teile — ein solcher sei mit $\frac{1}{b}$ bezeichnet — und vermag nun die ab neuen Einheiten des Dividends, von der Größe $\frac{1}{b}$, als Summe von b gleichen Summanden darzustellen, deren jeder a solcher neuen Einheiten umfaßt; ein solcher Summand stellt

nun, der Definition der Multiplikation gemäß, das Resultat der vorgelegten Division, den Quotienten, dar und wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet. Eine Zahl dieses Bildungsgesetzes wird *Bruch* genannt; während die natürliche Zahl a ein Aggregat natürlicher Einheiten vertritt, bedeutet der Bruch $\frac{a}{b}$ ein Aggregat ebensovieler Brucheinheiten, deren b eine natürliche Einheit ausmachen.

Die Vergleichung der Brüche untereinander und mit ganzen Zahlen, also auch ihre *Anordnung nach der Größe*, beruht auf der Möglichkeit, sie auf gleichen Nenner zu bringen, d. i. als Aggregate gleicher Brucheinheiten darzustellen; als gemeinsamer Nenner ist jedes gemeinschaftliche Vielfache der vorhandenen Nenner verwendbar; die Vergleichung erfolgt dann an natürlichen Zahlen, den Zählern der transformierten Brüche. Auf denselben Umstand gründet sich die Tatsache, daß man zwischen zwei ungleiche Brüche immer wieder Brüche einschalten kann; man wähle als gemeinsamen Nenner ein so großes Vielfache der beiden Nenner, daß die neuen Zähler um mehr als eine Einheit sich unterscheiden, so daß zwischen sie andere Zahlen eingeschaltet werden können.

Die Vergleichung der Brüche und ihre Anordnung nach der Größe wird auch erreicht durch eine Darstellung derselben, welche jener der natürlichen Zahlen im dekadischen Zahlensystem nachgebildet ist; man verwandelt die Brüche in Aggregate von Bruchteilen nach dem Nenner 10 und seinen aufeinander folgenden Potenzen und bezeichnet diese Form als *Dezimalbruch*. Ist $\frac{a}{b}$ ein auf seine kleinste Benennung reduzierter Bruch, so lehrt die Arithmetik ein Verfahren, durch welches man ihm die Gestalt

$$\frac{a}{b} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \cdots$$

verleiht, wobei α_0 eine natürliche Zahl bedeutet, während unter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ je eine der zehn Ziffern $0, 1, 2, \ldots 9$ zu verstehen ist. Das betreffende Verfahren schließt von selbst, wenn b Teiler einer Potenz von 10, also nur aus den Faktoren 2 und 5 zusammengesetzt ist; im andern Falle bietet hier die

Arithmetik das erste Beispiel eines *unbegrenzt fortsetzbaren Rechenprozesses* dar, aber eines solchen von besonderer Art. Nach einer beschränkten Anzahl von Rechnungsoperationen ist nämlich der ganze weitere Ablauf des Prozesses festgestellt, indem von einer bestimmten Stelle an eine gewisse Gruppe von Ziffern $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_{r+p}$ beständig sich wiederholt. Auf Grund dieses *periodischen* Verlaufes ist es möglich, den unbegrenzt fortsetzbaren oder *unendlichen Dezimalbruch* mit Hilfe einer beschränkten Anzahl von Zeichen *erschöpfend* darzustellen.

Bildet man aus dem unendlichen Dezimalbruche, der in dem letztgedachten Falle entsteht, der Reihe nach die *abgekürzten* Dezimalbrüche

$$(1) \qquad \begin{cases} a_0 = \alpha_0 \\ a_1 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} \\ a_2 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}, \end{cases}$$

so liegt es in der Natur des Rechenprozesses, durch welchen diese gewonnen werden, daß sie niemals abnehmen, sondern im allgemeinen wachsend fortschreiten, und daß für jedes n aus der Reihe 0, 1, 2, ...

$$(2) \qquad a_n < \frac{a}{b} < a_n + \frac{1}{10^n} = a'_n,$$

so zwar, daß der Unterschied

$$(3) \qquad \frac{a}{b} - a_n < \frac{1}{10^n}$$

und daß er also durch Wahl von n kleiner gemacht werden kann als ein beliebig kleiner Bruchteil ε der Einheit. Und da *jeder* später folgende abgekürzte Dezimalbruch $a_{n+\nu}$ im allgemeinen größer ist als a_n und doch unter $\frac{a}{b}$ bleibt, so ist auch der Unterschied

$$(4) \qquad a_{n+\nu} - a_n < \frac{1}{10^n},$$

welche der Zahlen 1, 2, 3, ... man für ν setzen mag, und

somit kann auch dieser Unterschied durch Wahl von n unter die Größe ε gebracht werden.

Man hat also in der unbegrenzt fortsetzbaren Folge der abgekürzten Dezimalbrüche

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{5}$$

eine Reihe von Brüchen, welcher folgende Eigenschaften zukommen: 1) Keines ihrer Glieder kommt dem Bruche $\frac{a}{b}$ gleich; 2) man kann n so groß wählen, daß der Unterschied $a_{n+\nu} - a_n$ bei jedem ν kleiner ausfällt als der beliebig klein festgesetzte Bruchteil ε der Einheit; 3) der Unterschied $\frac{a}{b} - a_n$ kann gleichfalls durch entsprechende Wahl von n kleiner gemacht werden als ein beliebig klein festgesetztes ε. Dieser Sachverhalt wird in Kürze dadurch ausgedrückt, daß man die *Zahlenreihe* (5) als *konvergent* und den Bruch $\frac{a}{b}$ als ihren *Grenzwert* bezeichnet.

Man kann sich von der Sache noch eine andere Auffassung bilden, wenn man auch die Zahlen a_n' hinzunimmt, welche unter (2) definiert worden sind und aus den Zahlen der Reihe (5) dadurch hervorgehen, daß man an jeder derselben die niedrigste Stelle um eine Einheit erhöht; diese Zahlen bilden gleichfalls eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von endlichen Dezimalbrüchen

$$a_0', a_1', a_2', \ldots, \tag{5'}$$

welche mit der Reihe (5) analoge Eigenschaften besitzt mit dem Unterschiede jedoch, daß alle ihre Glieder größer sind als $\frac{a}{b}$.

Die Zahl $\frac{a}{b}$ scheidet nun die Zahl der Reihen (5) und (5′) nach folgenden Gesetzen voneinander: 1) Jede Zahl in (5′) ist größer als jede Zahl in (5); 2) es lassen sich, wie klein auch ε sein mag, zwei Zahlen finden, die eine aus (5′), die andere aus (5), derart, daß ihr Unterschied kleiner ist als ε. Diesen Sachverhalt drückt man dadurch aus, daß man sagt, die Zahl $\frac{a}{b}$ bringe einen *Schnitt**) zwischen den Zahlen

*) R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872, 1892.

der Reihen (5) und (5') hervor; diesem Schnitte entspricht die Lösung der Aufgabe, den Quotienten der Division $a : b$ zu bestimmen.

3. Die der Addition inverse Operation, die *Subtraktion*, welche verlangt, zu gegebener Summe und einem gegebenen Summanden den andern Summanden zu finden, auf natürliche Zahlen oder Brüche angewendet, gestattet nur dann eine Lösung in eben diesen Zahlen, wenn die Summe, der Minuend, *größer* ist als der gegebene Summand, der Subtrahend. Um sie auch im andern Falle ausführbar zu machen, ist die Schaffung *neuer* Zahlen notwendig; diese besteht darin, daß man zunächst eine Differenz, in welcher Minuend und Subtrahend einander gleich sind, als *Zahl* einführt — Null, 0 — und in weiterer Folge jede *Differenz mit dem Minuend* 0 als *Zahl* betrachtet. Die solchergestalt geschaffenen Zahlen, welche sich unter Weglassung der Null formal als die bisher betrachteten Zahlen mit dem vorgesetzten Subtraktionszeichen „—" darstellen, werden *negative* Zahlen und die erstgedachten zum Unterschiede von ihnen *positive* Zahlen genannt. So gehört denn zu jeder positiven ganzen Zahl und zu jedem positiven Bruche eine dem *Betrage* nach gleiche negative ganze Zahl, beziehungsweise ein negativer Bruch; die Null hat an dieser Gegenüberstellung nicht teil.

Will man von einer Zahl a, welche positiv wie negativ sein kann, bloß den *absoluten Betrag* andeuten, so schreibt man $|a|$.

Das System der positiven und negativen ganzen Zahlen und Brüche mit Einschluß der Null bezeichnet man als das System der *rationalen Zahlen.* Die Arithmetik dehnt die für die natürlichen Zahlen geltenden Gesetze und Regeln der bisher erwähnten Operationen auf alle Zahlen dieses Systems aus.

4. Irrationale Zahlen. Aus dem Potenzieren entspringt durch diejenige Umkehrung, welche zu gegebener Potenz und gegebenem Exponenten die Basis verlangt, eine neue Rechnungsoperation, das *Radizieren* oder Wurzelziehen. Die gegebene Potenz, der Radikand, werde als positive rationale, der Exponent, Wurzelexponent genannt, als positive ganze Zahl vorausgesetzt. Die Arithmetik weist nach, daß diese Aufgabe nur

dann im System der rationalen Zahlen eine Lösung findet, wenn der Radikand eine Potenz zum Wurzelexponenten ist. Um sie auch im andern Falle lösbar zu machen, ist die Schaffung *neuer* Zahlen notwendig. Der hierzu führende Gedankengang läßt sich an das Verfahren anknüpfen, welches die Arithmetik zur Ausziehung der Quadrat- oder der Kubikwurzel aus einer Zahl angibt.

Es handle sich um $\sqrt{A}$, wobei A eine positive rationale Zahl bedeutet, die keine Quadratzahl ist. Die Arithmetik lehrt einen Rechenprozeß, durch welchen eine Folge abgekürzter Dezimalbrüche

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \tag{6}$$

mit $0, 1, 2, \ldots$ Dezimalstellen gefunden wird, deren Quadrate sämtlich kleiner sind als A, so daß für jedes n

$$a_n^2 < A;$$

erhöht man dagegen jede der Zahlen (6) um eine Einheit ihrer niedrigsten Stelle und setzt

$$a_n + \frac{1}{10^n} = a_n', \tag{7}$$

so entsteht eine zweite Folge abgekürzter Dezimalbrüche

$$a_0', a_1', a_2', \ldots \tag{6'}$$

mit höchstens $0, 1, 2, \ldots$ Dezimalstellen, deren Quadrate sämtlich größer sind als die Zahl A, so daß für jedes n

$$a_n'^2 > A.$$

Der Rechenprozeß, der zu den beiden Folgen (6) und (6′) führt, ist ein unbegrenzt fortsetzbarer; denn er könnte nur dann schließen, wenn das Quadrat einer der Zahlen (6) oder (6′) gleich würde der Zahl A, was jedoch der Voraussetzung widerspricht. Er unterscheidet sich aber von dem in 2 besprochenen Prozesse wesentlich dadurch, daß, wo man ihn auch abbricht, über seinen weiteren Ablauf ohne Fortsetzung der Rechnung nichts ausgesagt werden kann; periodische Wiederholung einer Stellengruppe kann nicht eintreten, weil eine solche, wie die Arithmetik nachweist, nur bei der Verwandlung einer rationalen Zahl sich einstellen kann. Es ist daher unmöglich, den unbegrenzt fortsetzbaren oder unendlichen Dezimalbruch, welcher durch den obigen Rechenprozeß definiert

ist, mittels einer beschränkten Anzahl von Zahlzeichen *erschöpfend* darzustellen.

Die Zahlenreihen (6) und (6') haben analoge Eigenschaften wie die Zahlenreihen (5) und (5') in 2. Weil a_n sich von a'_n vermöge (7) um $\frac{1}{10^n}$ unterscheidet und jede später folgende Zahl $a_{n+\nu}$ zwischen a_n und a'_n fällt, so ist für jedes ν

$$a_{n+\nu} - a_n < \frac{1}{10^n} \tag{8}$$

und kann dies durch Wahl von n kleiner gemacht werden als die beliebig kleine festgesetzte positive Zahl ε. Jede Zahl in (6') ist größer als jede Zahl in (6); wie klein aber auch ε angenommen wird, es lassen sich auf Grund von (7) immer zwei Zahlen, je eine aus den Reihen (6) und (6'), derart auswählen, daß ihr Unterschied kleiner ist als ε.

Die durch das Zeichen $\sqrt{A}$ vorgestellte Aufgabe bewirkt also eine Scheidung der rationalen Zahlen a_n und a'_n, oder sie führt einen *Schnitt* zwischen den Zahlenreihen (6) und (6') herbei, und diesem Schnitt ordnet man die Lösung der obigen Aufgabe zu, nennt diese Lösung eine *Zahl*, jedoch zum Unterschiede von den rationalen Zahlen eine *irrationale* Zahl.

Jede der Zahlenreihen (6) und (6') kann als *Definition* für die Zahl angesehen werden, welche die Lösung der Aufgabe bildet, und zwar in dem Sinne, daß zwar keine der Zahlen a_n, beziehungsweise a'_n die Forderung erfüllt, zum Quadrat erhoben die Zahl A zu geben, daß sie dieser Forderung jedoch um so genauer nachkommen, je weiter man in den Reihen fortschreitet, so daß schließlich der Unterschied zwischen A und $a_n{}^2$, beziehungsweise zwischen $a'_n{}^2$ und A, kleiner wird und bei weiter zunehmendem n kleiner bleibt als eine beliebig kleine festgesetzte positive Zahl ε. In diesem Sinne kann man auch sagen, die Zahl, welche die Lösung der Aufgabe $\sqrt{A}$ gibt, sei der *Grenzwert* der Zahlenreihe (6) oder der Reihe (6').

Von dem besonderen hier betrachteten Falle abstrahierend sagt man von einer Aufgabe, welche zwei Folgen von rationalen Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$
$$a_0', a_1', a_2', \ldots$$

derart voneinander scheidet, daß jede Zahl der einen Folge kleiner ist als jede Zahl der andern Folge, daß ferner zu einer beliebig kleinen im voraus gewählten positiven Zahl ε zwei Zahlen aus den beiden Folgen sich bestimmen lassen derart, daß ihr Unterschied kleiner ist als ε, sie bestimme einen *Schnitt* und diesem Schnitte entspreche eine Zahl. Jeder der beiden Folgen kommt die Eigenschaft zu, daß bei beliebig kleinem ε sich n derart bestimmen läßt, daß der Unterschied $a_{n+\nu} - a_n$, beziehungsweise $a'_{n+\nu} - a'_n$ dem Betrage nach kleiner ist als ε für jedes ν $(= 1, 2, \ldots)$. Eine Folge von Zahlen dieser Eigenschaft bezeichnet man als *Zahlenreihe* oder *Fundamentalreihe**) und betrachtet sie als Definition eben derselben Zahl, welche vorhin dem Schnitt zugeordnet war. Gehört diese Zahl nicht dem System der rationalen Zahlen an, so wird sie *irrationale* Zahl genannt. Eine Zahlenreihe, welche die Null definiert, wird *Elementarreihe* genannt.

Zwei durch Fundamentalreihen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_0, b_1, b_2, \ldots$ definierte Zahlen werden für gleich erklärt, wenn $a_0 - b_0$, $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2, \ldots$ eine Elementarreihe ist.

Wenn die durch $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definierte Zahl α heißt, so soll die zu $-a_0, -a_1, -a_2, \ldots$ gehörige Zahl $-\alpha$ heißen; durch diese Festsetzung ist jeder positiven irrationalen Zahl eine dem Betrage nach gleiche negative Zahl zugeordnet.

Die Summe, Differenz, das Produkt und der Quotient der beiden durch die Fundamentalreihen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_0, b_1, b_2, \ldots$ definierten Zahlen werden der Reihe nach durch die Zahlenfolgen

$$a_0 + b_0, \quad a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \ldots$$
$$a_0 - b_0, \quad a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \ldots$$
$$a_0 b_0, \quad a_1 b_2, \quad a_2 b_2, \ldots$$
$$\frac{a_0}{b_0}, \quad \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \ldots$$

erklärt, von welchen sich nachweisen läßt, daß sie ebenfalls

*) E. Heine, Elemente der Funktionentheorie. Journ. f. Math. 74 (1872). — G. Cantor, Mathemat. Annalen 5 (1872) und 21 (1883).

Fundamentalreihen sind, bei dem Quotienten jedoch den Fall ausgenommen, daß $b_0, b_1, b_2, \ldots$ eine Elementarreihe ist. Hierdurch ist jede Rechnung mit irrationalen Zahlen zurückgeführt auf die entsprechende Rechnung mit rationalen Zahlen, nämlich mit genügend späten Gliedern der die irrationalen Zahlen definierenden Fundamentalreihen.

5. Reelle Zahlen. Das aus den rationalen und irrationalen Zahlen zusammengesetzte System wird das System der *reellen* Zahlen genannt. Dasselbe läßt eine bemerkenswerte geometrische Versinnlichung zu, an welcher eine wichtige Eigenschaft dieses Systems aufgezeigt werden soll.

In einer geraden Linie nehme man einen Punkt an, ordne ihm die Null zu und bezeichne den einen der beiden Strahlen, in welche die Gerade hierdurch zerlegt ist, als den positiven, den andern als den negativen; ferner setze man eine Strecke als Vertreter der natürlichen Einheit 1 fest. Um die (positive oder negative) ganze Zahl a darzustellen, trage man eine Strecke von $|a|$ Einheiten vom Nullpunkte aus (auf dem positiven, respektive negativen Strahl) auf; der Endpunkt dieser Strecke sei das Bild von a. Um den (positiven oder negativen) Bruch $\frac{a}{b}$ darzustellen, trage man eine Strecke, welche das a-fache des b-ten Teils der Einheitsstrecke ist, vom Nullpunkte aus (auf dem positiven, respektive negativen Strahl) auf; der Endpunkt dieser Strecke sei das Bild von $\frac{a}{b}$. In solcher Weise ist *jeder* rationalen Zahl ein bestimmter Punkt der Geraden zugeordnet. Aber die Punkte der Geraden sind dadurch nicht erschöpft; so befinden sich darunter die Punkte nicht, welche man erhält, wenn man die Diagonale des Quadrates über der Einheitsstrecke vom Nullpunkte aus auf den beiden Strahlen abträgt, weil sie den beiden Werten von $\sqrt{2}$ entsprechen, die dem System der rationalen Zahlen nicht angehören.

Dagegen läßt sich *jedem* Punkte der Geraden eine bestimmte Zahl zuordnen. Zunächst schließe man den Punkt durch wiederholtes Abtragen der Einheitsstrecke vom Nullpunkte aus in ein *Intervall* von der Größe 1 ein; durch Zehnteilung dieses Intervalls in ein solches von der Größe $\frac{1}{10}$

durch Zehnteilung dieses letzteren in ein Intervall von der Größe $\frac{1}{10^2}$, usw. Vorausgesetzt, daß niemals, wie weit man dies auch fortsetzt, ein Teilpunkt mit dem gegebenen Punkte zusammenfällt — in welchem Falle man schon nach einer beschränkten Anzahl von Wiederholungen des Prozesses eine Zahl, und zwar eine rationale, gefunden hätte, die dem Punkte zugehört —, entspricht den dem Nullpunkte näherliegenden Enden der aufeinanderfolgenden Intervalle eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von Dezimalbrüchen

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

ebenso den vom Nullpunkte weiter entfernten Endpunkten eine solche Folge

$$a_0', a_1', a_2', \ldots$$

von welchen sich leicht erkennen läßt, daß ihnen der Charakter von Fundamentalreihen und jene Eigenschaft zukommt, durch welche ein Schnitt bestimmt ist. Diesem Schnitt entspricht geometrisch der gegebene Punkt, und diesem wie jenem ist die durch die beiden Fundamentalreihen definierte Zahl zugeordnet. Dieselbe kann ebensowohl rational wie irrational sein; so würde z. B. der Punkt, welcher die rationale Zahl $\frac{1}{3}$ darstellt, bei dem beschriebenen Prozesse niemals erreicht werden gerade so, wie es mit dem Punkte der Fall ist, welcher der Zahl $\sqrt{2}$ entspricht.

Der geraden Linie kommt nun in bezug auf die in ihr liegenden Punkte eine Eigenschaft zu, deren Wesen Dedekind*) darin erkennt, daß eine Teilung dieser Punkte in zwei Klassen derart, daß jeder Punkt der einen Klasse links von jedem Punkt der andern Klasse liegt, jedesmal nur durch einen einzigen Punkt möglich ist; diese Eigenschaft nennt man die *Stetigkeit* oder *Kontinuität* und die Gerade in bezug auf die in ihr liegenden Punkte ein *Kontinuum*.

Da jedem Punkte der Geraden nach den gemachten Ausführungen eine reelle Zahl entspricht, so bezeichnet man das System der reellen Zahlen als ein *stetiges* oder als ein *Zahlenkontinuum*.

---

*) l. c.

6. Imaginäre und komplexe Zahlen. Dieselbe Umkehrung des Potenzierens, welche uns Anlaß geboten hat zur Schaffung der irrationalen Zahlen, das Wurzelziehen, führt in einer Klasse von Fällen über das System der reellen Zahlen hinaus. Wenn nämlich der Radikand eine negative reelle Zahl, der Wurzelexponent eine *gerade* Zahl ist, so findet die Aufgabe im System der reellen Zahlen keine Lösung, weil nach den Regeln, welche die Arithmetik für die Multiplikation positiver und negativer Zahlen angibt, sowohl eine positive wie auch eine negative Zahl zu einer geraden Potenz erhoben auf eine positive Zahl führt. Um auch in diesem Falle die Schranke aufzuheben und die Lösung zu ermöglichen, führt man das Ausziehen der $2n$-ten Wurzel aus der negativen Zahl $-B$ zunächst auf das Ausziehen der Quadratwurzel aus der Zahl -1 zurück, indem man die für die andern Fälle geltenden Rechengesetze fortbestehen läßt und schließt:

$$\sqrt[2n]{-B} = \sqrt[n]{\sqrt{-B}} = \sqrt[n]{\sqrt{B} \cdot \sqrt{-1}};$$

die positive dem Zeichen $\sqrt{B}$ entsprechende reelle Zahl heiße β; $\sqrt{-1}$ dagegen führt man als eine neue Recheneinheit mit dem Zeichen i ein, der mit dieser Einführung die wesentliche Eigenschaft

$$i^2 = -1 \tag{9}$$

erteilt wird, nennt sie die *imaginäre Einheit* und βi eine *imaginäre Zahl*.

Die additive Verbindung einer reellen Zahl α mit der imaginären Zahl βi, also $\alpha + \beta i$, heißt eine *komplexe* Zahl. Die Arithmetik lehrt, wie die für die reellen Zahlen geltenden Rechengesetze auf die komplexen Zahlen auszudehnen sind; dabei kommt die in (9) ausgesprochene Grundeigenschaft der imaginären Einheit als neues Rechengesetz hinzu.

Zur Bestimmung einer komplexen Zahl sind zwei reelle Zahlen α, β erforderlich. Würde man diese auf die in 5 erörterte Weise in einer oder in zwei geraden Linien darstellen, so hätte jede komplexe Zahl ein Punktepaar zum geometrischen Bilde. Man kann jedoch, wenn man sich statt der Geraden der *Ebene* bedient, jeder komplexen Zahl *einen* Punkt zu-

ordnen, jenen Punkt nämlich, welcher in bezug auf ein in der Ebene angenommenes rechtwinkliges Koordinatensystem $O(XY)$ α zur Abszisse, β zur Ordinate hat. Es kommt dies im Grunde auf die bereits eingeführte geometrische Darstellung reeller Zahlen wieder zurück. Wenn man nämlich eine Strecke als natürliche Einheit, den Ursprung O als gemeinsamen Nullpunkt und in jeder der Koordinatenachsen einen Strahl als positiv festsetzt, so gehört zu der Zahl α ein bestimmter Punkt der Abszissenachse, zu β ein bestimmter Punkt der Ordinatenachse und beide Punkte führen durch eine eindeutige Konstruktion zu einem Punkte M der Ebene.

Der *Abstand* dieses Punktes vom Nullpunkt mit der Einheitsstrecke gemessen gibt die positive reelle Zahl $r = |\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}|$, und die Quotienten $\frac{\alpha}{r}$, $\frac{\beta}{r}$ sind der Kosinus und Sinus jenes Winkels, um welchen der Strahl OX gegen oder über OY gedreht werden muß, um mit OM zur Koinzidenz zu kommen. Ist φ das absolute oder das *Bogenmaß**) dieses Winkels, so erscheint durch diese geometrische Betrachtung die Bestimmung der komplexen Zahl $\alpha + \beta i$ auf zwei neue reelle Zahlen r, φ zurückgeführt, indem

$$\alpha = r\cos\varphi, \qquad \beta = r\sin\varphi$$

und demzufolge

$$\alpha + \beta i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{10}$$

ist. Die Zahl r nennt man den *absoluten Betrag* oder den *Modul* der komplexen Zahl $\alpha + \beta i$ und schreibt dafür einer bei den reellen Zahlen eingeführten Bezeichnung gemäß auch $|\alpha + \beta i|$; die Zahl φ heißt die *Amplitude* von $\alpha + \beta i$. Die Umformung von α, β auf r, φ ist für das Rechnen mit komplexen Zahlen von der größten Bedeutung.

---

*) Unter dem Bogenmaß eines Winkels, das in analytischen Untersuchungen ausschließlich angewendet wird, versteht man das Verhältnis der Länge des Kreisbogens, den ein beliebiger Punkt des beweglichen Schenkels bei Entstehung des Winkels beschreibt, zum Halbmesser dieses Bogens. Hiernach ist π das Bogenmaß des geraden, $\frac{\pi}{2}$ das Bogenmaß des rechten Winkels usw.

§ 2. Variable.

7. Die reelle Variable und ihr Bereich. Unter einer *reellen Variablen* oder Veränderlichen versteht man ein *Zeichen* für eine veränderliche Größe, dem vermöge des Problems, in welchem die veränderliche Größe auftritt, mehrere oder unbeschränkt viele reelle Zahlenwerte beigelegt werden können. Die Gesamtheit dieser Werte wird eine Wertmenge und insbesondere der *Bereich* oder das Gebiet der Variablen genannt. Als Zeichen wird gewöhnlich einer der letzten Buchstaben des Alphabets benutzt. Die Variable x gilt als definiert, wenn von jeder reellen Zahl, die man bezeichnet, festgestellt werden kann, ob sie dem Bereich angehört oder nicht.

Im Gegensatze hierzu nennt man ein *Zeichen*, das eine im Laufe der Untersuchung unveränderliche Größe vertritt und dem daher in jedem besonderen Falle nur ein Zahlenwert zukommt, eine *Konstante*.

Wenn der Bereich der Variablen x durch *alle* reellen Zahlen zwischen zwei bestimmten α, β $(\alpha < \beta)$ mit Einschluß dieser gebildet wird, so heißt x eine *stetige* Variable in dem *Intervall* (α, β); die letztere Ausdrucksweise knüpft an die Vorstellung an, wonach der Bereich dieser Variablen in dem geometrischen Bilde durch die Strecke versinnlicht ist, deren Endpunkte den Zahlen α, β entsprechen; α heißt die untere, β die obere Grenze des Intervalls oder auch der Variablen. Die unbeschränkt große Menge der Werte einer stetigen Variablen bezeichnet man durch ∞^1.

Kann die stetige Variable *jeden* Wert annehmen, der algebraisch größer ist als α, so bezeichnet man ihre obere Grenze mit $+\infty$, ihr Intervall also mit $(\alpha, +\infty)$. Vermag sie *jeden* Wert anzunehmen, der algebraisch kleiner ist als β, so gibt man ihrer untern Grenze das Zeichen $-\infty$, so daß $(-\infty, \beta)$ ihr Intervall ist. Kann die stetige Variable überhaupt *jeden* reellen Wert annehmen, so ist $(-\infty, +\infty)$ ihr Intervall und sie heißt *unbeschränkt*.

Nimmt die Variable x nicht alle Werte eines Intervalls an, so heißt sie *unstetig*. Durch die Aussage z. B., x sei eine

ganze Zahl, ist x als unstetige Variable definiert; desgleichen durch die Aussage, x sei eine rationale Zahl.

Einen besonderen Wert der Variablen x, dessen sie nach ihrer Definition fähig ist, nennt man, an die geometrische Darstellung der reellen Zahlen denkend, eine *Stelle* oder einen *Punkt* ihres Bereichs.

Von einer Stelle *innerhalb* des Bereichs einer Variablen x kann man sich *nach zwei Richtungen bewegen*, d. h. von dem besondern Wert zu den größeren oder *vorwärts*, oder zu den kleineren oder *rückwärts* fortschreiten.

8. Bereich zweier Variablen. Es seien x, y zwei stetige reelle Variable; ein Wert von x und ein Wert von y bilden zusammen ein Wertsystem oder eine *Wertverbindung* x/y. Die Gesamtheit der Wertverbindungen bildet den *Bereich* oder das Gebiet der beiden Variablen x, y; der Bereich ist definiert, wenn von jeder bezeichneten Wertverbindung festgestellt werden kann, ob sie dem Bereiche angehört oder nicht.

Wenn man den Wert von x als Abszisse, den von y als Ordinate eines Punktes in bezug auf ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem $O(XY)$ betrachtet, so gehört zu jeder Wertverbindung ein Punkt der Ebene, und der Bereich ist durch die Gesamtheit der Punkte eines bestimmten Teils der Ebene dargestellt. Ist, um den einfachsten Fall zu erwähnen, x auf das Intervall (α, β), y auf das Intervall (γ, δ) beschränkt, beide mit Einschluß der Grenzen, so ist der Bereich der Variablen x, y durch die Punkte im Innern und auf dem Umfange jenes Rechteckes veranschaulicht, dessen Ecken die Koordinaten α/γ, β/γ, β/δ, α/δ besitzen. Sind x und y unbeschränkt, so ist ihr Bereich durch die unbegrenzte Ebene repräsentiert. Die Menge der Wertverbindungen zweier stetigen Variablen ist sinngemäß mit ∞^2 zu bezeichnen.

Von einer *Stelle* innerhalb des Bereiches zweier Variablen kann man in unbeschränkt vielen Richtungen fortschreiten; die Menge dieser Richtungen ist äquivalent der Wertmenge einer stetigen Variablen*) und daher mit ∞^1 zu bezeichnen.

*) Das Bogenmaß des Winkels, den die veränderliche Richtung mit einer festen bildet.

An der Grenze des Gebiets ist jedoch ein Teil der Fortschreitungsrichtungen ausgeschlossen.

9. Bereich dreier und mehrerer Variablen. Sind x, y, z drei stetige reelle Variable, so kann jedem Wertsystem oder jeder Wertverbindung $x/y/z$ derselben ein Punkt im Raume zugeordnet werden, wenn die Werte von x, y, z als Koordinaten in einem (rechtwinkligen) Raumkoordinatensystem angesehen werden. Der Bereich der drei Variablen x, y, z ist dann durch die Gesamtheit der Punkte eines bestimmten Raumteils dargestellt; er ist insbesondere durch das Innere und die Begrenzung eines Parallelepipeds versinnlicht, wenn x, y, z einzeln der Reihe nach an bestimmte Intervalle gebunden sind. Die Menge der Wertverbindungen dreier stetigen Variablen ist mit ∞^3, die Menge der von einem Punkte des Bereichs ausgehenden Fortschreitungsrichtungen durch ∞^2 zu bezeichnen.

Bei mehr als drei Variablen hört die Möglichkeit geometrischer Veranschaulichung auf. Um sich aber auch dann der Vorteile nicht entschlagen zu müssen, welche sie bei Durchführung analytischer Betrachtungen und bei Formulierung von Sätzen gewährt, führt man sie formal weiter und ordnet einer Wertverbindung $x_1/x_2/\ldots/x_n$ der n Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einen *Punkt* in dem (idealen) *n-fach ausgedehnten Raume* zu, nachdem in demselben ein *Koordinatensystem* $O(X_1, X_2, \ldots X_n)$ mit n gegenseitig zueinander *senkrechten* Achsen angenommen worden ist. Der Bereich der Variablen ist durch einen bestimmten Teil dieses n-dimensionalen Raumes dargestellt, die Menge der Wertverbindungen oder Punkte ist durch ∞^n, die Menge der Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte aus durch ∞^{n-1} zu bezeichnen.

Es ist lediglich Weiterführung der Analogie des Ausdrucks, welche in den Fällen von ein, zwei, drei Variablen uns entgegengetreten ist; ihr Zweck ist, an die anschaulichen Verhältnisse dieser Fälle zu erinnern und der Betrachtung dadurch eine Stütze zu bieten.

§ 3. Funktionen.

10. Funktionen einer reellen Variablen. Wenn jedem Werte der reellen Variablen x, welcher ihrem Bereiche

angehört, ein bestimmter Wert von y zugeordnet ist, so ist damit y im allgemeinen auch als Variable definiert und wird eine *Funktion der reellen Variablen* x genannt. Man drückt diesen Sachverhalt durch eine Gleichung von der Form $y = f(x)$ aus. Die Variable x wird auch das *Argument* der Funktion genannt.

Von der Variablen x setzen wir, wenn nicht eine hiervon abweichende Bestimmung getroffen ist, voraus, daß sie *stetig* sei. Weil der Wert des y von dem Werte des x abhängt, so wird y auch die *abhängige* Variable genannt in bezug auf x als *unabhängige* Veränderliche.

Über das *Gesetz* der Zuordnung, das in allgemeinster Weise durch die *Charakteristik* f angedeutet ist, enthält die obige Definition keine Aussage; es kann in der mannigfachsten Art festgestellt sein. Der wichtigste Fall besteht darin, daß eine *Rechenvorschrift* gegeben ist, nach welcher aus einem gegebenen Werte von x der zugehörige Wert von y zu berechnen ist; mit andern Worten, daß y durch einen *analytischen Ausdruck*, in welchen die Variable x als Rechenelement eingeht, definiert erscheint.

Das Gesetz der Zuordnung kann auch durch verbale Festsetzungen ganz willkürlicher Art gegeben sein; wenn man beispielsweise jedem rationalen Werte von x den Wert 1 und jedem irrationalen den Wert 0 von y zuweist, so ist dadurch im Sinne obiger Definition y auch als Funktion von x bestimmt; indessen bieten derartige Funktionen kaum ein ernstliches Interesse.

In den naturwissenschaftlichen Anwendungen werden häufig zusammengehörige Werte von x und y durch *Messung* gewisser Größen gewonnen; man spricht dann von *empirischer* Zuordnung.

Zwischen der analytischen und der empirischen Definition, durch eine gezeichnete Kurve etwa, die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen ist, wobei die Abszisse x, die zugehörige Ordinate y vorstellt, besteht ein wesentlicher Unterschied: während dort die Berechnung des y genau oder mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit geschehen kann, ist sie hier nur *approximativ* mit einer von verschiedenen Umständen abhängigen Genauigkeit möglich.

Es gibt Fälle, wo jedem Werte der unabhängigen Variablen x mehrere oder selbst unbegrenzt viele Werte von y zugeordnet sind; auch dann bezeichnet man y als Funktion von x, jedoch als eine *mehrdeutige*, beziehungsweise unendlich vieldeutige. Lassen sich dann von einem Gesichtspunkte aus die Werte von y derart ordnen, daß an *jeder* Stelle in bestimmter Weise von einem *ersten* Werte y_1, von einem *zweiten* y_2 usw. gesprochen werden kann, so ist y_1 eine Funktion von x in dem ursprünglichen Sinne oder eine *eindeutige* Funktion, ebenso y_2 usw.; die mehrdeutige Funktion erscheint hiernach in mehrere eindeutige Funktionen aufgelöst, die man auch ihre *Zweige* nennt. Diese Bemerkung ist wichtig, weil sie die Beschränkung auf eindeutige Funktionen gestattet.

11. Funktionen zweier und mehrerer Variablen. Wenn jeder Wertverbindung x/y, welche einem definierten Bereich der beiden reellen Variablen x, y angehört, eine bestimmte Zahl z zugeordnet ist, so heißt z eine *Funktion der beiden Variablen* x, y. Man bringt dies in einem Ansatze von der Gestalt $z = F(x, y)$ zum Ausdruck.

Diese Definition kann auf beliebig viele Variablen ausgedehnt werden; man nennt u eine Funktion der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$, wenn jeder Wertverbindung $x_1/x_2/\ldots/x_n$ dieser Variablen innerhalb eines vorgeschriebenen Bereichs ein bestimmter Wert von u zugeordnet ist. Die allgemeine Bezeichnung hiefür ist $u = \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Im übrigen gelten über die Funktionen zweier und mehrerer Variablen zunächst die nämlichen Bemerkungen, wie sie für Funktionen einer Variablen gemacht worden sind.

12. Implizite, explizite, inverse Funktionen. Es sei $z = F(x, y)$ eine analytisch definierte Funktion der beiden reellen Variablen x, y. Gibt es solche reelle Wertverbindungen x/y der letzteren, welchen der Wert 0 von z zugehört, so ist ihre Gesamtheit durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

bestimmt. Vermöge dieser Gleichung ist eine Zuordnung der Werte von x und y oder eine *gegenseitige Abhängigkeit* dieser Variablen gegeben, und man kann ebensowohl y als Funktion von x wie auch x als Funktion von y betrachten; in jedem

Falle setzt die Bestimmung zusammengehöriger Werte die *Auflösung einer Gleichung* voraus. Man sagt in einem solchen Falle, jede der beiden Variablen x, y sei *implizite* als Funktion der andern gegeben.

Dem steht die *explizite* gegebene Funktion gegenüber, deren Wert aus dem jeweiligen Werte der Variablen durch einen vorgeschriebenen Komplex von Rechenoperationen zu gewinnen ist; man schreibt eine solche in der Form $y = f(x)$ an und hat sich unter $f(x)$ einen analytischen Ausdruck vorzustellen, in welchem x als Rechenelement erscheint (10).

Wenn es möglich ist, die Gleichung (1) allgemein, d. i. für unbestimmte Werte von x und y nach diesen aufzulösen, so daß einmal $y = \varphi(x)$, ein zweitesmal $x = \psi(y)$ erhalten wird, so heißen die durch φ, ψ charakterisierten Funktionen *inverse* oder umgekehrte *Funktionen.*

13. Die elementaren Funktionen einer Variablen. Um eine Übersicht über die Funktionen zu erlangen, welche Gegenstand unserer Untersuchungen sein werden, schlagen wir den folgenden Weg ein.

I. Die einfachste Funktion zweier Variablen x, y ist ein Polynom, dessen Glieder die allgemeine Form $A_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu$ haben, wobei μ, ν positive ganze Zahlen oder Null und $A_{\mu,\nu}$ (reelle) Konstanten bedeuten; man nennt sie eine *rationale ganze Funktion* der Variablen x, y. Die größte unter den Summen $\mu + \nu$ bezeichnet den *Grad* der Funktion, die größte der Zahlen μ ihren Grad *in bezug auf* x, die größte der Zahlen ν den Grad *in bezug auf* y.

Setzt man eine solche Funktion der Null gleich, so ist durch diese Gleichung y als *algebraische Funktion* von x definiert (und auch umgekehrt x als algebraische Funktion von y; wir fassen den ersten Fall ins Auge). Die oben unterschiedenen drei Grade bezieht man auch auf die Gleichung, welche man als *algebraische Gleichung* bezeichnet.

Ist diese in bezug auf y vom *ersten* Grade, so ist y als *rationale* Funktion von x bestimmt; dabei können noch zwei Fälle unterschieden werden. Ist nämlich der Koeffizient von y eine Konstante, so hat die Auflösung nach y die Form

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

mit ganzem positiven n; y heißt jetzt eine *rationale ganze Funktion* von x vom Grade n. Hat hingegen y einen von x abhängigen Koeffizienten, so wird die Auflösung nach y in der Gestalt

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$$

mit ganzem positiven n und m sich ergeben; dann nennt man y eine *rationale gebrochene Funktion* von x, und zwar eine *echt* gebrochene, wenn $n < m$; eine *unecht* gebrochene, wenn $n \geqq m$. Die unecht gebrochene Funktion läßt sich nach den Regeln der Arithmetik in eine ganze und eine echt gebrochene zerlegen, indem man die durch den Bruch angezeigte Division so weit vollzieht, als im Quotienten nicht negative Potenzen von x auftreten.

Ist die in Rede stehende Gleichung in bezug auf y vom *zweiten* oder *höheren* Grade, so wird das durch sie definierte y als eine *irrationale Funktion* von x bezeichnet. Die Art der Irrationalität richtet sich nach der Höhe des Grades; wenn der Grad zwei, drei oder vier, so läßt sich y mit Hilfe von *Wurzelausziehungen* durch x darstellen; übersteigt der Grad die Zahl vier, so ist (von besonderen Fällen abgesehen) die Darstellung durch Wurzelgrößen *nicht möglich*.

Man kann hiernach die *algebraischen* Funktionen einer Variablen unterscheiden in rationale, ganze und gebrochene und in irrationale, durch Wurzelgrößen darstellbare und solche, welche die Darstellung durch Wurzelgrößen nicht zulassen.

Einige Beispiele mögen das Angeführte erläutern. Die Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

bestimmt y als rationale ganze Funktion von x des zweiten Grades:

$$y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2,$$

wobei $a_0 = -\frac{A}{2E}$, $a_1 = -\frac{D}{E}$, $a_2 = -\frac{F}{2E}$ ist. Dagegen ist durch die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

y zunächst als unecht gebrochene Funktion von x gegeben, nämlich

$$y = -\frac{Ax^2 + 2Dx + F}{2(Bx + E)},$$

welche sich in eine ganze und eine echt gebrochene zerlegen läßt:

$$y = a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{2(Bx + E)},$$

wobei

$$a_0 = -\frac{A}{2B}, \quad a_1 = \frac{AE - 2BD}{2B^2}, \quad a_2 = \frac{(2BD - AE)E - B^2F}{B^2}.$$

Die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

bestimmt y als zweideutige irrationale Funktion von x:

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm \sqrt{Lx^2 + 2Mx + N}}{C},$$

wo $L = B^2 - AC$, $M = BE - CD$, $N = E^2 - CF$; der eine Zweig faßt die mit dem oberen, der andere die mit dem unteren Vorzeichen der absolut genommenen Quadratwurzel gebildeten Werte von y zusammen.

II. Alle Funktionen, welche nicht unter das Bildungsgesetz der algebraischen fallen, faßt man unter der Bezeichnung *transzendenter Funktionen* zusammen.

Die einfachsten derselben, aus Begriffen und Vorstellungen der elementaren Mathematik hervorgegangen, werden als *elementare* transzendente Funktionen bezeichnet.

Zunächst ist es der Begriff der Potenz, welcher in der Verallgemeinerung, die ihm die Arithmetik für negative und gebrochene Exponenten gibt, zur Bildung transzendenter Funktionen führt.

Wenn man in der Gleichung $c = a^b$ die Basis a als variabel betrachtet, so ist hierdurch c als Funktion dieser Variablen definiert: $y = x^b$, und diese Funktion wird die *Potenz* genannt. Für ein rationales b fällt sie unter den Begriff der algebraischen Funktion, für ein irrationales b ist sie transzendent. Der Bereich von x muß, wenn b ein Bruch mit geradem Nenner oder irrational ist, auf das Intervall $(0, +\infty)$ beschränkt werden, damit jedem Werte von x ein reeller Wert von y zugeordnet sei.

Die Umkehrung der Potenz führt nicht zu einer neuen Funktion; denn aus $y = x^b$ folgt $x = y^{\frac{1}{b}}$ und $\frac{1}{b}$ ist mit b zugleich rational, beziehungsweise irrational.

Faßt man den Exponenten b als variabel auf, so ist c als transzendente Funktion dieser Veränderlichen definiert: $y = a^x$, welche den Namen *Exponentialfunktion* führt. Die Basis a muß *positiv* sein, soll *jedem* Werte von x ein reeller Wert von y zugeordnet sein; dort, wo mehrere reelle Werte von y vorhanden sind (wie dies geschieht, so oft x einem Bruch mit geradem Nenner gleich wird), soll jedesmal der positive verstanden sein; bei diesen Festsetzungen ist $y = a^x$ eine einwertige Funktion.

Aus der Umkehrung der Exponentialfunktion geht x als neue transzendente Funktion von y hervor, welche den Namen *Logarithmus* von y führt und durch $x = \log_a y$ dargestellt wird; a heißt die Basis des Logarithmus. Vermöge der bei $y = a^x$ gemachten Festsetzungen muß in der Definitionsgleichung $x = \log_a y$ a als positiv vorausgesetzt und y auf das Intervall $(0, +\infty)$ beschränkt werden.

In der Trigonometrie werden einem Winkel (in allgemeiner Auffassung, also durch eine *beliebige* Drehung des beweglichen Schenkels entstanden) die Verhältniszahlen je zweier von drei in bestimmter Weise konstruierten Strecken zugeordnet; faßt man in dieser Zuordnung das Bogenmaß x des Winkels als unabhängige Veränderliche, die Werte der genannten Verhältnisse als Funktionen auf, so kommt man zu den *trigonometrischen* Funktionen oder Kreisfunktionen

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x, \quad y = \sec x, \ldots;$$

wird hingegen jede der Verhältniszahlen als unabhängige Veränderliche und das Bogenmaß des Winkels als deren Funktion angesehen, so entstehen die *zyklometrischen* Funktionen oder die inversen Kreisfunktionen

$$x = \operatorname{Arcsin} y, \quad x = \operatorname{Arccos} y, \quad x = \operatorname{Arctg} y, \quad x = \operatorname{Arccotg} y, \ldots$$

als Umkehrungen der trigonometrischen.

Zwischen den eben vorgeführten Definitionen der elementaren transzendenten Funktionen, als: der Potenz mit irratio-

nalem Exponenten, der Exponential- und der logarithmischen Funktion, der trigonometrischen und zyklometrischen Funktionen, und den Definitionen der algebraischen Funktionen, besteht ein wesentlicher Unterschied: diese sind analytisch definiert worden, jene nicht; erst im weiteren Verlaufe unserer Betrachtungen werden sich auch für die Transzendenten analytische Definitionen ergeben.

14. Grenzwert der Variablen. Eine Variable x, deren Bereich unbegrenzt viele Zahlen umfaßt, hat den *Grenzwert* a oder *konvergiert* gegen a, wenn sie in *beständiger* Änderung begriffen schließlich Werte annimmt, deren Unterschied gegen a dem absoluten Werte nach *fortan* kleiner *bleibt* als eine beliebig klein festgesetzte positive Zahl ε, ohne jemals zu verschwinden.

Wie klein also auch ε gewählt wird, so ist und bleibt von einem gewissen Momente im Verlauf der Änderung des x

$$0 < |x - a| < \varepsilon;$$

man drückt diesen Sachverhalt in Kürze durch den Ansatz

$$\lim x = a$$

aus (limes = Grenze).

Besteht beispielsweise der Bereich der Variablen x aus den Zahlen einer Fundamentalreihe

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

und schreibt man der Variablen vor, der Reihe nach die Werte $a_0, a_1, a_2, \ldots$ anzunehmen, so ist die durch die Fundamentalreihe definierte Zahl ihr Grenzwert; hiernach ist der Grenzwert einer Variablen, welche die Fundamentalreihe

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \ldots$$

durchläuft, $= 1$; ebenso der Grenzwert einer Variablen, welche die Reihe der Werte

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots$$

zu durchlaufen hat, $= 1$.

Ist x eine *stetige* Variable und stellt man sich vor, daß sie bei der Konvergenz gegen den Grenzwert a *alle* Werte innerhalb eines übrigens beliebig engen Intervalls $(a - \delta,\ a)$

oder $(a, a+\delta)$ oder $(a-\delta, a+\delta)$ mit alleiniger Ausnahme von a selbst annimmt, so sagt man, x nähere sich dem Grenzwerte a auf *stetige* Weise.

Wenn x bei der Konvergenz gegen den Grenzwert a nur kleinere Werte als a annimmt, also zunehmend dem a sich nähert, so soll dies durch die Zeichen $\lim x = a - 0$ ausgedrückt werden; hingegen wird unter $\lim x = a + 0$ ein Grenzübergang zu verstehen sein, bei welchem x nur Werte über a annimmt, sich dem a also abnehmend nähert. Mit Rücksicht auf die geometrische Versinnlichung der reellen Zahlen kann auch von einer linksseitigen und einer rechtsseitigen Konvergenz gesprochen werden. Darf x Werte sowohl unter wie Werte über a annehmen, so wird dies durch $\lim x = a \mp 0$ oder kurz $\lim x = a$ angezeigt werden.

Ist der Bereich der (stetigen) Variablen x unbeschränkt, und nimmt sie in beständiger Änderung begriffen schließlich Werte an, welche dem absoluten Betrage nach fortan größer bleiben als eine beliebig groß festgesetzte positive Zahl K, so sagt man, die Variable konvergiere gegen den (uneigentlichen) Grenzwert ∞ (Unendlich). Wie groß also auch K ist, von einem gewissen Augenblicke im Verlaufe der Änderung des x ist und bleibt

$$|x| > K.$$

Behält dabei x, wenigstens von einem Momente an, das positive Vorzeichen, so wird dies durch $\lim x = +\infty$ ausgedrückt, und bleibt es von einem Momente an fortwährend negativ, so schreibt man $\lim x = -\infty$. Der Ansatz $\lim x = \infty$ soll gelten, wenn x während des Verlaufs seiner Änderung unaufhörlich das Vorzeichen wechseln kann.

15. Grenzwerte einer Funktion. Es sei $y = f(x)$ eine Funktion, welche für einen Bereich der *stetigen* Variablen x definiert ist, ausgenommen den Wert $x = a$. Läßt man x gegen a als Grenzwert konvergieren, so können die zugeordneten Werte y dabei derart verlaufen, daß schließlich der Unterschied von y gegen eine bestimmte Zahl b dem absoluten Werte nach kleiner *bleibt* als eine beliebig kleine festgesetzte positive Zahl ε. Man sagt dann, *y konvergiere* bei dem betreffenden Grenzübergange von *x gegen den Grenzwert b.*

Um die Erscheinungen, die hierbei auftreten können, näher ins Auge zu fassen, wollen wir den Grenzübergang des x genauer präzisieren.

Nähert sich x der Grenze a wachsend, so konvergiere y gegen den Grenzwert b; man schreibt dies in der Form

$$\lim_{\lim x = a - 0} y = b \quad \text{oder kürzer} \quad \lim_{x = a - 0} y = b$$

an; nähert sich x der Grenze a abnehmend, so konvergiere y gegen den Grenzwert b', in Zeichen:

$$\lim_{x = a + 0} y = b'.$$

Wenn nun $b \neq b'$, so sagt man, y besitze an der Stelle a zwei verschiedene Grenzwerte, einen links und einen andern rechts. Ist dagegen $b = b'$, so spricht man von einem Grenzwert an der Stelle a schlechtweg, schreibt dies wie folgt an

$$\lim_{x = a} y = b$$

und hat hiermit folgenden Sinn zu verbinden: Zu einem beliebig klein vorgeschriebenen positiven ε gibt es immer ein ebenfalls positives δ derart, daß $|y - b| < \varepsilon$ bleibt, sobald x in seiner Annäherung an die Grenze a so weit vorgeschritten ist, daß x fortan in dem Intervall $(a - \delta,\ a + \delta)$, also $|x - a| < \delta$ verbleibt.

Wenn der absolute Betrag von y, während x der Grenze a sich nähert, schließlich größer bleibt als eine beliebig groß festgesetzte positive Zahl K, so spricht man (im uneigentlichen Sinne) von einem unendlichen Grenzwert des y, der wieder $+\infty$, $-\infty$ oder unendlich von unbestimmtem Vorzeichen (∞) sein kann. Der Ansatz

$$\lim_{x = a - 0} y = +\infty$$

bringt also die Tatsache zum Ausdruck, daß bei wachsendem und der Grenze a unaufhörlich sich näherndem x dessen Funktion y schließlich fortan positiv bleibt und jeden noch so großen Betrag überschreitet. Der Ansatz

$$\lim_{x = a} y = -\infty$$

würde den Sinn haben, daß, von welcher Seite sich x der Grenze a auch nähert, y von einem Momente angefangen fortab negativ bleibt und dem Betrage nach über jede angebbare Zahl hinaus wächst.

Ist der Bereich der Variablen x unbeschränkt, so kann man sie in dem im vorigen Artikel erläuterten Sinne gegen eine der Grenzen $+\infty$, $-\infty$ konvergieren lassen; y kann dabei jede der Erscheinungen aufweisen, die bei der Konvergenz von x gegen einen endlichen Grenzwert a beobachtet worden sind. Insbesondere kann y sich dabei einer bestimmten Grenze b nähern und man wird dies in einer der Gleichungen

$$\lim_{x=+\infty} y = b \qquad \lim_{x=-\infty} y = b$$

zum Ausdruck bringen, während

$$\lim_{x=\infty} y = b$$

andeuten würde, daß b die Grenze von y ist, ob x positive oder negative Werte von beständig wachsendem Betrage annimmt.

Es ist jedoch möglich, daß y bei der Konvergenz des x gegen einen endlichen oder unendlichen Grenzwert weder einer bestimmten Grenze sich nähert, noch auch in der einen oder andern Weise ins Unendliche wächst; man sagt dann, es existiere kein Grenzwert für y oder er sei unbestimmt.

Zur Erläuterung mögen die folgenden *Beispiele* dienen.

1) Die Funktion $y = \frac{1}{x-a}$ ist an der Stelle $x = a$ nicht definiert*); wenn sich x dieser Stelle wachsend nähert, so nimmt der Betrag der beständig negativ bleibenden Funktion über jede angebbare Zahl hinaus zu; nähert sich x der Stelle a abnehmend, so bleibt die Funktion positiv und wächst über jeden Betrag hinaus, so daß

$$\lim_{x=a-0} \frac{1}{x-a} = -\infty, \qquad \lim_{x=a+0} \frac{1}{x-a} = +\infty.$$

*) Weil eine Division, deren Divisor Null ist, keinen Sinn hat.

2) Mit der Funktion $\frac{1}{(x-a)^2}$ verhält es sich ebenso, nur mit dem Unterschiede, daß sie bei dem Grenzübergange links wie rechts positiv bleibt, weshalb

$$\lim_{x=a} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty.$$

3) Die Exponentialfunktion $y = a^x$ $(a > 0)$ zeigt für $\lim x = -\infty$ und $\lim x = +\infty$ verschiedenes Verhalten, je nachdem $a < 1$ oder $a > 1$ ist, und zwar ist

$$\text{für } a < 1 \quad \lim_{x=-\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x=+\infty} a^x = 0;$$

$$\text{für } a > 1 \quad \lim_{x=-\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x=+\infty} a^x = +\infty.$$

4) Die logarithmische Funktion $y = \log_a x \, (a > 0)$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert; auf Grund von 3) findet man

$$\text{für } a < 1 \quad \lim_{x=+0} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x=+\infty} \log_a x = -\infty;$$

$$\text{für } a > 1 \quad \lim_{x=+0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x=+\infty} \log_a x = +\infty.$$

5) Die Funktion $y = a^{\frac{1}{x-\alpha}}$ $(a > 0)$ ist an der Stelle $x = \alpha$ nicht definiert; durch Zusammenhalten der Fälle 1) und 3) ergibt sich

$$\text{für } a < 1 \quad \lim_{x=\alpha-0} a^{\frac{1}{x-\alpha}} = +\infty, \quad \lim_{x=\alpha+0} a^{\frac{1}{x-\alpha}} = 0;$$

$$\text{für } a > 1 \quad \lim_{x=\alpha-0} a^{\frac{1}{x-\alpha}} = 0, \quad \lim_{x=\alpha+0} a^{\frac{1}{x-\alpha}} = +\infty;$$

dagegen wäre mit Rücksicht auf 2)

$$\text{für } a < 1 \quad \lim_{x=\alpha} a^{\frac{1}{(x-\alpha)^2}} = 0,$$

$$\text{für } a > 1 \quad \lim_{x=\alpha} a^{\frac{1}{(x-\alpha)^2}} = +\infty.$$

6) Für die Funktion $y = \sin x$ (und auch für die übrigen trigonometrischen Funktionen) existiert bei $\lim x = \pm\infty$ kein Grenzwert; denn bei *stetigem* Wachsen von x in der einen wie in der andern Richtung erleidet die Funktion unaufhörlich Zeichenwechsel und schwankt zwischen -1 und $+1$.

7) Die Funktion $y = \sin\frac{1}{x}$ ist für den Wert $x = 0$ nicht definiert; bei der Konvergenz von x gegen diese Stelle von der einen oder andern Seite existiert vermöge der Fälle 1) und 6) für sie kein Grenzwert.

16. Das Unendlichkleine und Unendlichgroße. Von einer Variablen x oder einer Funktion y derselben (bei einem gewissen Grenzübergange des x) sagt man, sie *werde unendlich klein* oder sei *ein Unendlichkleines,* wenn sie gegen die Grenze Null konvergiert.

Man sagt von x, beziehungsweise y, es *werde unendlich groß* oder sei *ein Unendlichgroßes,* wenn es sich der (uneigentlichen) Grenze ∞ (mit bestimmtem oder unbestimmtem Vorzeichen) nähert.

Unter einem Unendlichkleinen hat man sich also eine *Variable* im Zustande ihrer Konvergenz gegen den Grenzwert Null, unter einem Unendlichgroßen eine *Variable* im Zustande ihres unaufhörlichen numerischen Wachsens vorzustellen. Beide Begriffsbildungen beziehen sich auf einen Werdeprozeß, der sich im Endlichen abspielt.

Es seien y, y_1 zwei Funktionen von x, welche bei einem näher qualifizierten Grenzübergange $\lim x = a$ zugleich unendlich klein werden. Dasselbe gilt dann von ihrer Summe, ihrer Differenz und ihrem Produkt; von dem letzteren läßt sich aussagen, daß es *rascher* gegen Null konvergiert als die einzelnen Faktoren, indem von einem gewissen Momente der Konvergenz angefangen der zu einem Werte von x gehörige Wert von yy_1 dem absoluten Betrage nach beständig kleiner sein wird als die zu dem gleichen Werte des x gehörigen Beträge von y und y_1; es kann hiernach in bezug auf yy_1 einerseits und y, y_1 andererseits von einem verschiedenen Grade des Unendlichkleinwerdens gesprochen werden.

Zu bestimmteren Vorstellungen hierüber führt die Betrachtung des Quotienten $\frac{y}{y_1}$; derselbe kann bei einem Grenzübergange $x = a$, bei welchem $\lim y = 0$ und $\lim y_1 = 0$, sich einer bestimmten von Null verschiedenen Grenze b oder der Grenze 0 oder der Grenze ∞ nähern oder ein unbestimmtes Verhalten zeigen.

In dem ersten der aufgezählten Fälle, wo also $\lim \frac{y}{y_1} = b$ und $b \neq 0$ ist, sagt man, y und y_1 seien unendlich kleine Größen *gleicher Ordnung.*

In dem zweiten Falle, wo $\lim \frac{y}{y_1} = 0$, ist $\frac{y}{y_1}$ selbst ein Unendlichkleines, läßt sich also y als Produkt von zwei unendlich kleinen Größen darstellen, deren eine y_1 ist; y konvergiert daher zufolge einer oben gemachten Bemerkung rascher gegen Null als y_1, und man drückt dies dadurch aus, daß man y als ein Unendlichkleines *höherer Ordnung* im Vergleich zu y_1 bezeichnet.

In dem dritten Falle, wo $\lim \frac{y}{y_1} = \infty$, ist $\lim \frac{y_1}{y} = 0$, also y_1 von höherer Ordnung in bezug auf y, dieses daher von *niederer Ordnung* in bezug auf y_1.

In dem letzten Falle ist eine Beurteilung der Ordnung ausgeschlossen.

Wenn y, y_1 unendlich kleine Größen ungleicher Ordnung sind, so läßt sich in vielen Fällen eine positive Zahl n derart bestimmen, daß der Quotient $\frac{y}{y_1^n}$ gegen eine bestimmte von Null verschiedene Grenze b konvergiert, so daß y und y_1^n als unendlich kleine Größen gleicher Ordnung zu bezeichnen wären; dann präzisiert man die Ordnung näher und bezeichnet y als *von der Ordnung n in bezug auf* y_1, oder schlechtweg von der Ordnung n, wenn man übereingekommen ist, y_1 als ein Unendlichkleines der *ersten Ordnung* aufzufassen. Da $\frac{y}{y_1^n} - b$ bei dem Grenzübergange $\lim x = a$ gegen Null konvergiert, so ist es selbst ein Unendlichkleines und möge mit η bezeichnet werden; aus dem Ansatze $\frac{y}{y_1^n} - b = \eta$ folgt dann $y = by_1^n + \eta y_1^n$; das Produkt ηy_1^n ist selbst wieder unendlich klein, und zwar höherer als der n-ten Ordnung; wird es durch ε bezeichnet, so hat man in

$$y = by_1^n + \varepsilon$$

den allgemeinen Ausdruck für ein Unendlichkleines, das in bezug auf y_1 von der n-ten Ordnung ist; dabei bedeutet b eine von Null verschiedene bestimmte Zahl und ε ein Unend-

lichkleines von höherer als der n-ten Ordnung. Das Glied by_1^n nennt man den *Hauptteil*, ε den sekundären Teil von y.

Betrachtet man neben y eine zweite unendlich kleine Größe Y der n-ten Ordnung, so hat sie den Ausdruck

$$Y = By_1^n + E,$$

und der Quotient $\frac{y}{Y}$ konvergiert für $\lim x = a$, da $\frac{\varepsilon}{y_1^n}$ und $\frac{E}{y_1^n}$ hierbei unendlich klein werden, gegen den Grenzwert $\frac{b}{B}$; denn

$$\lim \frac{y}{Y} = \lim \frac{b + \frac{\varepsilon}{y_1^n}}{B + \frac{E}{y_1^n}} = \frac{b}{B}.$$

Hiernach ist der Grenzwert des Quotienten zweier unendlich kleinen Größen derselben Ordnung gleich dem Quotienten ihrer Hauptteile.

Sind y, y_1 Funktionen von x, welche bei einem näher bestimmten Grenzübergange des x unendlich groß werden, so werden die Funktionen $\frac{1}{y}, \frac{1}{y_1}$ bei demselben Grenzübergange unendlich klein, und es ist $\frac{1}{y}$ in bezug auf $\frac{1}{y_1}$ von der Ordnung n, wenn

$$\lim \frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{y_1}\right)^n} = b$$

und $b \neq 0$; es ist aber

$$\frac{\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{y_1}\right)^n} = \frac{y_1^n}{y},$$

folglich

$$\lim \frac{y}{y_1^n} = \frac{1}{b}$$

und $\frac{1}{b} \neq 0$; man bezeichnet dann während des Grenzüberganges y als unendlich groß von der Ordnung n in bezug auf y_1. Es gilt also für die Beurteilung der Ordnung unendlich groß werdender Variablen dieselbe Regel wie bei unendlich klein werdenden Variablen.

Folgende *Beispiele* mögen dies erläutern.

1) Die Funktionen $y = \sqrt{x + x^2} - \sqrt{x}$ und $y_1 = x\sqrt{x}$ werden für $\lim x = +0$ unendlich klein, und zwar von gleicher Ordnung; man kann nämlich den Quotienten $\frac{y}{y_1}$, da $x = 0$ ausgeschlossen ist, wie folgt transformieren:

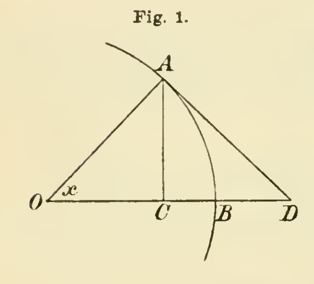
$$\frac{\sqrt{x + x^2} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x\sqrt{x}(\sqrt{x + x^2} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1}$$

und erkennt nun, daß

$$\lim_{x = +0} \frac{y}{y_1} = \frac{1}{2}.$$

2) Die Funktionen $y = \sin x$ und $y_1 = x$ werden für $\lim x = 0$ unendlich klein von gleicher Ordnung. Denn aus Fig. 1, in welcher der Kreisbogen aus O mit dem Halbmesser 1 beschrieben ist, folgt die Ungleichheit

Fig. 1.



$$\triangle OCA < \text{Sektor } OBA < \triangle ODA,$$

die immer besteht, wenn nur der Winkel x spitz ist; arithmetisch ausgedrückt heißt dies, daß

$$\sin x \cos x < x < \operatorname{tg} x,$$

also auch

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

und

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x;$$

nun kann x so klein gewählt werden, daß der Unterschied $\frac{1}{\cos x} - \cos x$ kleiner wird als eine beliebig klein festgesetzte Zahl; um so mehr gilt dies dann für $\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{x}$; da nun $\cos x$ mit abnehmendem x sich der Grenze 1 nähert, so ist, wie auch x gegen Null konvergiert,

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß x im Bogenmaß ausgedrückt sei; wäre es in Graden gemessen, so hätte man

$$\lim \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

Schon bei 3^0 und Anwendung von Bogenmaß ist $\frac{\sin x}{x}$ $= 0{,}9995427$ von 1 wenig verschieden, und bei $10'$ bereits $= 0{,}9999940$.

3) Die Funktionen $y = 1 - \cos x$ und $y_1 = x$ werden unendlich klein für $\lim x = 0$; die erste aber ist von der zweiten Ordnung in bezug auf die zweite, denn (bei Ausschluß von $x = 0$) ist

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2,$$

daher zufolge 2)

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4) Die Funktionen $y = \operatorname{tg} x - \sin x$ und $y_1 = x$ werden für $\lim x = 0$ unendlich klein, die erste aber von der dritten Ordnung in bezug auf die zweite, weil bei Ausschluß von $x = 0$

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

und somit auf Grund von 2) und 3)

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

17. Definition und analytische Merkmale stetiger Funktionen. Von einer Variablen x, deren Bereich das *Kontinuum* der reellen Zahlen zwischen α und β ist, sagt man, sie durchlaufe dieses Kontinuum oder das Intervall (α, β) *stetig*, wenn sie jeden Wert aus dem Intervall und jeden nur einmal annimmt; sie kann dabei mit dem Werte α oder mit β beginnen, das Intervall also in zwei entgegengesetzten *Richtungen* durchlaufen. Wir nehmen, wo nichts anderes bemerkt wird, an, daß x mit dem algebraisch kleinsten Werte beginnt und allmählich bis zum algebraisch größten fortschreitet; es entspreche dies der Ordnung α, β.

Nun sei $y = f(x)$ eine in dem Intervall (α, β), mit Einschluß von α und β, definierte einwertige Funktion. Wenn der Bereich von y ebenfalls ein Kontinuum (A, B) ist und von y stetig durchlaufen wird, während x das Kontinuum (α, β) stetig durchläuft, so heißt y eine in dem Intervall (α, β) *monotone*

Funktion, und zwar eine wachsende oder abnehmende, je nachdem $A < B$ oder $A > B$. Ordnet man jedem Paar zusammengehöriger Werte von x und y einen Punkt M der Ebene zu, nachdem in derselben ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem angenommen worden, so ergibt sich als einfachstes *Bild* der wachsenden Funktion ein von links nach rechts steigender *Kurvenbogen* (Fig. 2), als Bild einer abnehmenden Funktion ein in derselben Richtung fallender Kurvenbogen (Fig. 3).

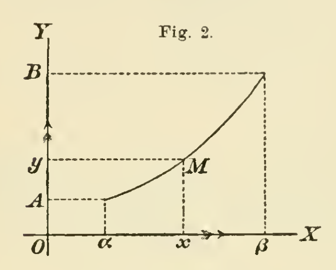


Fig. 2.

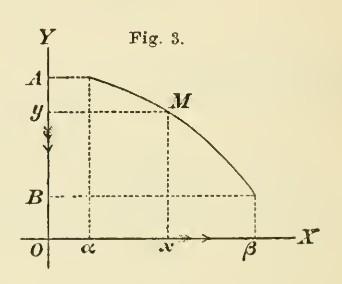


Fig. 3.

Besteht der Bereich von y aus mehreren Kontinuen, welche sich derart aneinanderreihen, daß der Anfangswert jedes folgenden zugleich Endwert des vorhergehenden ist, und die von y in *abwechselnder* Richtung durchlaufen werden, so ist y eine abwechselnd wachsende und abnehmende Funktion und ihr einfachstes Bild wird sich aus einem zusammenhängenden System von Kurvenbögen der Formen Fig. 2 und Fig. 3 zusammensetzen, wie etwa in Fig. 4, welche einer Funktion entspricht, die der Reihe nach die Kontinua (A, K), (K, L), (L, B) durchläuft, während x von α bis β stetig sich verändert.

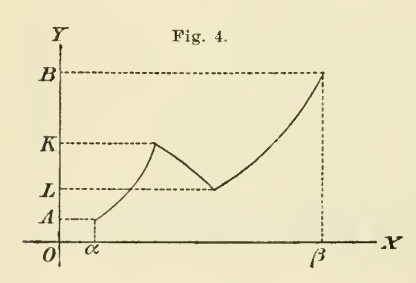


Fig. 4.

Funktionen von der beschriebenen Art bezeichnet man als in dem Intervalle (α, β) stetige oder kontinuierliche Funktionen.

Von den Eigenschaften stetiger Funktionen mögen einige vorgeführt werden, die bei analytischen Untersuchungen häufige Verwendung finden.

1) *Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall (α, β) stetig ist, so läßt sich zu einem beliebig klein festgesetzten positiven ε an jeder Stelle $x = a$ innerhalb des Intervalls ein hinreichend kleines positives η festsetzen derart, daß für jedes x' aus dem Intervall $(a - \eta, a + \eta)$ die Beziehung besteht*

$$|f(x') - f(a)| < \varepsilon.$$

Der Wert $f(a)$ gehöre dem Kontinuum (A, B) an; ε sei klein genug festgesetzt, daß auch $f(a) - \varepsilon$ und $f(a) + \varepsilon$ dem Kontinuum angehören; diesen Funktionswerten entsprechen Werte der Variablen aus dem Intervall (α, β), die sich in der Form $a - h$, $a + h'$ oder $a + h$, $a - h'$ darstellen lassen, je nachdem die Funktion in dem Kontinuum (A, B) wachsend oder abnehmend ist; ist h die kleinere der beiden positiven Zahlen h, h', so genügt jedes η, das zwischen 0 und h liegt, der obigen Forderung.

An den Endstellen $x = \alpha$, $x = \beta$ ist nur zu einer Seite ein Intervall von der gedachten Eigenschaft feststellbar $(\alpha, \alpha + \eta)$ links, $(\beta - \eta, \beta)$ rechts.

Diese Eigenschaft der stetigen Funktion wird als „Stetigkeit an der Stelle $x = a$“ bezeichnet und häufig zum Ausgangspunkt für die analytische Definition der Stetigkeit genommen, indem man erklärt, eine Funktion, welche an *jeder Stelle* des Intervalls (α, β) die erwähnte Eigenschaft besitzt, sei stetig in dem *ganzen Intervall*.

Bezeichnet x'' einen zweiten Wert von x aus dem Intervall $(a - \eta, a + \eta)$, so ist neben

$$|f(x') - f(a)| < \varepsilon$$

auch

$$|f(x'') - f(a)| < \varepsilon,$$

somit

$$|f(x'') - f(x')| < 2\varepsilon;$$

es ist also eine Folge der Stetigkeit, daß sich zu jeder Stelle a des Intervalls (α, β) eine hinreichend enge *Umgebung* $(a - \eta, a + \eta)$ bestimmen läßt derart, daß irgend zwei Funktionswerte aus dieser Umgebung eine Differenz geben, deren Betrag unter einer beliebig klein festgesetzten positiven Zahl 2ε liegt. Dieses Verhalten pflegt man auch so auszudrücken, daß bei einer stetigen Funktion an jeder Stelle zu

einer unendlich kleinen Änderung der Variablen eine unendlich kleine Änderung der Funktion gehöre.

Man kann die Eigenschaft 1) auch dahin aussprechen, es sei für jedes a aus (α, β) $f(a)$ der Grenzwert, gegen welchen die Funktion $f(x)$ bei dem stetigen Grenzübergange $\lim x = a \mp 0$ konvergiert*).

Als *Beispiel* einer Stetigkeitsprüfung diene die Funktion $f(x) = x^m$, die Potenz mit *ganzem positiven* Exponenten m.

Hier ist
$$f(x') - f(a) = x'^m - a^m,$$
und wenn $x' = a + h$ gesetzt wird,
$$f(a+h) - f(a) = h\left[m a^{m-1} + \binom{m}{2} a^{m-2} h + \binom{m}{3} a^{m-3} h^2 + \cdots + h^{m-1}\right];$$
ist μ der größte unter den absoluten Werten der Koeffizienten der Potenzen von h in der Klammer und H der absolute Wert von h, so besteht die Ungleichung:
$$|f(a+h) - f(a)| < \mu H(1 + H + \cdots + H^{m-1}) = \mu H \frac{1 - H^m}{1 - H},$$
und wenn H ein echter Bruch, so gilt um so mehr:
$$|f(a+h) - f(a)| < \frac{\mu H}{1 - H}.$$
Ist nun ε eine beliebig klein festgesetzte Zahl und wird H so festgelegt, daß
$$\frac{\mu H}{1 - H} < \varepsilon,$$
so ist auch
$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon.$$
Aus der vorangehenden Ungleichung ergibt sich aber
$$H < \frac{\varepsilon}{\mu + \varepsilon}.$$
Wird also der absolute Wert von h gleich oder kleiner genommen als $\frac{\varepsilon}{\mu + \varepsilon}$, so ist
$$|f(x') - f(a)| < \varepsilon$$
für jedes x' aus dem Intervall $(a - h, a + h)$.

---

*) Ansätze von der Form
$$\lim_{x=a} f(x) = f(a) \quad \text{oder} \quad \lim_{h=0} f(x + h) = f(x),$$
die auf den ersten Blick selbstverständlich scheinen, sind nur dann legal, wenn die Funktion $f(x)$ in der Umgebung von a, beziehungsweise x, stetig ist.

Damit ist die Stetigkeit von x^m an der *beliebigen* Stelle a, also die durchgehende Stetigkeit dieser Funktion erwiesen. Es folgt daraus auch die Stetigkeit jeder ganzen Funktion von x.

Zu beachten ist, daß die obere Grenze von H abhängt von ε und a.

2) *Wenn die Funktion $f(x)$ stetig ist in dem Intervall (α, β), so läßt sich zu einem beliebig klein festgesetzten positiven ε ein hinreichend kleines positives η bestimmen derart, daß für jede zwei Werte x, x' aus (α, β), für welche $|x - x'| < \eta$, die Beziehung besteht*

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Es werde zunächst vorausgesetzt, die Funktion sei monoton, z. B. wachsend, und (A, B) ihr Bereich. Man teile denselben in so viele gleiche Teile, daß jeder Teil kleiner ist als $\frac{\varepsilon}{2}$; die Anzahl der Teile sei n, so daß $\frac{B-A}{n} = k < \frac{\varepsilon}{2}$. Zu den Funktionswerten

$$f(\alpha), \quad f(\alpha) + k, \quad f(\alpha) + 2k, \ldots f(\alpha) + \overline{n-1}k, \quad f(\beta)$$

sollen der Reihe nach die (ebenfalls steigend geordneten) Werte

$$x_0 = \alpha \qquad x_1, \qquad x_2, \qquad \ldots \qquad x_{n-1}, \qquad x_n = \beta$$

der Variablen x gehören; je zwei benachbarte dieser Werte bestimmen ein Intervall und das *kleinste* unter diesen n Intervallen sei gleich h; dann genügt jedes η, das zwischen 0 und h liegt und $\eta = h$ selbst der obigen Forderung. Denn nimmt man irgend zwei Werte x, x' an, für welche $|x - x'| \leqq h$, so fallen sie entweder in ein und dasselbe Teilintervall (x_i, x_{i+1}) oder in zwei benachbarte (x_{i-1}, x_i) und (x_i, x_{i+1}); im ersten Falle ist

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2};$$

im zweiten Falle

$$|f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x') - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

daher

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon;$$

in jedem Falle ist also $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, sobald $|x - x'| \leqq h$.

Ist die Funktion abwechselnd wachsend und abnehmend, so führe man die beschriebene Operation für jeden ihrer monotonen Abschnitte aus; das kleinste unter den gefundenen h genügt für den ganzen Verlauf der gestellten Forderung.

Man bezeichnet diese Eigenschaft gewöhnlich als „gleichmäßige Stetigkeit“; wie die vorstehende Betrachtung zeigt, ist sie eine notwendige Folge der Stetigkeit in dem Intervall (α, β).

Als *Beispiel* einer Funktion, bei der sich unmittelbar die gleichmäßige Stetigkeit erweisen läßt, betrachten wir $f(x) = \sin x$. Es ist

$$f(x) - f(x') = \sin x - \sin x' = 2 \cos \frac{x + x'}{2} \sin \frac{x - x'}{2};$$

da nun 1 der größte absolute Wert des Kosinus ist und der Sinus, wie klein auch der Bogen, immer kleiner bleibt als dieser, so hat man im vorliegenden Falle:

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|;$$

wählt man also $|x - x'| < \varepsilon$, so ist auch, und zwar im *ganzen* Verlaufe der Funktion,

$$|\sin x - \sin x'| < \varepsilon,$$

und dadurch ist die gleichmäßige Stetigkeit dargetan.

3) *Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall (α, β) stetig ist und an den Endstellen desselben verschiedene Werte besitzt, so gibt es zu jeder Zahl M zwischen $f(\alpha) = A$ und $f(\beta) = B$ mindestens eine Stelle x in (α, β) derart, daß*

$$f(x) = M.$$

Ist zunächst die Funktion monoton, so ist (A, B) ihr Bereich und sie nimmt jeden Wert aus (A, B) und jeden nur einmal an, folglich auch den Wert M, der nach Voraussetzung zwischen A und B liegt; zu ihm gehört ein Wert x aus (α, β), und es ist in der Tat einmal $f(x) = M$.

Wechseln dagegen Wachstum und Abnahme miteinander ab, und durchläuft die Funktion der Reihe nach die Kontinua (A, C), (C, D), ... (K, B), so muß M mindestens in *einem* derselben vorkommen; denn ist $A < B$ und wären die Werte aus allen Kontinuen unter M, so könnte der über M liegende Wert B nicht erreicht werden; wären die Werte aus den

Kontinuen durchwegs über M, so käme der unter M liegende Wert A nicht zustande; ähnliche Erwägungen gelten für $A > B$. Kommt aber der Wert M in einem der Kontinuen vor, so nimmt die Funktion ihn auch für einen bestimmten Wert der Variablen aus (α, β) an, so daß auch jetzt, und zwar mindestens einmal, die Gleichung $f(x) = M$ stattfindet.

4) *Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall (α, β) stetig ist und ihre Endwerte $f(\alpha) = A$, $f(\beta) = B$ ungleich bezeichnet sind, so gibt es wenigstens einen Wert x zwischen α und β, für welchen die Gleichung besteht:*

$$f(x) = 0.$$

Dieser Satz ist eine Folge des vorangehenden; denn $f(x)$ nimmt jeden Wert zwischen A und B mindestens an einer Stelle des Intervalls (α, β) an, hier also auch den Wert Null, weil er dem Kontinuum (A, B) angehört.

18. Verschiedene Arten der Unstetigkeit (Diskontinuität). Wenn die Definition einer (analytischen) Funktion $f(x)$ für *einzelne* Werte der stetigen Variablen x, deren Intervall (α, β) sei, ihre Bedeutung verliert, so kann die Funktion in der *Umgebung* einer solchen Stelle verschiedenes Verhalten zeigen.

Es sei $x = a$ eine solche Stelle, welche entweder zwischen α und β liegt oder mit einem dieser Endwerte zusammenfällt.

1) Ist a innerhalb des Intervalls gelegen und

$$\lim_{x=a-0} f(x) = \lim_{x=a+0} f(x) = b,$$

d. h. konvergiert $f(x)$ zu beiden Seiten von a gegen eine und dieselbe bestimmte Grenze b, so kann man die Definition der Funktion, die an der Stelle a eine Lücke aufweist, vervollständigen, indem man dieser Stelle jenen Grenzwert zuweist, also $f(a) = b$ setzt; die Funktion verhält sich dann in der Umgebung von a wie eine *stetige* Funktion.

Eine ähnliche Bestimmung kann getroffen werden, wenn a mit α oder β $(\alpha < \beta)$ zusammenfällt und $f(x)$ für $\lim x = \alpha + 0$, beziehungsweise für $\lim x = \beta - 0$ gegen eine bestimmte Grenze konvergiert.

2) Wenn jedoch $\alpha < a < \beta$ und

$$\lim_{x=a-0} f(x) = b, \qquad \lim_{x=a+0} f(x) = b'$$

und $b \neq b'$, so heißt die Funktion an der Stelle a *unstetig* oder *diskontinuierlich*, und man sagt von ihr, sie springe von b auf b' über. Es läßt sich jetzt keine Umgebung von a konstruieren derart, daß für zwei *beliebige* Werte x', x'' aus derselben $|f(x') - f(x'')|$ beliebig klein würde.

3) Wenn für den innerhalb (α, β) befindlichen Wert a bei dem einen oder dem andern der Grenzübergänge $\lim x = a - 0$ und $\lim x = a + 0$ ein bestimmter Grenzwert b, bei dem andern der Grenzwert ∞ (mit bestimmtem oder unbestimmtem Vorzeichen) zustande kommt, so verhält sich die Funktion auf der erstgedachten Seite von a wie eine *stetige* Funktion; wäre z. B. $\lim\limits_{x=a-0} f(x) = b$, so kann $f(x)$ in dem Intervall (α, a) als stetige Funktion angesehen werden, sofern man $f(a) = b$ setzt. Man sagt, sie sei im Punkte a, und zwar zu einer Seite desselben, *unstetig*.

4) Wenn für den innerhalb (α, β) liegenden Wert a bei den beiden Grenzübergängen $a - 0$ und $a + 0$ für $f(x)$ der Grenzwert ∞ zustande kommt, so heißt $f(x)$ in a, und zwar zu beiden Seiten, *unstetig*.

In den Fällen 3) und 4) wird $x = a$ ein *Unendlichkeitspunkt* der Funktion genannt.

5) *Unstetig* heißt $f(x)$ ferner an einer Stelle a, wenn bei einem der Grenzübergänge $a - 0$ und $a + 0$ oder bei beiden $f(x)$ keiner Grenze zustrebt, und es kann auch hier von einseitiger oder beiderseitiger Unstetigkeit gesprochen werden.

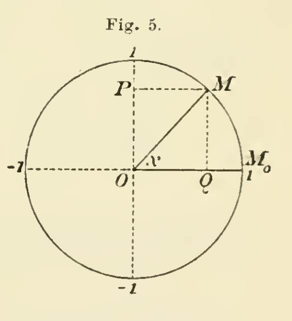
Einen Wert $x = a$, für welchen eine Funktion $f(x)$ eine der hier erörterten Eigenschaften aufweist, nennt man einen *singulären* Punkt und, von dem Falle 1) abgesehen, auch einen *Unstetigkeitspunkt*. Bei den analytischen Untersuchungen müssen solche Punkte von der Betrachtung zumeist ausgeschlossen werden; man denkt sich dies dadurch erzielt, daß aus dem Intervall (α, β) eine beliebig enge endliche Umgebung des Unstetigkeitspunktes ausgeschieden wird.

Sind $f(x)$, $g(x)$ zwei in dem Intervall (α, β) stetige Funktionen, so sind auch die Funktionen $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ und $f(x)\,g(x)$ in demselben Intervall stetig, wie sich mit Hilfe der unter 17 2) angegebenen analytischen Definition der Stetigkeit ohne Mühe und nicht bloß für zwei, sondern für jede endliche Anzahl von Funktionen erweisen läßt. Von der Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ gilt dies jedoch nur dann, wenn im ganzen Intervall (α, β) $|g(x)| > 0$ ist; wird dagegen an einer oder an mehreren Stellen $g(x) = 0$, so ist an diesen die Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ nicht definiert und muß ihr Verhalten in der Umgebung solcher Stellen näher untersucht werden.

19. *Beispiele.* Zur Erläuterung der Betrachtungen über die Stetigkeit oder Unstetigkeit der Funktionen mögen die folgenden Beispiele dienen.

1) Die Funktion $y = \sin x$ ist durchaus stetig; denn während (Fig. 5, wo der Kreis mit dem Halbmesser = Längeneinheit beschrieben ist) der Punkt M den Kreis von M_0 aus stetig durchläuft, die Variable x also das Kontinuum $(0, 2\pi)$ beschreibt, durchläuft der Punkt P oder der Wert von y die Kontinua $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 0)$. Wegen der Periodizität zeigt die Funktion dasselbe Verhalten auf dem ganzen Bereich der unbeschränkten Variablen x. (Den analytischen Nachweis der gleichmäßigen Stetigkeit vgl. 17 2.)

Fig. 5.



Dasselbe gilt von der Funktion $y = \cos x$, welche die Kontinua $(1, -1)$, $(-1, 1)$ beschreibt, während x das Intervall $(0, 2\pi)$ stetig durchläuft.

Die übrigen trigonometrischen Funktionen

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

da sie sich aus den vorgenannten mittels der Division bilden lassen, sind überall dort nicht definiert, wo der jeweilige Nenner Null wird, und besitzen daselbst Unendlichkeitspunkte von der

unter 18 4) beschriebenen Art. So ist $\operatorname{tg} x$ an den Stellen $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ nicht definiert (n kann jede positive und negative ganze Zahl mit Einschluß der Null bedeuten), und es ist beispielsweise

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty, \qquad \lim_{x=\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

2) Die Funktion $y = \frac{\sin x}{x}$ setzt sich aus zwei durchaus stetigen Funktionen durch Division zusammen, ist daher auch durchgehends stetig mit vorläufigem Ausschluß der Stelle $x = 0$, an welcher sie nicht definiert ist; da jedoch $\lim_{x=-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x=+0} \frac{\sin x}{x} = 1$, so kann auch diese Stelle in den Stetigkeitsbereich einbezogen werden, wenn man der Funktion an der Stelle 0 den Wert 1 beilegt.

3) Die Funktion $y = \frac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}$ $(a > 0)$ ist für alle Werte definiert und stetig, ausgenommen den Wert $x = 0$; nun ist nach 15 5)

$$\text{für } a < 1 \qquad \lim_{x=-0} y = 0, \qquad \lim_{x=+0} y = 1,$$

$$\text{für } a > 1 \qquad \lim_{x=-0} y = 1, \qquad \lim_{x=+0} y = 0;$$

in beiden Fällen weist also die Funktion an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeit von der in 18 2) beschriebenen Art auf.

4) Zufolge 15 5) ist für die Funktion $y = a^{\frac{1}{x-\alpha}}$ $(a > 0)$ der Punkt $x = \alpha$ ein Unstetigkeitspunkt von der Art 18 3), für die Funktion $y = a^{\frac{1}{(x-\alpha)^2}}$ derselbe Punkt ein Unstetigkeitspunkt von der Art 18 4).

5) Auf Grund von 15 7) besitzt die Funktion $y = \sin\frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 0$ eine Unstetigkeit von der Art 18 5). Die Unstetigkeit äußert sich hier darin, daß man in *beliebiger* Nähe von Null Wertepaare von x angeben kann derart, daß der Unterschied der zugehörigen Werte von y den absoluten

Betrag 2 hat, daß sich daher zu einem beliebig klein festgesetzten positiven (jedenfalls unter 2 liegenden) ε keine genügend kleine Umgebung von Null feststellen läßt, innerhalb deren für jedes Wertepaar x', x'' die Beziehung $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ stattfände. Denn bildet man mit den (positiven oder negativen) ganzen Zahlen n', n'' die Werte $x' = \frac{2}{(4n'+1)\pi}$ und $x'' = \frac{2}{(4n''+3)\pi}$, so können dieselben durch entsprechende Wahl von n', n'' der Null beliebig genähert werden; und doch ist

$$y' - y'' = \sin(4n'+1)\frac{\pi}{2} - \sin(4n''+3)\frac{\pi}{2} = 1 - (-1) = 2.$$

Zweiter Abschnitt.

Differentiation von Funktionen einer Variablen.

§ 1. Der Differentialquotient und das Differential.

20. Begriff des Differentialquotienten. Bei der Feststellung des Verlaufes einer gegebenen Funktion ist eine der ersten Fragen auf die Änderung gerichtet, welche der Wert der Funktion bei einer Änderung des Wertes der Variablen erfährt.

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervalle (α, β) gegebene *stetige* Funktion der (stetigen) Variablen x; unter x sei zunächst ein Wert innerhalb des Bereichs (α, β) verstanden. Bei dem Übergange von x zu $x+h$, welch letzterer Wert ebenfalls dem Bereich angehört, oder bei der Änderung

$$\Delta x = h$$

der Variablen geht der Wert der Funktion von $f(x)$ in $f(x+h)$ über und erfährt die Änderung

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Die *Stärke der Änderung der Funktion* bei dem beschriebenen Übergange wird um so größer sein, je größer bei einem festgesetzten Δx das $\Delta f(x)$ ausfällt, und je kleiner bei einem festgesetzten $\Delta f(x)$ das zugehörige Δx sich ergibt; ein Maß für dieselbe wird daher in dem Quotienten

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

zu erblicken sein. Da die Größen Δx, $\Delta f(x)$ Differenzen zweier Werte der Variablen und der zugehörigen Werte der Funktion sind, nennt man sie auch *Differenz der Variablen*, beziehungsweise *Differenz der Funktion* und den Quotienten (1) den *Differenzenquotienten* der Funktion.

Der Differenzenquotient erfordert zu seiner Bildung zwei Stellen aus dem Bereich der Funktion; läßt man die zweite Stelle $x + h$ unaufhörlich der ersten, h also dem Grenzwerte Null sich nähern, so nähert sich vermöge der Stetigkeit von $f(x)$ auch der Zähler der Grenze Null; man hat es dann mit dem Quotienten zweier unendlich klein werdenden Größen zu tun, welcher je nach der Ordnung dieser Größen entweder einer bestimmten von Null verschiedenen Grenze, oder der Grenze 0, oder der Grenze ∞ (mit bestimmtem oder unbestimmtem Vorzeichen) zustrebt oder auch unbestimmt bleibt. In den drei erstgedachten Fällen, wo ein Grenzwert (im weitesten Sinne des Wortes) existiert, nennt man diesen Grenzwert den *Differentialquotienten*, die *Ableitung* oder die *Derivierte* der Funktion $f(x)$ an der Stelle x; er ist ein Maß für die *Stärke der Änderung der Funktion an dieser Stelle.*

Es sind jedoch drei verschiedene Arten des Grenzüberganges von h zu unterscheiden, nämlich

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \lim h = +0 \\ &\text{II.} \quad \lim h = -0 \\ &\text{III.} \quad \lim h = \mp 0. \end{aligned}$$

Der Grenzwert, der bei dem Grenzübergange I. zustande kommt, wird der *rechte* Differentialquotient genannt; sein Wert sei X'; der aus dem Grenzübergange II. resultierende heißt der *linke* Differentialquotient; sein Wert sei X''. Ist nun $X' \neq X''$, so müssen diese beiden Differentialquotienten wohl voneinander unterschieden werden und ist der Grenzübergang III. illusorisch. Dieser Fall gehört jedoch zu den Ausnahmen; die Regel ist vielmehr, daß $X' = X''$; dann aber brauchen die beiden Grenzübergänge I. und II. nicht voneinander unterschieden zu werden; an ihre Stelle tritt der Grenzübergang III. und der durch denselben gewonnene Grenzwert X soll *vollständiger oder eigentlicher Differentialquotient* oder Differentialquotient schlechtweg genannt werden.

In der Folge wird also, wenn von dem Differentialquotienten einer Funktion an einer Stelle ihres Bereiches gesprochen wird, immer der durch den Grenzübergang III. gewonnene, also

(2) $$\lim_{h=\pm 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

gemeint sein.

Hiernach ist unter dem Differentialquotienten einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x der Grenzwert zu verstehen, gegen welchen der an dieser Stelle gebildete Differenzenquotient konvergiert, wenn die Änderung h der Variablen durch positive wie durch negative Werte der Grenze Null sich nähert.

Ist der Bereich der Variablen ein beschränkter, also ein endliches Intervall (α, β), so kann an den Enden des Intervalls selbstverständlich nur von einseitigen Differentialquotienten die Rede sein, und zwar kann, wenn $\alpha < \beta$, für $x = \alpha$ nur der Grenzübergang I., für $x = \beta$ der Grenzübergang II. zur Anwendung kommen.

Es ist oben bemerkt worden, der Differentialquotient an einer Stelle x sei ein Maß für die Stärke der Änderung der Funktion daselbst; diese Ausdrucksweise wird erst dann völlig verständlich, wenn eine *Einheit* für das Maß gefunden ist; diese Einheit ist die Stärke der Änderung der Variablen selbst. Ist nämlich $f(x) = x$, so ist der Differenzenquotient $\frac{x+h-x}{h} = 1$ und folglich auch der Differentialquotient von x an jeder Stelle x gleich 1. An einer Stelle also, wo der Differentialquotient von $f(x)$ größer ist als die Einheit, ändert sich die Funktion stärker als die Variable, an einer Stelle, wo er kleiner als 1 ist, ändert sie sich schwächer als die Variable; dabei kommt zunächst nur der absolute Wert des Differentialquotienten in Betracht.

21. Wenn für die Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x des Bereiches (α, β) der Grenzwert (2) vorhanden ist, mit andern Worten, wenn sie an jeder Stelle einen Differentialquotienten besitzt, so ist hiermit eine *neue Funktion* für denselben Bereich von x definiert; man nennt sie die *abgleitete* oder *derivierte Funktion* oder kurz die *Ableitung von* $f(x)$, aber auch — im übertragenen Sinne — den *Differentialquotienten von* $f(x)$ und gebraucht dafür, je nachdem es in dem betreffenden Falle vorteilhafter ist, eines der Zeichen*)

---

*) Die drei Bezeichnungen stammen der Reihe nach von Leibniz

$$\frac{df(x)}{dx}, \quad f'(x), \quad D_x f(x)$$

oder kürzer, indem $f(x) = y$ gesetzt wird,

$$\frac{dy}{dx}, \quad y', \quad D_x y.$$

Die analytische Bedeutung dieser neuen Funktion ist also durch die Gleichung

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv D_x f(x) = \lim_{h=+0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3}$$

gegeben, wenn der Grenzübergang bei unbestimmt gelassenem x ausgeführt wird.

Im allgemeinen gehören zu verschiedenen Werten von x auch verschiedene Werte von $f'(x)$; es gibt jedoch einen — und nur diesen einzigen — Fall, wo zu allen Werten von x derselbe Wert von $f'(x)$ gehört, die Funktion an allen Stellen sich gleich stark ändert; es ist dies die *rationale ganze Funktion ersten Grades* $f(x) = ax + b$; denn für sie ist der Differenzenquotient $\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = a$, also auch

$$D_x(ax+b) = a;$$

das geometrische Bild dieser Funktion — eine Gerade — spricht dies in vollster Deutlichkeit aus.

Setzt man in der letzten Formel $a = 0$, so sagt sie, daß

$$D_x b = 0, \tag{4}$$

daß also *der Differentialquotient einer konstanten Funktion oder einer Konstanten kurzweg Null ist*; mit $a = 1$ und $b = 0$ ergibt sich das oben schon gefundene Resultat

$$D_x x = 1, \tag{5}$$

daß *der Differentialquotient der Variablen x selbst die Einheit ist.*

Die Existenz eines endlichen Differentialquotienten an einer Stelle x setzt die Stetigkeit der Funktion in der Umgebung dieser Stelle notwendig voraus; denn der Quotient (1) kann bei gegen Null konvergierendem h nicht anders einem endlichen Grenzwerte sich nähern, als daß auch sein Zähler gegen Null

---

(in einem Manuskript von 1676), Lagrange (Théorie des fonctions analytiques 1797) und Arbogast (Calcul des Dérivations 1800).

abnimmt, und dies findet nur im Falle der Stetigkeit in der (übrigens beliebig engen) Umgebung von x statt. Dagegen ist diese Stetigkeit kein zureichendes Merkmal dafür, daß an der Stelle x ein Differentialquotient existiert. Als Beispiel diene die Funktion $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, welche für alle Werte von x definiert*) und stetig ist; insbesondere geht ihre Stetigkeit in der Umgebung von Null aus der Bemerkung hervor, daß

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqq |x|,$$

daß man also durch Wahl eines hinreichend kleinen x den Wert von $|f(x)|$ beliebig klein machen kann. Der Grenzwert des Differenzenquotienten an der Stelle $x = 0$ ist aber

$$\lim_{h=\pm 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h=\pm 0} \sin \frac{1}{h},$$

also völlig unbestimmt [19 5]; daher existiert an dieser Stelle kein Differentialquotient.

Es ist gelungen, Funktionen analytisch zu definieren, welche trotz ihrer Stetigkeit an unzählig vielen, ja selbst an allen Stellen keinen Differentialquotienten zulassen. Indessen genüge hier die bloße Anführung dieser Tatsache.**)

22. Phoronomische und geometrische Bedeutung des Differentialquotienten. Sobald man das Gebiet der Anwendungen der Analysis betritt, sind x und $f(x)$ die Maßzahlen für irgend welche voneinander abhängende Größen und je nach der Bedeutung dieser letzteren erlangt auch der Differentialquotient eine spezielle Bedeutung. An dieser Stelle sollen jene zwei Fälle besprochen werden, von welchen die Differentialrechnung ihren Ausgang genommen und die für

*) Wenn auch $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert ist, so muß man doch $x \sin \frac{1}{x}$ als definiert betrachten und ihm den Wert 0 zuschreiben, wenn man sich nicht mit dem Satze in Widerspruch setzen will, daß das Produkt aus Null und einer endlichen Zahl Null ist.

**) Literaturangaben über derartige Funktionen findet man in E. Pascals Repertorium der höheren Mathematik, deutsch von A. Schepp, I. T., S. 110–111, Leipzig 1900.

zwei große Gebiete von grundlegender Bedeutung sind: für die *Phoronomie* und die *Geometrie.*

1) Es sei x die von einem bestimmten Augenblicke an gezählte Zeit, welche ein in gerader Linie sich bewegender Punkt gebraucht hat, um den Weg $f(x)$ zurückzulegen; dann ist $f(x+h)$ der in der Zeit $x+h$ vollendete, somit $f(x+h)-f(x)$ der in dem Zeitintervall $(x, x+h)$ zurückgelegte Weg. Wäre die Bewegung eine *gleichmäßige*, d. h. eine solche, bei welcher in beliebig großen, jedoch gleichen Zeitabschnitten gleiche Wege zurückgelegt werden, so stellte der Quotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

die *Geschwindigkeit*, d. i. den in einer von den Zeiteinheiten, in welchen x und h ausgedrückt sind, beschriebenen Weg dar.

Auf eine *ungleichmäßige* Bewegung läßt sich dieser Begriff der Geschwindigkeit nicht unmittelbar übertragen; der angeschriebene Quotient bedeutet nunmehr die während des Zeitintervalls $(x, x+h)$ auf die Zeiteinheit *durchschnittlich* entfallende Weglänge; je kürzer das Zeitintervall, um so geringer die Ungleichmäßigkeit der Bewegung während desselben, um so näher rückt die Bedeutung jenes Quotienten der einer Geschwindigkeit; und nähert sich der Quotient bei stetig gegen Null abnehmendem h einem Grenzwert, so wird dieser Grenzwert

$$\lim_{h=\mp 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

als die im *Augenblicke* x herrschende *Geschwindigkeit* erklärt.

Wenn also $f(x)$ den bei geradliniger Bewegung in der Zeit x zurückgelegten Weg ausdrückt, so hat der Differentialquotient $f'(x)$ die Bedeutung der im letzten Augenblicke dieser Zeit herrschenden Geschwindigkeit.

Mit Hilfe des Bewegungsbegriffes kann dem Differentialquotienten eine bemerkenswerte Deutung gegeben werden. Stellt man sich vor, die Variable x durchlaufe ihr Intervall (α, β) gleichmäßig, so durchläuft die Funktion ihren Bereich im allgemeinen ungleichmäßig; bis zu dem Zeitpunkte, in welchem die Variable den Wert x, die Funktion den zugeordneten Wert $f(x)$ angenommen, sei die Zeit t verflossen, und in dem weiteren

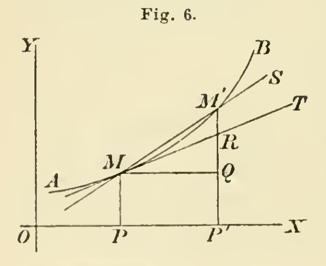
Zeitintervall τ mögen die Werte $x+h$ und $f(x+h)$ zustande kommen; dann ist $\frac{h}{\tau}=c$ die Geschwindigkeit, mit welcher x sein Intervall durchläuft und der Grenzwert von $\frac{f(x+h)-f(x)}{\tau}$ für $\lim \tau=0$ die Geschwindigkeit, mit welcher sich $f(x)$ im letzten Augenblicke der Zeit t in seinem Bereich bewegt; da nun

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{\tau}}{\frac{h}{\tau}}=\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{\tau}}{c}$$

und h mit τ zugleich gegen die Null konvergiert, so ist der Differentialquotient das Verhältnis der Geschwindigkeiten, mit welchen x und $f(x)$ sich im gegebenen Augenblicke in ihren Gebieten bewegen. Man kann somit den Satz aufstellen: *Der Differentialquotient einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle x ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Funktion an dieser Stelle ändert, wenn die Variable x sich gleichmäßig mit der Geschwindigkeit 1 ändert**).

2) Man betrachte x als Abszisse und $f(x)=y$ als Ordinate eines Punktes M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem; dann beschreibt M, während x das Intervall (α, β) stetig durchläuft, eine Kurve AB (Fig. 6). Die den Abszissen $OP=x$ und $OP'=x+h$ entsprechenden Punkte M, M' besitzen die Ordinaten $PM=f(x)$ und $P'M'=f(x+h)$ und bestimmen eine Sekante, deren Richtung durch den Winkel $QMS=\varphi$ festgelegt werden möge; dann ist

Fig. 6.



$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\operatorname{tg}\varphi.$$

---

*) Von Betrachtungen solcher Art ist Newton bei Begründung der Infinitesimalrechnung (erste Publikation 1687 in den *Principia mathematica philosophiae naturalis*) ausgegangen; an die Vorstellung des *Verfließens* der Zeit anknüpfend nannte er die Variablen *Fluenten* und die Änderungsgeschwindigkeiten *Fluxionen*, die Infinitesimalrechnung *Fluxionskalkül*. Newtons Bezeichnung für den Differentialquotienten der Funktion $y=f(x)$ ist $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ und erklärt sich aus der obigen Darlegung.

Konvergiert h gegen die Grenze Null, so nähert sich M' längs der Kurve dem Punkte M, und die Gerade MS dreht sich um den Punkt M. Die Aussage, der Differenzenquotient konvergiere dabei gegen einen bestimmten Grenzwert, ist gleichbedeutend mit der Aussage, die Sekante nähere sich einer Grenzlage; diese Grenzlage MT nennt man die *Tangente* an die Kurve im Punkte M; wird ihre Richtung durch den Winkel $QMT = \alpha$ bestimmt, so ist

$$\lim_{h = \pm 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \operatorname{tg} \alpha .$$

*Ist also $y = f(x)$ die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogene Gleichung einer Kurve, so hat der zu einem Werte x gehörige Differentialquotient $f'(x)$ die Bedeutung der trigonometrischen Tangente jenes Winkels, welchen die Tangente an die Kurve in dem zur Abszisse x gehörigen Punkte mit der positiven Richtung der Abszissenachse einschließt**).

Die Existenz eines vollständigen Differentialquotienten an der Stelle x oder, was dasselbe bedeutet, die Übereinstimmung des vorwärts genommenen Differentialquotienten mit dem rückwärts genommenen hat die geometrische Bedeutung, daß sich die Sekanten, welche die Kurve rechts von M schneiden, derselben Grenzlage nähern wie die links von M schneidenden, daß also die Kurve im Punkte M nur *eine* Tangente besitzt.

Auf die eben ausgeführte Betrachtung gründet sich die Aussage, eine Tangente habe mit der Kurve zwei vereinigt liegende Punkte, welche zusammen den *Berührungspunkt* ausmachen, gemein.

23. Begriff des Differentials. Der begriffliche Inhalt der Gleichung

$$\lim_{h = \pm 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

welche den Differentialquotienten von $f(x)$ an der Stelle x definiert, ist der, daß die Differenz

---

*) Das Problem der Tangentenbestimmung bei einer ebenen Kurve bildete bei Leibniz den Ausgangspunkt für die Erfindung der Differentialrechnung (erste Publikation 1684 in den Leipziger *Acta eruditorum*), der er auch den Namen gegeben.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$$

durch entsprechende Einschränkung von h unter einen beliebig kleinen Betrag gebracht werden kann; bezeichnet man hiernach diese Differenz mit ε, so ist ε eine mit h zugleich unendlich klein werdende Größe und

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \varepsilon h$$

oder in andern, früher eingeführten Zeichen:

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x. \tag{6}$$

Von den beiden Teilen der rechten Seite wird der zweite unendlich klein von höherer Ordnung als der erste, sobald $f'(x)$ einen bestimmten von Null verschiedenen Wert hat, da

$$\lim_{\Delta x = \pm 0} \frac{\varepsilon \cdot \Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim \frac{\varepsilon}{f'(x)} = 0;$$

das erste Glied ist also der Hauptteil der Änderung $\Delta f(x)$, und wurde von Leibniz unter dem Namen *Differential* der Funktion eingeführt und mit $df(x)$ bezeichnet. Danach ist zunächst

$$df(x) = f'(x)\Delta x; \tag{7}$$

wendet man diese Gleichung auf die Funktion $f(x) = x$ an, so folgt

$$dx = \Delta x, \tag{8}$$

so daß für diese Funktion die Begriffe „Änderung" und „Differential" einander decken, wie ja für sie auch Differenzenquotient und Differentialquotient übereinstimmen; nach dieser Bemerkung kann

$$df(x) = f'(x)dx \tag{9}$$

geschrieben werden.

Formell ist also das Differential $df(x)$ einer Funktion das Produkt aus ihrem Differentialquotienten mit dem Differential der Variablen; begrifflich stellt es eine Größe dar, deren Unterschied gegen die Änderung $\Delta f(x)$ der Funktion durch gehörige Einschränkung von dx im Verhältnis zu letzterer Größe dem Betrage nach beliebig klein gemacht werden kann, indem zufolge (6), (7) *und* (8)

$$\lim_{dx = \pm 0} \frac{\Delta f(x) - df(x)}{dx} = 0.$$

Die aus der *Definitionsgleichung* (9) gezogene Folgerung

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

hat nur die Bedeutung, es sei $f'(x)$ der Grenzwert von $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ bei gegen Null konvergierendem Δx und $\Delta f(x)$. Auf ihr beruht der Name „Differentialquotient" (Quotient aus dem Differential der Funktion durch das Differential der Variablen) und die von Leibniz dafür eingeführte Bezeichnung $\frac{df(x)}{dx}$.

Aus der Gleichung (9) erklärt sich auch die für den Differentialquotienten von Lacroix*) eingeführte Bezeichnung „Differentialkoeffizient" (= Koeffizient des Differentials dx), die heute noch in englischen Schriften üblich ist.

Die Bestimmung des Differentialquotienten einer Funktion und ihres Differentials laufen hiernach im Wesen auf dasselbe hinaus; indessen ist ersteres die primäre Aufgabe, ihre Durchführung wird als *Differentiation der Funktion* bezeichnet.

In den beiden Fällen von **22** hat das Differential folgende Bedeutung.

Ist $f(x)$ der in der Zeit x zurückgelegte Weg, also $f'(x)$ die im letzten Augenblicke dieser Zeit herrschende Geschwindigkeit, so stellt das Differential $df(x) = f'(x)dx$ den in dem Zeitintervall $(x, x + dx)$ beschriebenen Weg um so genauer dar, je kleiner dx, und es läßt sich dx so klein wählen, daß der Unterschied zwischen dem wirklich zurückgelegten Weg $\Delta f(x)$ und diesem $df(x)$ im Verhältnis zu dx dem Betrage nach beliebig klein werde.

Wird $f(x)$ in den Ordinaten einer Kurve zur Darstellung gebracht, so ist $df(x) = f'(x) \cdot dx = dx \cdot \operatorname{tg} \alpha = QR$ (Fig. 6) die Änderung, welche die *Ordinate der Tangente* bei dem Übergange von x zu $x + dx$ erfährt; dies unterscheidet sich von der Änderung der *Ordinate der Kurve*, von $\Delta f(x) = QM'$, um so weniger, je kleiner dx, und wieder kann dx so eingeschränkt werden, daß das Verhältnis $\frac{\Delta f(x) - df(x)}{dx} = \frac{RM'}{MQ}$ dem Betrage nach beliebig klein wird.

*) Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, I. Band (1810), p. 240.

§ 2. Allgemeine Sätze über Differentiation.

24. Differentiation eines Aggregats. Sind $f(x)$, $g(x)$ zwei in dem Intervall (α, β) stetige Funktionen, welche an jeder Stelle dieses Intervalls einen Differentialquotienten besitzen, so haben auch die Aggregate

$$f(x) \pm g(x)$$

an jeder Stelle einen Differentialquotienten; denn der Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h) \pm g(x+h) - \{f(x) \pm g(x)\}}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

konvergiert unter den obigen Voraussetzungen mit gegen Null abnehmendem h gegen eine bestimmte Grenze, und es ist

$$D_x[f(x) \pm g(x)] = D_x f(x) \pm D_x g(x). \tag{1}$$

Die Formel kann leicht auf Aggregate aus einer beliebigen endlichen Anzahl von Bestandteilen ausgedehnt werden und gibt den Satz: *Der Differentialquotient eines Aggregats ist das aus den Differentialquotienten der Bestandteile analog gebildete Aggregat.*

Ist die Funktion $g(x)$ konstant $= c$, so ist ihr Differentialquotient Null und Formel (1) gibt

$$D_x[f(x) \pm c] = D_x f(x). \tag{2}$$

Hiernach *verschwindet ein konstanter Summand beim Differentiieren,* mit andern Worten: *Zwei Funktionen, welche sich nur um eine additive Konstante voneinander unterscheiden, haben gleiche Differentialquotienten.*

25. Differentiation eines Produkts. Wenn jede der beiden in dem Intervalle (α, β) stetigen Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ an jeder Stelle des Intervalls einen Differentialquotienten besitzt, so gilt das gleiche für ihr Produkt $f_1(x) f_2(x)$; denn der auf dieses Produkt bezügliche Differenzenquotient läßt folgende Umformung zu:

$$\frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x)}{h}$$

$$= \frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x+h) + f_1(x)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x)}{h}$$

$$= \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} f_2(x+h) + f_1(x)\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h};$$

bei gegen Null abnehmendem h ergibt sich auf Grund der gemachten Voraussetzungen, daß

$$D_x[f_1(x)f_2(x)] = f_2(x)D_xf_1(x) + f_1(x)D_xf_2(x). \tag{3}$$

Kommt zu dem Produkt noch ein dritter Faktor $f_3(x)$ hinzu, welcher dieselben Bedingungen erfüllt wie die beiden ersten, so ist zunächst

$$D_x[\{f_1(x)f_2(x)\}f_3(x)] = f_3(x)\cdot D_x\{f_1(x)f_2(x)\} + f_1(x)f_2(x)D_xf_3(x)$$

und wenn man im ersten Gliede rechts aus (3) substituiert,

$$D_x\{f_1(x)f_2(x)f_3(x)\} = f_2(x)f_3(x)D_xf_1(x) + f_3(x)f_1(x)D_xf_2(x) + f_1(x)f_2(x)D_xf_3(x). \tag{4}$$

Die Formel läßt sich auf dem angedeuteten Wege auf jede beliebige Anzahl von Faktoren ausdehnen und enthält den Satz. *Der Differentialquotient eines Produktes von n Funktionen wird gebildet, indem man jedesmal nur einen Faktor durch seinen Differentialquotienten ersetzt und alle so gebildeten n Produkte zu einer Summe vereinigt.*

Wenn in der Formel (3) die Funktion $f_2(x)$ konstant $= c$ angenommen wird, so ist $D_xf_2(x) = 0$ und die Formel verwandelt sich in

$$D_x\{cf_1(x)\} = cD_xf_1(x). \tag{5}$$

Hiernach *geht ein konstanter Faktor unverändert als Faktor in den Differentialquotienten über.*

Wird die Formel (4) auf n Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ ausgedehnt und sodann durch das Produkt der Funktionen selbst dividiert, was nur dann gestattet ist, wenn dieses Produkt an der betreffenden Stelle x nicht verschwindet, so ergibt sich die Formel

$$\frac{D_x\{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)\}}{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)} = \frac{D_xf_1(x)}{f_1(x)} + \frac{D_xf_2(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{D_xf_n(x)}{f_n(x)}; \tag{6}$$

aus derselben folgt, wenn alle Faktoren $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ ein und dieselbe Funktion $f(x)$ bedeuten, die weitere Formel

$$\frac{D_x\{f(x)\}^n}{\{f(x)\}^n} = n\,\frac{D_x f(x)}{f(x)},$$

und des weiteren

$$D_x\{f(x)\}^n = n\{f(x)\}^{n-1} D_x f(x). \tag{7}$$

Ist $f(x) = x$, so gibt dies wegen $D_x x = 1$

$$D_x x^n = n x^{n-1}. \tag{8}$$

Hierdurch erscheint der Differentialquotient einer Potenz der Variablen bestimmt, zunächst jedoch nur für den Fall eines *positiven ganzen* Exponenten.

26. Differentiation eines Quotienten. Der Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ zweier in dem Intervalle (α, β) stetigen Funktionen ist unter der Voraussetzung, daß im ganzen Intervalle mit Einschluß seiner Grenzen $|g(x)| > 0$, ebenfalls eine stetige Funktion und besitzt überall einen Differentialquotienten, wenn dies für die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt. Würde jedoch an einer oder an mehreren Stellen des Intervalls $g(x) = 0$, so hört dort die gebrochene Funktion auf definiert und im allgemeinen auch stetig zu sein; es gelten dann die folgenden Formeln nach Ausscheidung solcher singulären Stellen.

Mit dem Differenzenquotienten von $\frac{f(x)}{g(x)}$ kann nachstehende Transformation ausgeführt werden:

$$\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,g(x) - f(x)\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x)\,g(x+h)};$$

bei dem Übergange von h gegen die Grenze Null ergibt sich hieraus

$$D_x \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\,D_x f(x) - f(x)\,D_x g(x)}{\{g(x)\}^2}. \tag{9}$$

Es ist also der Differentialquotient eines Quotienten gleich dem Produkte des Nenners mit dem Differentialquotienten des Zählers, vermindert um das Produkt des Zählers mit dem Differential-

quotienten des Nenners, und die Differenz durch das Quadrat des Nenners dividiert.

Eine erhebliche Vereinfachung erfährt die Formel, wenn die Zählerfunktion $f(x)$ konstant $= c$ ist: alsdann ist

$$D_x \frac{c}{g(x)} = -\frac{c D_x g(x)}{\{g(x)\}^2}. \tag{10}$$

Setzt man hier $c = 1$ und $g(x) = x^n$, wobei unter n eine positive ganze Zahl verstanden werden soll, so ist, weil $D_x x^n = n x^{n-1}$,

$$D_x x^{-n} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}, \tag{11}$$

wodurch die Gültigkeit der Formel (8) auch für *negative ganze* Exponenten erwiesen ist.

27. Differentiation inverser Funktionen. Ist (A, B) das Gebiet einer in dem Intervall (α, β) monotonen stetigen Funktion $y = f(x)$ von x, so gehört zu jedem Werte von y aus dem Intervall (A, B) ein und nur ein Wert von x, so daß zugleich x als Funktion von y bestimmt ist: $x = \varphi(y)$, und zwar ist x ebenfalls monoton und stetig; denn x und y durchlaufen ihre bezüglichen Intervalle (α, β) und (A, B) gleichzeitig stetig. Man bezeichnet $f(x)$ und $\varphi(y)$ als *inverse* Funktionen oder $\varphi(y)$ als die Umkehrung von $f(x)$ (12); zwischen ihren Differentialquotienten besteht eine einfache Beziehung.

Sind nämlich x, y und ebenso $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ zusammengehörige Werte, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differenzenquotient für die Funktion $f(x)$, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ der Differenzenquotient für $\varphi(y)$; diese beiden Differenzenquotienten sind reziprok und bleiben es, wie klein auch Δx und Δy werden mögen; folglich sind auch ihre Grenzwerte, falls solche vorhanden und bestimmte von Null verschiedene Werte sind, also die Differentialquotienten von $f(x)$ in bezug auf x und von $\varphi(y)$ in bezug auf y, reziprok, d. h.

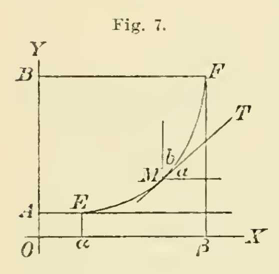
$$D_x f(x) \cdot D_y \varphi(y) = 1. \tag{12}$$

Die Differentialquotienten zweier inversen Funktionen sind also für jedes Paar zusammengehöriger Werte der Variablen x, y *reziprok.*

Konvergiert $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ an einer Stelle x gegen die Grenze Null, so hat $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ den Grenzwert ∞ und umgekehrt; ist also an einer Stelle $x: D_x f(x) = 0$, so hat $\varphi(y)$ an der entsprechenden Stelle y einen unendlichen Differentialquotienten und umgekehrt.

Die Ergebnisse erlangen anschauliche Bedeutung, wenn man $y = f(x)$ als Gleichung einer Kurve (Fig. 7) auffaßt; dieselbe Kurve ist auch durch die Gleichung $x = \varphi(y)$ dargestellt und der Unterschied beider Darstellungen liegt lediglich darin, daß das erstemal x, das zweitemal y als die unabhängige Veränderliche aufgefaßt wird*). Der Differentialquotient $D_x f(x)$ ist die trigonometrische Tangente des Winkels a, welchen die Tangente MT mit der positiven Richtung der Abszissenachse bildet, $D_y \varphi(y)$ die trigonometrische Tangente des Winkels b, welchen dieselbe Tangente mit der positiven Richtung der Ordinatenachse einschließt, und da $a + b = \frac{\pi}{2}$, so ist $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b = 1$; dies also ist der geometrische Inhalt der Formel (12). Wird in einem Punkte, wie E, $D_x f(x) = 0$, so ist dort die Tangente parallel zur Abszissenachse, also normal zur Ordinatenachse, folglich $D_y \varphi(y) = \infty$ an dieser Stelle; und wird, wie in F, $D_x f(x) = \infty$, so ist die Tangente normal zur Abszissenachse, also parallel zur Ordinatenachse, daher $D_y \varphi(y) = 0$ an dieser Stelle.

Fig. 7.



Wendet man die Formel (12) auf den Fall $y = x^{\frac{1}{m}}$, $x = y^m$ an, wo unter m eine positive ganze Zahl, unter $x^{\frac{1}{m}}$ der positive reelle Wert von $\sqrt[m]{x}$ verstanden wird und x auf positive Werte beschränkt bleiben muß, wenn m eine gerade

---

*) Um die Figur bei der Darstellung $x = \varphi(y)$ in solche Lage zu bringen, daß positive Werte von y auf der rechten Seite der *horizontalen* und positive Werte von x auf der oberen Seite der *vertikalen* Achse gezählt werden, konstruiere man das Spiegelbild der Kurve in bezug auf die Halbierungslinie des Winkels XOY.

Zahl ist, so findet sich mit Benutzung von (8) nach Formel (12)

$$D_x x^{\frac{1}{m}} \cdot m y^{m-1} = 1,$$

woraus

$$D_x x^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m y^{m-1}} = \frac{1}{m x^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1};$$

und trägt man nun in die Formel (7) $f(x) = x^{\frac{1}{m}}$ ein, so kommt

$$(13) \qquad D_x x^{\frac{n}{m}} = n x^{\frac{n-1}{m}} \cdot \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1};$$

dadurch ist die Gültigkeit der Formel (8) für *positive gebrochene* Exponenten dargetan. Wird schließlich in der Formel (10) $c = 1$ und $g(x) = x^{\frac{n}{m}}$ gesetzt, so ergibt sich mit Benutzung von (13)

$$(14) \qquad D_x x^{-\frac{n}{m}} = -\frac{\frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}}{x^{\frac{2n}{m}}} = -\frac{n}{m} x^{-\frac{n}{m}-1}$$

und Formel (8) ist nun auch auf *negative gebrochene* Exponenten erweitert. Sie gilt also für jeden rationalen Exponenten.

28. Differentiation zusammengesetzter Funktionen. Es sei $u = \varphi(x)$ eine eindeutige stetige Funktion von x, $y = f(u)$ eine eindeutige stetige Funktion von u, so ist mittelbar y auch eine eindeutige stetige Funktion von x: $y = f[\varphi(x)]$; man nennt in solchem Falle y eine *zusammengesetzte Funktion* von x oder auch eine *Funktion von einer Funktion* von x.

Ein bestimmter Wert von x hat einen bestimmten Wert von u und dieser einen bestimmten Wert von y zur Folge, und besitzt $\varphi(x)$ an der Stelle x und $f(u)$ an der Stelle u einen Differentialquotienten, so hat auch $f[\varphi(x)]$ an der Stelle x einen Differentialquotienten. Geht man nämlich von x zu $x + \Delta x$ über, so erfahren auch u, y gewisse Änderungen Δu, Δy, und es ist

$\frac{\Delta u}{\Delta x}$ der Differenzenquotient von u in bezug auf x,

$\frac{\Delta y}{\Delta u}$ „ „ „ y „ „ „ u,

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ „ „ „ y „ „ „ x;

zwischen diesen drei Differenzenquotienten besteht aber die Beziehung

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta y}{\varDelta u} \cdot \frac{\varDelta u}{\varDelta x}$$

und bleibt bestehen, wie klein auch $\varDelta x$ werden möge; somit besteht auch zwischen den Grenzwerten die Beziehung

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u. \tag{15}$$

Wäre $v = \psi(x)$, $u = \varphi(v)$, $y = f(u)$, y also durch zweifache Vermittlung eine Funktion von x, so ergäbe sich durch ähnliche Schlüsse

$$D_x y = D_u y \cdot D_v u \cdot D_x v. \tag{16}$$

Um also eine Variable y, welche durch mehrfache eindeutige Vermittlung von $u, v, w, \ldots z$ mit der Variablen x zusammenhängt, nach dieser letzteren zu differentiieren, bilde man der Reihe nach die Differentialquotienten von y nach u, von u nach v, von v nach w, ... schließlich von z nach x, die alle als vorhanden vorausgesetzt werden; dann ist der Differentialquotient von y nach x gleich dem Produkte aller dieser Differentialquotienten.

Die Formel (7) erweist sich als ein besonderer Fall der Formel (15), wenn man $u = f(x)$ und $y = u^n$ setzt.

Nimmt man in (15) $u = ax + b$, $y = u^n$, wo n nun *jede rationale Zahl* bedeuten kann, so ist (21)

$$D_x(ax + b)^n = na\,(ax + b)^{n-1}.$$

§ 3. Differentialquotienten der elementaren Funktionen.

29. Die Potenz. Im Verlaufe des letzten Paragraphen wurde für die Differentiation der Potenz $y = x^n$ die für jeden rationalen Exponenten n geltende Formel:

$$D_x x^n = nx^{n-1} \tag{1}$$

abgeleitet. Bei negativem n ist der Wert $x = 0$ als Unstetigkeitspunkt auszuschließen.

Diese Formel in Verbindung mit den Sätzen des vorigen Paragraphen setzt uns in den Stand, alle expliziten algebraischen Funktionen zu differentiieren.

1) Für die ganze Funktion

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

hat man unmittelbar (**24**, (1), (2), **25**. (5))

$$D_x y = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1};$$

es gibt hiernach eine ganze Funktion zum Differentialquotienten eine ebensolche Funktion von nächst niedrigerem Grade.

2) Die gebrochene Funktion

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m}$$

läßt Differentiation zu an allen Stellen, für welche der Nenner nicht verschwindet, und zwar ist dann (**26**, (9))

$$D_x y = \frac{\begin{matrix}(b_0 x^m + \cdots + b_m)(n a_0 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}) - \\ -(a_0 x^n + \cdots + a_n)(m b_0 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1})\end{matrix}}{(b_0 x^m + \cdots + b_m)^2}.$$

Z. B. $y = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$ gibt für jeden Wert x einen Differentialquotienten, weil der Nenner für keinen reellen Wert von x Null wird, und es ist

$$D_x y = \frac{8x^3}{(x^4 + 1)^2};$$

dagegen wird $y = \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}$ unstetig an den Stellen $x = -1$ und $x = +1$, für welche die Definition ihre Geltung verliert; in den Intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, +\infty)$, mit Ausschluß der Grenzen, ist

$$D_x y = -\frac{8x^3}{(x^4 - 1)^2}.$$

3) Die Differentiation einer Wurzel aus einer rationalen Funktion erledigt sich durch Verbindung von **28**, (15) mit den vorangehenden Fällen. Ist z. B. $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-1}}$, so beachte man zunächst, daß x auf das Intervall $(1, +\infty)$ beschränkt werden muß; davon ist der Anfangswert 1 auszuschließen als Unstetigkeitspunkt; setzt man $u = \frac{x^2+1}{x^3-1}$, so ist

$$D_u y = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \qquad D_x u = -\frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^3 - 1)^2},$$

folglich

$$D_x y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3-1}{x^2+1}}\cdot\frac{x^4+3x^2+2x}{(x^3-1)^2}.$$

30. Der Logarithmus. Der mit der Funktion $y = \log_a x$, wo $a > 0$ und $x > 0$ ist, gebildete Differenzenquotient ist

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right);$$

setzt man $\frac{h}{x} = \varepsilon$, so vollführt ε mit h zugleich den Grenzübergang zu ± 0, somit ist

$$\text{(A)} \qquad D_x \log_a x = \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\varepsilon=\pm 0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right].$$

Die Existenz und endgültige Bestimmung des Differentialquotienten hängt also davon ab, ob sich der Ausdruck $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ bei gegen Null abnehmendem Betrage von ε einem bestimmten Grenzwerte nähert und welches dieser Grenzwert ist.

Wir lassen ε zunächst die Reihe der reziproken natürlichen Zahlen durchlaufen, betrachten also den Ausdruck

$$\text{(B)} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

für ein beständig wachsendes positives ganzes n. Dann ist

$$\text{(C)} \quad \left\{\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+ \\ &\qquad \cdots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+ \\ &\qquad \cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{1\cdot 2\ldots n}; \end{aligned}\right.$$

mit wachsendem n nimmt jedes Glied der rechten Seite vom dritten angefangen zu und wächst die Anzahl der durchwegs positiven Glieder, somit wächst der Wert des Ausdruckes (B) mit zunehmendem n unaufhörlich, bleibt aber doch, wie groß auch n sein möge, schon von $n = 2$ angefangen kleiner als

$$\text{(D)} \qquad 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n} = a_n.$$

Die Zahl a_n selbst, die mit wachsendem n immer größer und größer wird, bleibt doch beständig kleiner als 3; denn es ist

$$\text{(E)} \quad a_n < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 .$$

Sind ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ positive echte Brüche, so ist*)

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_r) > 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r);$$

wendet man dies auf die Zähler der rechten Seite in (C) an, so ist

$$1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n}(1 + 2) = 1 - \frac{2 \cdot 3}{2n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n}(1 + 2 + 3) = 1 - \frac{3 \cdot 4}{2n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) > 1 - \frac{1}{n}[1 + 2 + \cdots + \overline{n-1}]$$

$$= 1 - \frac{(n-1)n}{2n};$$

infolgedessen ist der Ausdruck (B) für jedes noch so große n größer als

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1 \cdot 2}{2n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{2 \cdot 3}{2n}\right) + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}\left(1 - \frac{n(n-1)}{2n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} - \frac{1}{2n}\left[1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)}\right]$$

$$= a_n - \frac{1}{2n} a_{n-2}$$

und weil $a_{n-2} < a_n$, in verstärktem Grade größer als

$$\text{(F)} \qquad a_n\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = b_n.$$

---

*) Es ist nämlich

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1 \alpha_2,$$

daher

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) > 1 - (\alpha_1 + \alpha_2);$$

multipliziert man beiderseits mit der positiven Zahl $1 - \alpha_2$ und wendet rechts denselben Schluß an, so wird

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3) > [1 - (\alpha_1 + \alpha_2)](1 - \alpha_3) > 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

usw.

Es sind auf diese Weise zwei unbegrenzt fortsetzbare Folgen rationaler Zahlen

$$\text{(G)} \qquad \begin{cases} a_1, & a_2, & a_3, \ldots \\ b_1, & b_2, & b_3, \ldots \end{cases}$$

bestimmt derart, daß von $n = 2$ angefangen fortab der Wert von

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

zwischen den entsprechenden Gliedern a_n, b_n eingeschlossen ist, so daß

$$b_n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < a_n;$$

da aber die Differenz $a_n - b_n$ durch Wahl von n kleiner gemacht werden kann als eine beliebig kleine positive Zahl, indem zufolge (F) und (E)

$$a_n - b_n = \frac{a_n}{2n} < \frac{3}{2n},$$

so bestimmen die beiden Zahlenreihen (G) einen *Schnitt* (2); diesem Schnitte entspricht eine Zahl, welche mit e bezeichnet wird, und diese Zahl ist der Grenzwert, welchem sich der Ausdruck (B) mit beständig wachsendem n nähert; es ist also

$$\text{(H)} \qquad \lim_{n = +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Zur Bestimmung dieser Zahl e ist jede der beiden Zahlenreihen (G) gleich geeignet; wir benutzen dazu die einfachere

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots$$

d. i.

$$1 + \frac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$$

deren zehntes Glied bereits 7 festbleibende Dezimalstellen gibt, so daß auf so viele Stellen genau*)

$$e = 2{,}718\,281\,8 \ldots$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß der Grenzwert des Ausdruckes (B) die Zahl e ist, wie auch n ins Unendliche wachsen möge. Zunächst trete an die Stelle von n die positive *stetige* Variable z; ihr Wert wird, wenn er nicht eine

*) Auf 18 Dezimalstellen abgekürzt, ist

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235 \ldots$$

ganze Zahl ist, zwischen zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen, n und $n+1$, zu liegen kommen, so daß

$$n < z < n+1;$$

daraus folgt, daß

$$1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{z} > 1+\frac{1}{n+1}$$

und in verstärktem Grade

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n};$$

der erste Teil dieser Relation $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$ konvergiert laut (H) mit wachsendem n gegen die Grenze e, weil der zweite Faktor den Grenzwert 1 hat; der dritte Teil $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$ $= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ konvergiert ebenfalls gegen e, weil der Divisor die Grenze 1 hat; folglich konvergiert auch der eingeschlossene Teil gegen die nämliche Grenze und es ist

$$\text{(J)} \qquad \lim_{z=+\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e.$$

Beachtet man noch, daß $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{z} = \left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z}$ $= \left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1} \cdot \left(1+\frac{1}{z-1}\right)$, und läßt nun z gegen $+\infty$ konvergieren, so hat der erste Faktor rechts den Grenzwert e, der zweite den Grenzwert 1, so daß auch

$$\text{(K)} \qquad \lim_{z=-\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^{z} = e$$

Daraus ergibt sich endlich, daß

$$\lim_{\varepsilon=\pm 0} \left(1+\varepsilon\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$$

ist; die Formel (A) lautet demnach *endgültig*

$$\text{(2)} \qquad D_x \log_a x = \frac{\log_a e}{x}.$$

Dasjenige Logarithmensystem, welchem die Zahl e als Basis zugrunde liegt, wird das *natürliche Logarithmensystem* genannt; es ist das in der reinen Analysis ausschließlich angewendete, während sich das praktische Rechnen des *gemeinen Logarithmensystems* bedient, dessen Basis die Grundzahl unseres

Zahlensystems, die Zahl 10, ist. Den natürlichen Logarithmus einer Zahl x werden wir mit $l\,x$, den gemeinen mit $\log x$ bezeichnen. Zwischen beiden besteht eine Beziehung, die sich folgendermaßen ergibt. Die Ansätze

$$l\,x = \alpha, \qquad \log x = \beta$$

sind gleichbedeutend mit

$$e^{\alpha} = x, \qquad 10^{\beta} = x;$$

logarithmiert man aber die Gleichung

$$e^{\alpha} = 10^{\beta}$$

im natürlichen System, so erhält man

$$\alpha = \beta\, l\, 10;$$

also ist

$$l\,x = l\,10 \log x$$

und

$$\log x = \frac{1}{l\,10}\, l\,x.$$

Man hat demnach die natürlichen Logarithmen mit $M = \frac{1}{l\,10}$ $= 0{,}434\,294\,481\,903\ldots$ zu multiplizieren, um sie in gemeine überzuführen, und gemeine Logarithmen mit $\frac{1}{M} = l\,10$ $= 2{,}302\,585\,092\,994\ldots$ zu multiplizieren, um sie in natürliche zu verwandeln; M heißt der *Modul* des gemeinen, $\frac{1}{M}$ der Modul des natürlichen Logarithmensystems.

Läßt man in der letzten Gleichung an die Stelle von 10 eine beliebige Basis a treten, so lautet sie $\log_a x = \frac{l\,x}{l\,a}$ und gibt für $x = e$: $\log_a e = \frac{1}{l\,a}$; hiernach kann die Gleichung (2) auch in der Form

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x\,l\,a} \tag{2*}$$

geschrieben werden. Um den Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus x zu erhalten, hat man a durch e zu ersetzen und bekommt so

$$D_x\, l\,x = \frac{1}{x}. \tag{3}$$

Die Formel (3) in Verbindung mit 28 gestattet, den Differentialquotienten des natürlichen Logarithmus einer jeden

expliziten algebraischen Funktion zu bestimmen. Ist z. B

$$y = l\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right),$$

so setze man $x + \sqrt{1 + x^2} = u$, und hat nun

$$D_u y = \frac{1}{u}, \quad D_x u = 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{u}{\sqrt{1 + x^2}},$$

folglich

$$D_x y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Hat man weiter den Differentialquotienten von

$$y = l\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

zu bilden, einer Funktion, welche für alle Werte von x mit Ausschluß von -1 und 1 definiert ist, so setze man $u = \frac{1+x}{1-x}$, $v = \sqrt{u}$ und es ist

$$D_v y = \frac{1}{v}, \quad D_u v = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad D_x u = \frac{2}{(1 - x)^2},$$

daher

$$D_x y = \frac{1 - x}{1 + x} \cdot \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Sind $y_1, y_2, \ldots y_n$ Funktionen von x, deren keine an der betrachteten Stelle x Null ist, so ist auch $y = y_1 y_2 \ldots y_n$ nicht Null und

$$l\,y = l\,y_1 + l\,y_2 + \cdots + l\,y_n;$$

durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich

$$\frac{D_x y}{y} = \frac{D_x y_1}{y_1} + \frac{D_x y_2}{y_2} + \cdots + \frac{D_x y_n}{y_n};$$

die rechte Seite wird der *logarithmische Differentialquotient des Produktes* y genannt; durch Multiplikation desselben mit y ergibt sich der eigentliche Differentialquotient dieses Produktes (25 (6)).

31. Die Exponentialfunktion. Ist a eine positive Zahl, so ist durch die positiven reellen Werte von a^x eine eindeutige stetige Funktion definiert, $y = a^x$, welche als *Exponentialfunktion* bezeichnet wird. Aus ihr folgt durch Umkehrung $x = \log_a y$. Dem Satze 27 zufolge ist also

$$D_x a^x D_y \log_a y = 1$$

und mit Benutzung von 30 (2*)

$$\frac{1}{y\,l\,a} \cdot D_x a^x = 1\,;$$

mithin ist der Differentialquotient der Exponentialfunktion

$$(4) \qquad D_x a^x = a^x\, l\, a.$$

Diejenige Exponentialgröße, deren Basis die Zahl e, die Basis des natürlichen Logarithmensystems, ist, führt den Namen *natürliche Potenz;* man findet ihren Differentialquotienten aus der Formel (4) dadurch, daß man $a = e$ setzt; mithin ist

$$(5) \qquad D_x e^x = e^x.$$

Die natürliche Potenz hat also an jeder Stelle einen ihrem eigenen Werte gleichen Differentialquotienten.

Ist der Exponent einer Exponentialfunktion eine explizite algebraische Funktion von x, so kann die Differentiation auf Grund des Satzes 28 ausgeführt werden. Ist z. B. $y = e^{\frac{1}{x-a}}$, so hat man mit Ausschluß der Stelle $x = a$

$$D_x y = -\frac{1}{(x-a)^2}\, e^{\frac{1}{x-a}}.$$

Nun sind wir auch imstande, jede Funktion zu differentiieren, welche die Form einer Potenz hat und deren Basis und Exponent algebraische Funktionen von x sind. Sind nämlich u, v zwei algebraische Funktionen von x und $y = u^v$, so kann dies wegen $e^{l\,u} = u$ auch in der Form $y = e^{v\,l\,u}$ dargestellt werden und nun ist

$$D_x y = e^{v\,l\,u} \left\{ l\,u \cdot D_x v + \frac{v\,D_x u}{u} \right\} = u^v \left\{ l\,u\; D_x v + \frac{v\,D_x u}{u} \right\}.$$

In dem einfachsten Falle $u = x$, $v = x$ ist also

$$D_x x^x = x^x \left\{ l\,x + 1 \right\}.$$

32. Die trigonometrischen Funktionen. Die geometrische Definition läßt eine Eigenschaft dieser Funktionen erkennen, welche ihnen unter den elementaren allein zukommt: die *Periodizität.* Es ändern nämlich die Funktionen sin, cos, sec, cosec ihren Wert nicht, wenn man das Argument um 2π vermehrt oder vermindert, sie haben die *Periode* oder den Periodizitätsmodul 2π; ein analoges Verhalten zeigen die

Funktionen tg, cotg in bezug auf die Zahl π, sie besitzen die Periode π. Da nun periodische Funktionen an Stellen, welche um ein Vielfaches der Periode voneinander verschieden sind, in allen Stücken übereinstimmen, so werden sie dort auch gleiche Differentialquotienten aufweisen: die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen sind somit notwendig periodische Funktionen mit der nämlichen Periode.

Vermöge der Beziehungen, welche zwischen den trigonometrischen Funktionen eines Bogens bestehen, genügt es, den Differentialquotienten einer derselben zu bestimmen. Wir wählen als solche

$$y = \sin x.$$

Der Differenzenquotient ist

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}};$$

konvergiert nun h gegen die Grenze Null, so hat $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ wegen der Stetigkeit dieser Funktion den Grenzwert $\cos x$, $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ aber laut **16**, 2) den Grenzwert 1; somit ist

$$D_x \sin x = \cos x. \tag{6}$$

Da ferner $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und -1 der Differentialquotient von $\frac{\pi}{2} - x$ ist, so folgt aus (6)

$$D_x \cos x = D_x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

also

$$D_x \cos x = -\sin x. \tag{7}$$

Für $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ erhält man nun mit Hilfe der Formeln (6), (7) auf Grund von **26**, (9)

$$D_x \operatorname{tg} x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}, \quad D_x \operatorname{cotg} x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

d. i.

$$D_x \operatorname{tg} x = \sec^2 x, \tag{8}$$

$$D_x \operatorname{cotg} = -\operatorname{cosec}^2 x. \tag{9}$$

Diese Formeln gelten jedoch nur mit Ausschluß jener Stellen, an welchen die betrachteten Funktionen nicht definiert sind, also für $\operatorname{tg} x$ mit Ausschluß der Stellen $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, für $\operatorname{cotg} x$ mit Ausschluß der Stellen $n\pi$, wo n jede positive und negative ganze Zahl oder Null sein darf (vgl. 19, 1).

Schließlich erhält man mittels der Formeln (6), (7) auf Grund von 26, (10) für

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{und} \quad y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$D_x \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \operatorname{tg} x \tag{10}$$

$$D_x \operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x, \tag{11}$$

wobei die Werte $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ bei (10) und $x = n\pi$ bei (11) auszuschließen sind.

33. Die zyklometrischen Funktionen. Die Umkehrung einer periodischen Funktion ist eine *unendlich vieldeutige* Funktion. Ist nämlich $x = f(y)$ periodisch mit der Periode p, so gibt es unendlich viele Werte des Arguments, zu welchen ein und derselbe Wert von x gehört; ist y einer dieser Werte, so sind die andern durch $y + np$ dargestellt, wobei n jede positive und negative ganze Zahl bedeuten kann; demnach hat die Gleichung $x = f(y)$ bei gegebenem x unendlich viele Lösungen in bezug auf y, jedoch so, daß, wenn eine derselben bekannt ist, alle übrigen angegeben werden können.

1) Es sei $x = \sin y$; wird x irgend ein Wert aus dem Intervall $(-1, +1)$ erteilt, so besitzt die Gleichung immer eine Wurzel in dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$; denn während y dieses letztere Intervall stetig durchläuft, bewegt sich $\sin y$ stetig in dem Intervall $(-1, +1)$, ist also eine monotone, und zwar eine wachsende Funktion. Diese Wurzel definiert demnach eine eindeutige Funktion, welche mit

$$y = \operatorname{arc} \sin x \tag{A}$$

bezeichnet werden und *Hauptwert* von $\operatorname{Arc} \sin x$ heißen soll, wobei unter letzterer Bezeichnung die *Gesamtheit* der Lösungen

von $x = \sin y$ zu verstehen ist. Weil $\sin y = \sin(\pi - y)$ ist, so ist

$$\text{(B)} \qquad \operatorname{Arc}\sin x = \begin{cases} 2n\pi + \arcsin x \\ (2n+1)\pi - \arcsin x. \end{cases}$$

Der Differentialquotient der neuen Funktion ergibt sich nach 27, indem

$$D_x \arcsin x \cdot D_y \sin y = 1;$$

nach Formel 32 (6) ist aber $D_y \sin y = \cos y = \sqrt{1 - x^2}$, die Wurzel mit positivem Zeichen genommen, weil $\cos y$ in dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ positiv ist; demnach hat man endgültig

$$\text{(12)} \qquad D_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2) Es sei $x = \cos y$; die Gleichung besitzt, wenn x ein Wert aus dem Intervall $(-1, +1)$ erteilt wird, immer eine Lösung in dem Intervall $(0, \pi)$, weil in diesem Intervall $\cos y$ als eine monotone, und zwar abnehmende Funktion sich verhält; diese Lösung definiert die eindeutige Funktion

$$\text{(C)} \qquad y = \arccos x,$$

den Hauptwert von $\operatorname{Arc}\cos x$, während, vermöge der Beziehung $\cos y = \cos(-y)$,

$$\text{(D)} \qquad \operatorname{Arc}\cos x = 2n\pi \pm \arccos x.$$

Läßt man in der allgemein gültigen Formel $x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ y das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ durchlaufen, so bewegt sich $\frac{\pi}{2} - y$ auf dem Intervall $(\pi, 0)$; infolgedessen besteht zwischen den Hauptwerten $\arcsin x$ und $\arccos x$ die Beziehung

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

aus welcher $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ und auf Grund von (12) und 24 (2)

$$\text{(13)} \qquad D_x \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

folgt.

3) Die Gleichung $x = \operatorname{tg} y$ besitzt für jedes x eine Lösung in dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, weil $\operatorname{tg} y$ in diesem Intervall eine monotone wachsende Funktion ist, die das Intervall $(-\infty, +\infty)$ durchläuft; diese Wurzel, als Hauptwert von $\operatorname{Arc tg} x$, definiert die eindeutige Funktion

$$\text{(E)} \qquad y = \operatorname{arc tg} x,$$

während

$$\text{(F)} \qquad \operatorname{Arc tg} x = n\pi + \operatorname{arctg} x.$$

Aus der Beziehung

$$D_x \operatorname{arc tg} x \cdot D_y \operatorname{tg} y = 1$$

folgt dann, weil nach Formel **32** (8) $D_y \operatorname{tg} y = \sec^2 y = 1 + x^2$ ist,

$$\text{(14)} \qquad D_x \operatorname{arc tg} x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4) Diejenige Wurzel der Gleichung $x = \operatorname{cotg} y$, welche dem Intervall $(0, \pi)$ angehört — und eine solche ist immer vorhanden, weil $\operatorname{cotg} y$ in dem genannten Intervall abnehmend von $+\infty$ zu $-\infty$ sich bewegt —, bezeichnet man als Hauptwert von $\operatorname{Arc cotg} x$ und definiert durch sie die eindeutige Funktion

$$\text{(G)} \qquad y = \operatorname{arc cotg} x,$$

während

$$\text{(H)} \qquad \operatorname{Arc cotg} x = n\pi + \operatorname{arc cotg} x$$

ist.

Auf Grund der Relation $x = \operatorname{tg} y = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ erkennt man wie in 2), daß

$$\operatorname{arc tg} x + \operatorname{arc cotg} x = \frac{\pi}{2},$$

woraus weiter folgt

$$\text{(15)} \qquad D_x \operatorname{arc cotg} x = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Auf die Umkehrungen der Funktionen $x = \sec y$, $x = \operatorname{cosec} y$ soll hier wegen ihres seltenen Gebrauchs nicht eingegangen werden; indessen kann ihre Erledigung nach dem vorangegangenen keine Schwierigkeit bieten*).

*) Vgl. die Beisp. 19), 20) in **35**.

Die Formeln (1) bis (15) dieses in Verbindung mit den Sätzen des vorigen Paragraphen geben die Mittel an die Hand, jede aus den elementaren Funktionen irgendwie durch eine endliche Folge von Rechenoperationen zusammengesetzte explizite Funktion zu differentiieren.

34. Die Hyperbelfunktionen. Zu den elementaren transzendenten Funktionen zählt man auch die *Hyperbelfunktionen*, so genannt, weil sie geometrisch mit der gleichseitigen Hyperbel in ähnlicher Weise zusammenhängen wie die trigonometrischen (Kreis-)Funktionen mit dem Kreise. Sie sind um die Mitte des 18. Jahrhunderts von V. Riccati mit den heute üblichen Bezeichnungen eingeführt und besonders von Lambert weiter ausgebildet worden.

Ihre *analytische* Definition kann mit Hilfe der natürlichen Exponentialfunktion wie folgt geschehen. Ist u die unbeschränkte reelle Variable, so wird

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} \text{ als hyperbolischer Kosinus } (\cosh u)$$

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} \text{ als hyperbolischer Sinus } (\sinh u)$$

von u erklärt; mit Hilfe dieser beiden Funktionen definiert man die hyperbolische Tangente, Kotangente, Sekante und Kosekante ganz nach Art der trigonometrischen Funktionen, indem man schreibt:

$$\operatorname{tgh} u = \frac{\sinh u}{\cosh u}, \quad \operatorname{cotgh} u = \frac{\cosh u}{\sinh u}, \quad \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u},$$

$$\operatorname{cosech} u = \frac{1}{\sinh u}.$$

Aus diesen Definitionen lassen sich Relationen zwischen den genannten Funktionen ableiten, ebenso zahlreich wie die trigonometrischen Formeln und von ähnlicher Bauart. Einige derselben mögen hier zusammengestellt werden.

Aus

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

folgt mit Rücksicht auf die anderen Definitionen unmittelbar:

$$\cosh u + \sinh u = e^u$$
$$\cosh u - \sinh u = e^{-u}$$
$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$
$$\operatorname{tgh}^2 u + \operatorname{sech}^2 u = 1$$
$$\operatorname{cotgh}^2 u - \operatorname{cosech}^2 u = 1;$$

die leicht zu erweisenden Identitäten:

$$e^{2u} - e^{-2u} = (e^u - e^{-u})(e^u + e^{-u}),$$
$$2(e^{u+v} - e^{-u-v}) = (e^u - e^{-u})(e^v + e^{-v}) + (e^v - e^{-v})(e^u + e^{-u}),$$
$$2(e^{u+v} + e^{-u-v}) = (e^u + e^{-u})(e^v + e^{-v}) + (e^u - e^{-u})(e^v - e^{-v})$$

schreiben sich nunmehr:

$$\sinh 2u = 2 \sinh u \cosh u,$$
$$\sinh(u + v) = \sinh u \cosh v + \sinh v \cosh u,$$
$$\cosh(u + v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v.$$

Die *Differentiation* der neuen Funktionen ist auf die der Exponentialfunktion zurückgeführt; es ergibt sich:

$$D_u \cosh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \sinh u,$$
$$D_u \sinh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \cosh u;$$
$$D_u \operatorname{tgh} u = \frac{\cosh^2 u - \sinh^2 n}{\cosh^2 u} = \operatorname{sech}^2 u,$$
$$D_u \operatorname{cotgh} u = \frac{\sinh^2 u - \cosh^2 u}{\sinh^2 u} = -\operatorname{cosech}^2 u;$$
$$D_u \operatorname{sech} u = -\frac{\sinh u}{\cosh^2 u} = -\operatorname{tgh} u \operatorname{sech} u,$$
$$D_u \operatorname{cosech} u = -\frac{\cosh u}{\sinh^2 u} = -\operatorname{cotgh} u \operatorname{cosech} u.$$

Die *geometrische* Bedeutung der Hyperbelfunktionen erhält man durch folgende Betrachtung. Der Kreis in Fig. 8 sei um O mit dem Radius 1 beschrieben. Ist θ das Bogenmaß des Winkels AOM, RS die in M an den Kreis gelegte Tangente, so hat man:

$$OP = \cos\theta, \qquad OR = \sec\theta$$
$$MP = \sin\theta, \qquad OS = \operatorname{cosec}\theta$$
$$MR = \operatorname{tg}\theta, \qquad MS = \operatorname{cotg}\theta.$$

Wird nun RH senkrecht zu OX und gleich MR gemacht, so ist der Ort des so bestimmten Punktes H eine *gleichseitige* Hyperbel, die A zu einem ihrer Scheitel hat; bezeichnet man nämlich die Koordinaten von H mit x, y, so ist

$$x = \sec\theta, \quad y = \operatorname{tg}\theta,$$

folglich

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit

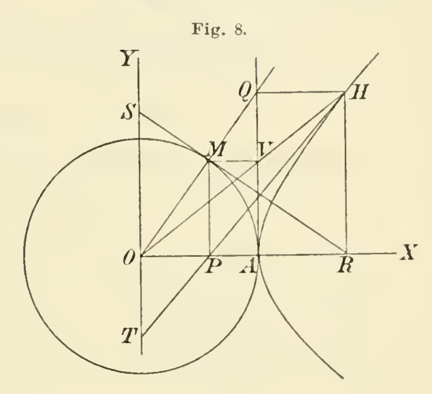
$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1,$$

so folgt, daß auch

$$\cosh u = OR,$$
$$\sinh u = HR$$

gesetzt werden kann.

Fig. 8.



Man überzeugt sich ferner, daß der Halbmesser OH der Hyperbel auf der Tangente in A eine mit MP gleiche Strecke abschneidet und daß die Tangente der Hyperbel im Punkte H durch P geht; denn es ist

$$\frac{AV}{RH} = \frac{OA}{OR}, \text{ woraus } AV = \sin\theta = MP;$$

weiter ist der Richtungskoeffizient der Tangente (**22**, 2)):

$$D_x y = D_x \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x}{y} = \frac{1}{\sin\theta},$$

aber es ist auch

$$\operatorname{tg} RPH = \frac{y}{x - \cos\theta} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta - \cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta},$$

so daß tatsächlich PH die Tangente ist.

Auf Grund dieser Ergebnisse erkennt man, daß, ganz entsprechend den Kreisfunktionen:

$$\begin{aligned} OR &= \cosh u, & OP &= \operatorname{sech} u \\ HR &= \sinh u & OT &= \operatorname{cosech} u \\ HP &= \operatorname{tgh} u & HT &= \operatorname{cotgh} u. \end{aligned}$$

Die Analogie erstreckt sich auch auf die Bedeutung der Argumente: die trigonometrischen Funktionen können, da $\frac{1}{2}\theta$ auch die Fläche des Sektors OAM ist, auch als Funktionen dieses Doppelsektors aufgefaßt werden; in der Integralrechnung (296, 2)) wird gezeigt werden, daß $\frac{1}{2}u$ die Fläche des Hyperbelsektors OAH ist.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Argumenten u, θ ergibt sich in folgender Weise: Die Relation

$$\cosh u + \sinh u = e^u$$

verwandelt sich im Hinblick auf die Figur in

$$\sec\theta + \operatorname{tg}\theta = e^u;$$

die weitere Verfolgung dieses Ansatzes gibt:

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = e^u,$$

woraus

$$u = l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$$

Diese Gleichung wurde bereits 1599, also lange vor der Einführung der Hyperbelfunktionen, von *E. Wright* gefunden als mathematischer Ausdruck der Skala, nach welcher in der *Mercator*-Projektion die Punkte eines Meridians je nach ihrer geographischen Breite θ in bezug auf das Bild des Äquators angeordnet sind. Man nennt θ die „hyperbolische Amplitude" von u oder auch *Lambert*'s transzendenten Winkel*).

35. Beispiele. In den nachstehenden Beispielen ist der Differentialquotient zunächst in der Form angegeben, wie er sich bei Anwendung der Regeln unmittelbar ergibt, an zweiter Stelle in seiner einfachsten Gestalt, mit Fortlassung der Zwischenrechnungen; in den späteren Beispielen ist nur das Resultat mitgeteilt.

---

*) Da Hyperbelfunktionen sich auf verschiedenen Gebieten als zweckmäßig erwiesen, so sei angeführt, daß auch Tafeln derselben berechnet worden sind, so von *Forti*, Nuove tavole delle funzioni iperboliche, Rom 1892.

1) $$Dx^m(ax^n + b)^p = mx^{m-1}(ax^n + b)^p + px^m(ax^n + b)^{p-1} \cdot nax^{n-1} = x^{m-1}(ax^n + b)^{p-1}[(m + np)ax^n + mb].$$

2) $$D\frac{x-a}{(x-b)(x-c)} = \frac{(x-b)(x-c) - (x-a)(x-c+x-b)}{(x-b)^2(x-c)^2} = \frac{bc - ab - ac + 2ax - x^2}{(x-b)^2(x-c)^2}.$$

3) $$D\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

4) $$D(ax + b)\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = a\sqrt{ax^2 + 2bx + c} + \frac{(ax + b)^2}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{2(ax + b)^2 + ac - b^2}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}.$$

5) $$D\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 - x^2})\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) - (\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2})\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)}{(\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 - x^2})^2}$$
$$= -\frac{2a^2}{x^3}\left(1 + \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - x^4}}\right).$$

6) $$Dl\,\frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}} = \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$$
$$\cdot \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})\left(\frac{1}{2\sqrt{x+a}} + \frac{1}{2\sqrt{x+b}}\right) - (\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b})\left(\frac{1}{2\sqrt{x+a}} - \frac{1}{2\sqrt{x+b}}\right)}{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b})^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$$

7) $$De^{ax^2 + 2bx + c} = 2(ax + b)e^{ax^2 + 2bx + c}.$$

8) $Dx^m e^{-x^2} = m x^{m-1} e^{-x^2} - 2x^{m+1} e^{-x^2} = x^{m-1} e^{-x^2}(m - 2x^2).$

9) $D l \sin ax = \frac{a \cos ax}{\sin ax} = a \operatorname{cotg} ax.$

10) $D l \cos ax = -\frac{a \sin ax}{\cos ax} = -a \operatorname{tg} ax.$

11) $D l \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$

12) $D l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} \sec^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}.$

13)
$$D \operatorname{tg} x^{\sin x} = D e^{\sin x \, l \operatorname{tg} x}$$
$$= e^{\sin x \, l \operatorname{tg} x} \left(\cos x \, l \operatorname{tg} x + \frac{\sin x \sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\right)$$
$$= \operatorname{tg} x^{\sin x} (l \operatorname{tg} x^{\cos x} + \sec x).$$

14)
$$D \arcsin \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2}$$
$$= -\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

15)
$$D\left(\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + l \sqrt{1-x^2}\right) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$+ \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2 \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} \; {}^{*)}.$$

16)
$$D\big(\arcsin(a \sin x) + \arccos(a \cos x)\big)$$
$$= \frac{a \cos x}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}} + \frac{a \sin x}{\sqrt{1 - a^2 \cos^2 x}}.$$

---

*) Der Bruch $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist hier als Produkt der drei Faktoren x, $\arcsin x$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ behandelt worden.

17) $D \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$

$$= \frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}.$$

18) $D \operatorname{arc}\cos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)^2}}$

$$\cdot\frac{-a(a+b\cos x)\sin x + b(b+a\cos x)\sin x}{(a+b\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}.$$

19) $D \operatorname{arc}\sec x = D\operatorname{arc}\cos\frac{1}{x} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

20) $D \operatorname{arc}\operatorname{cosec} x = D\operatorname{arc}\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

21) $y = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^3(1+x^2)^{-\frac{3}{2}};\ y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^5}}.$

22) $y = \frac{1}{3}x^3(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^5(1+x^2)^{-\frac{5}{2}};\ y' = \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^7}}.$

23) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x;\quad y' = \cos^2 x.$

24) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x;\quad y' = \sin^2 x.$

25) $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x;\quad y' = \cos^3 x.$

26) $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x;\quad y' = \sin^3 x.$

27) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x;\quad y' = \sec^4 x.$

28) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x;\quad y' = \operatorname{tg}^4 x.$

29) $y = 2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x};\quad y' = \sin\sqrt{x}.$

30) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos(-1+2x^2);$
31) $y = \frac{1}{3}\operatorname{arc}\cos(-3x+4x^3);$
32) $y = \frac{1}{4}\operatorname{arc}\cos(1-8x^2+8x^4);$
$\Bigg\}\ y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

33) $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}};\quad y' = \frac{1}{1+x+x^2}.$

$$\left.\begin{array}{l} 34)\ y = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{1 - x^2}; \\[2ex] 35)\ y = \frac{1}{2} \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}; \\[2ex] 36)\ y = \frac{1}{2} \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}; \end{array}\right\} \quad y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

37) $y = l.\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}; \quad y' = \sec x.$

38) $y = e^x (x^2 - 2x + 2); \quad y' = e^x x^2.$

39) $y = x \operatorname{arctg} x - l\sqrt{1 + x^2}; \quad y' = \operatorname{arctg} x.$

40) $y = \frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{1}{2} x; \quad y' = \cosh^2 x.$

41) $y = \frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{1}{2} x; \quad y' = \sinh^2 x.$

42) $y = l \cosh x; \quad y' = \operatorname{tgh} x.$

43) $y = l \sinh x; \quad y' = \operatorname{cotgh} x.$

44) $y = l \cosh x - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 x; \quad y' = \operatorname{tgh}^3 x.$

§ 4. Allgemeine Sätze über den Zusammenhang einer Funktion mit ihrem Differentialquotienten.

36. Vorzeichen des Differentialquotienten. Von einer in dem Intervall (α, β) der stetigen Variablen x eindeutig definierten Funktion $f(x)$ sagt man, sie sei an der Stelle x *innerhalb* des Intervalls *wachsend*, wenn sich eine positive Zahl η so angeben läßt, daß für jedes $0 < h < \eta$

$$f(x - h) < f(x) < f(x + h). \tag{1}$$

Besitzt die Funktion an der Stelle x einen Differentialquotienten, so kann derselbe nicht negativ sein; denn aus (1) folgt

$$\frac{f(x - h) - f(x)}{-h} > 0, \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} > 0;$$

mit gegen Null konvergierendem h nähern sich die beiden Quotienten nach Voraussetzung einer gemeinsamen Grenze und diese kann nicht negativ sein, weil die Quotienten, wie klein auch h werden mag, positiv bleiben.

Die Funktion $f(x)$ heißt dagegen an der Stelle x ab-

nehmend, wenn sich ein positives η so angeben läßt, daß für alle $0 < h < \eta$

$$f(x-h) > f(x) > f(x+h). \tag{2}$$

In diesem Falle kann der Differentialquotient an der Stelle x, wenn er existiert, nicht positiv sein; denn aus (2) ergibt sich, daß

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} < 0, \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < 0,$$

und da beide Quotienten für $\lim h = 0$ gegen eine gemeinsame Grenze konvergieren, so kann diese nicht positiv sein, weil die Quotienten selbst, wie klein auch h werden mag, negativ bleiben.

An den Stellen α, β kann nur von einseitigem Wachsen oder Abnehmen die Rede sein.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich der Satz: *Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall (α, β) beständig wächst oder beständig abnimmt und an jeder Stelle einen Differentialquotienten besitzt, so kann dieser niemals negativ, beziehungsweise niemals positiv sein.*

In beiden Fällen ist also nicht ausgeschlossen, daß der Differentialquotient an einzelnen Stellen Null werden kann.

Unter den elementaren Funktionen haben wir folgende Beispiele beständig wachsender und beständig abnehmender Funktionen.

Es ist $D_x a^x = a^x \, l\, a$, folglich a^x eine beständig wachsende Funktion, wenn $a > 1$, eine abnehmende, wenn $0 < a < 1$ ist; e^x ist also wachsend.

Aus $D\, l\, x = \frac{1}{x}$ erkennt man, da $x > 0$, daß $l\, x$ eine wachsende Funktion ist.

Da $D \operatorname{tg} x = \sec^2 x$, so ist $\operatorname{tg} x$ eine wachsende Funktion; in der Tat, indem x nacheinander die Intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ durchläuft, jedoch mit Ausschluß der Grenzen, geht $\operatorname{tg} x$ beidemal durch das Intervall $(-\infty, +\infty)$.

In gleicher Weise schließt man aus $D \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$, daß $\operatorname{cotg} x$ eine beständig abnehmende Funktion ist.

Weil $D \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1 + x^2}$, so wächst arc tg x fortwährend; tatsächlich durchläuft es das Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, während x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst.

Aus $D \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{1 + x^2}$ schließt man in ähnlicher Weise auf die ständige Abnahme von arc cotg x.

37. Der Satz von Rolle. *Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle (α, β) einwertig und stetig ist und an jeder Stelle einen Differentialquotienten besitzt, wenn ferner $f(\alpha) = 0$ und $f(\beta) = 0$, so gibt es wenigstens eine Stelle zwischen α und β, an welcher der Differentialquotient $f'(x)$ verschwindet.* Diesen Satz schreibt man Rolle zu.

Behielte die Funktion den Wert Null im ganzen Intervalle (oder auch nur in einem Teile desselben) bei, so wäre sie eine konstante Funktion und der Satz bedürfte dann insofern keines Beweises, als der Differentialquotient beständig (eventuell in dem betreffenden Teile) Null wäre (21).

Wir müssen also annehmen, daß die Funktion von α aus entweder wächst oder abnimmt; aber weder das Wachsen noch das Abnehmen kann durch das ganze Intervall anhalten, soll $f(\beta) = 0$ eintreten; daher muß eine Stelle ξ zwischen α und β getroffen werden, wo das Wachsen (bzw. das Abnehmen) aufhört; diese Stelle wird dadurch charakterisiert sein, daß sich ein positives η derart angeben läßt, daß für jedes $0 < h < \eta$

$$f(\xi - h) < f(\xi) > f(\xi + h);$$

nach den Relationen (1), (2) des vorigen Artikels ist die Funktion an dieser Stelle weder wachsend noch abnehmend; ferner ist

$$\frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} > 0 \qquad \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} < 0;$$

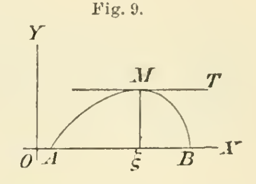
der erste Quotient kann für $\lim h = 0$ nur einen positiven oder den Grenzwert Null haben, der zweite nur einen negativen oder Null; da aber beide nach Voraussetzung einen gemeinsamen Grenzwert besitzen, so kann nur

$$f'(\xi) = 0$$

sein, womit der Satz erwiesen ist. Für den Fall, daß die Funktion von α aus abnimmt, ergeben sich ganz analoge Schlüsse.

Bei geometrischer Darstellung der Funktion hat der Satz von Rolle eine anschauliche Bedeutung; eine Kurve AB (Fig. 9), welche in den Punkten A und B die Abszissenachse schneidet und an jeder Stelle zwischen den genannten Punkten eine bestimmte Tangente hat, besitzt zwischen A und B mindestens einen Punkt M, in welchem die Tangente MT der Abszissenachse parallel läuft.

Fig. 9.



Die Voraussetzungen des obigen Satzes können auch dahin abgeändert werden, daß $f(\alpha) = f(\beta) = C$ ist; denn die Funktion $f(x) - C$ erfüllt dann die Bedingung, für $x = \alpha$ und $x = \beta$ zu verschwinden, ihr Differentialquotient ist aber wieder $f'(x)$.

Die Funktion $f(x) = (x - a)(x - b)$ hat, um Beispiele anzuführen, in dem Intervall (a, b) die Eigenschaften, welche oben vorausgesetzt werden; ihr Differentialquotient $f'(x) = 2x - a - b$ wird denn auch gleich Null an der zwischen a, b liegenden Stelle $x = \frac{a+b}{2}$. Desgleichen entspricht die Funktion $f(x) = \sin x$ in dem Intervall $(0, \pi)$ den Voraussetzungen des Rolleschen Theorems, und in der Tat verschwindet ihr Differentialquotient $f'(x) = \cos x$ an der zwischenliegenden Stelle $x = \frac{\pi}{2}$.

38. Der Mittelwertsatz. *Wenn die Funktion $f(x)$ an jeder Stelle des Intervalls (α, β) einen Differentialquotienten besitzt, so gibt es wenigstens eine Stelle zwischen α und β, an welcher der Differentialquotient $f'(x)$ gleich ist dem Differenzenquotienten*

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Dieser Satz wird als *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* bezeichnet und Cauchy zugeschrieben.

Zum Zwecke des Beweises konstruieren wir mit Hilfe von $f(x)$ die neue Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - f(\alpha) - (x - \alpha)\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

welche ebenfalls an jeder Stelle zwischen α und β einen Differentialquotienten besitzt, da

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

und die überdies die Eigenschaft hat, daß $\varphi(\alpha) = 0$ und $\varphi(\beta) = 0$ ist. Demnach erfüllt die Funktion $\varphi(x)$ die Voraussetzungen des Rolleschen Satzes und gibt es daher wenigstens eine Stelle ξ zwischen α und β, wo $\varphi'(\xi) = 0$, d. h. wo

$$(1) \qquad \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\xi).$$

Der Satz kann nun auf irgend zwei Stellen x und $x + h$, die in (α, β) enthalten sind, zur Anwendung gebracht werden; an die Stelle von ξ kommt dann ein zwischen x und $x + h$ gelegener Wert und einen solchen kann man in der Form $x + \theta h$ darstellen, wenn $0 < \theta < 1$ ist; mithin gilt:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h)$$

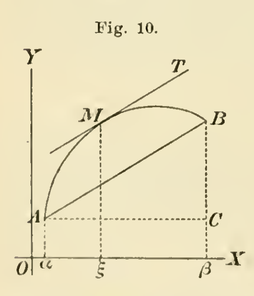
oder

$$(2) \qquad f(x+h) - f(x) = hf'(x + \theta h).$$

Diese Darstellung der Differenz zweier Funktionswerte durch einen Zwischen- oder Mittelwert des Differentialquotienten ist für die Analysis von großer Bedeutung. Einige Folgerungen mögen schon hier aus diesem Mittelwertsatze gezogen werden.

Vorher möge noch der geometrische Sinn desselben erwähnt werden in dem Falle, wo die Funktion $f(x)$ durch die Ordinaten einer Kurve dargestellt wird. Der Inhalt der Formel (1) ist dann der folgende. Besitzt die Kurve AB (Fig. 10) an jeder Stelle eine bestimmte Tangente, so gibt es zwischen A und B mindestens einen Punkt M, in welchem die Tangente MT der Sehne AB parallel ist.

Fig. 10.



An früherer Stelle (21) ist erwiesen worden, daß der Differentialquotient einer konstanten Funktion Null ist; nun kann auch die Umkehrung dieses Satzes bewiesen werden: *Wenn der Differentialquotient $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ an allen Stellen*

des Intervalls (α, β) *Null ist, so ist die Funktion in diesem Intervall konstant.*

Sind nämlich x_1, x_2 zwei Stellen aus (α, β), so ist zufolge (1)

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

wobei ξ zwischen x_1 und x_2 liegt; da aber für jedes ξ zwischen α und β $f'(\xi) = 0$ ist, so ist

$$f(x_2) - f(x_1) = 0,$$

also $f(x_1) = f(x_2)$; wenn aber jede zwei Werte von $f(x)$ aus dem Intervall (α, β) einander gleich sind, so hat die Funktion einen konstanten Wert.

Aus diesem Satze folgt der weitere: *Wenn zwei Funktionen* $f(x)$, $\varphi(x)$ *in einem Intervall* (α, β) *gleiche Differentialquotienten haben, so können sie sich nur um eine additive Konstante voneinander unterscheiden.*

Denn aus

$$f'(x) = \varphi'(x)$$

folgt auch

$$D_x[f(x) - \varphi(x)] = 0$$

und daraus

$$f(x) - \varphi(x) = C,$$

wobei C eine Konstante bedeutet.

In Artikel 36 wurde gezeigt, daß der Differentialquotient einer in dem Intervall (α, β) beständig wachsenden (abnehmenden) Funktion niemals negativ (positiv) ist; auch die Umkehrung dieses Satzes kann jetzt bewiesen werden: *Wenn der Differentialquotient von* $f(x)$ *in dem Intervall* (α, β) *niemals negativ (positiv) und auch nicht in einem Teile des Intervalls beständig Null ist, so ist die Funktion wachsend (abnehmend) in dem Sinne, daß für irgend zwei Werte* x_1, x_2 *aus* (α, β), *welche wachsend geordnet sind, die Relation* $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ *stattfindet.*

Bedeutet x' einen Wert zwischen x_1 und x_2, so daß x_1, x', x_2 wachsend geordnet sind, so ist auf Grund der (ersten) Voraussetzung laut (1)

$$f(x') - f(x_1) = (x' - x_1) f'(\xi_1) \geqq 0$$
$$f(x_2) - f(x') = (x_2 - x') f'(\xi_2) \geqq 0,$$

wobei ξ_1 einen Wert zwischen x_1, x', ξ_2 einen Wert zwischen x', x_2 bedeutet: daraus folgt, daß

$$f(x_1) \leqq f(x') \leqq f(x_2);$$

aber nicht für alle x' können *beide* Gleichheitszeichen gelten, weil sonst für alle Werte x' zwischen x_1 und x_2 die Beziehung $f(x_1) = f(x') = f(x_2)$ stattfände, die zur Folge hätte, daß in diesem Teile von (α, β) $f'(x)$ beständig Null wäre, was gegen die Voraussetzung verstößt. Es gibt also sicher einen Wert x', für den wenigstens eines der beiden Ungleichheitszeichen gilt und dann ist sofort

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Der zweite Teil des Beweises ist ebenso zu führen.

39. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz. *Wenn die beiden Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ in dem Intervalle (α, β) Differentialquotienten besitzen, von welchen der letztere, $\varphi'(x)$, an keiner Stelle Null ist, so gibt es mindestens einen Wert ξ zwischen α und β derart, daß* $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$. Dieser Satz wird der *verallgemeinerte Mittelwertsatz* genannt; er kommt zuerst bei Cauchy*) vor, wenn auch mit der speziellen Voraussetzung, daß $f(\alpha) = \varphi(\alpha) = 0$ sei.

Um ihn zu beweisen, konstruiere man aus $f(x)$ und $\varphi(x)$ die neue Funktion

$$\psi(x) = f(x) - f(\alpha) - (\varphi(x) - \varphi(\alpha)) \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)};$$

der Bruch, welcher im Ausdrucke dieser Funktion vorkommt, hat sicher eine bestimmte Bedeutung, da $\varphi(\alpha)$ nicht gleich sein kann $\varphi(\beta)$, indem sonst nach dem Satze von Rolle $\varphi'(x)$ an einer Stelle zwischen α und β verschwinden müßte, entgegen der Voraussetzung. Die Funktion $\psi(x)$ hat nun im Intervall (α, β) einen Differentialquotienten, nämlich

$$\psi'(x) = f'(x) - \varphi'(x) \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)},$$

und es ist $\psi(\alpha) = 0$, $\psi(\beta) = 0$; folglich existiert nach dem

*) Leçons sur le calcul différentiel, Paris 1829, p. 33.

Satze von Rolle mindestens eine Stelle ξ zwischen α und β wo $\psi'(\xi) = 0$, d. h. wo

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{1}$$

Die Formel kann wieder auf zwei beliebige Stellen x und $x + h$ aus (α, β) angewandt werden und lautet dann:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)}; \quad (0 < \theta < 1). \tag{2}$$

Setzt man $\varphi(x) = x$, wodurch den Voraussetzungen des Theorems Genüge geleistet ist, so gehen die Formeln (1) und (2) in die gleichbezeichneten in Art. 38 über.

§ 5. Die höheren Differentialquotienten und Differentiale.

40. Begriff des n-ten Differentialquotienten. Wenn die in dem Intervall (α, β) stetige Funktion $f(x)$ an allen Stellen des Intervalles einen Differentialquotienten besitzt, so konstituieren die Werte dieses Differentialquotienten mit den zugehörigen Werten der Variablen eine neue Funktion im Intervall (α, β), welche die *Ableitung* oder *Derivierte* oder auch der *Differentialquotient* von $f(x)$ genannt und mit

$$f'(x) \quad \text{oder} \quad D_x f(x)$$

bezeichnet wird.

Ist $f'(x)$ wieder stetig im ganzen Intervall (α, β) oder in einem Teile desselben oder mit Ausschluß einzelner Stellen, und läßt es wie $f(x)$ eine Ableitung zu, so wird diese die *zweite Ableitung* oder der *zweite Differentialquotient* von $f(x)$ genannt und mit

$$f''(x) \quad \text{oder} \quad D_x^2 f(x)$$

bezeichnet. Begrifflich stellt dies Zeichen also jene Funktion dar, welche an der Stelle x bestimmt ist durch

$$\lim_{h = \pm 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

So fortschreitend gelangt man zu der dritten, vierten, ... $n$ten Ableitung oder zu dem dritten, vierten, ... $n$ten Differentialquotienten; die dafür gebrauchten Zeichen sind:

$$f'''(x), \quad f^{IV}(x), \ldots f^{(n)}(x)$$

oder

$$D_x^3 f(x), \quad D_x^4 f(x), \ldots D_x^n f(x).$$

Sofern die Voraussetzung der Stetigkeit und Differenzierbarkeit erhalten bleibt, hat die Bildung der höheren Differentialquotienten keine Schranke.

Wenn man aus dem Gebiet der reinen Analysis auf dasjenige der Anwendungen sich begibt, wobei x und $f(x)$ die Maßzahlen für gewisse einander bedingende Größen bedeuten, können auch die höheren Differentialquotienten eine bestimmte Bedeutung erlangen. Bei der phoronomischen Auffassung, bei welcher $f(x)$ den in der Zeit x zurückgelegten geradlinigen Weg eines in Bewegung begriffenen Punktes darstellt, kommt zunächst dem zweiten Differentialquotienten eine wichtige Bedeutung zu.

Es ist **22**, 1) erklärt worden, daß der erste Differentialquotient $f'(x)$ die im letzten Augenblicke der Zeit x herrschende Geschwindigkeit ausdrückt. Ist die Bewegung so beschaffen, daß die Geschwindigkeit innerhalb beliebiger, aber gleicher Zeitintervalle um Gleiches sich ändert, so nennt man die während der Zeiteinheit erfolgende Geschwindigkeitsänderung *Beschleunigung* und die Bewegung selbst eine *gleichförmig beschleunigte* (oder gleichförmig verzögerte, wenn die Beschleunigung negativ, die Geschwindigkeit also mit der Zeit abnehmend ist). Auf eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung ist der Begriff der Beschleunigung nicht unmittelbar zu übertragen; der Quotient

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

aus der während des Zeitintervalls $(x, x+h)$ erfolgten Geschwindigkeitsänderung durch die Größe h des Zeitintervalls bedeutet die während dieses Zeitintervalls *durchschnittlich* auf die Zeiteinheit entfallende Geschwindigkeitsänderung; je kleiner h, desto geringer die Ungleichförmigkeit in der Beschleunigung, desto näher kommt die Bedeutung des angeschriebenen Quotienten der einer Beschleunigung, und konvergiert derselbe mit gegen die Grenze Null abnehmendem h gegen einen bestimmten Grenzwert, so wird dieser Grenzwert

$$\lim_{h=+0} \frac{f''(x+h) - f'(x)}{h}$$

als die im letzten Augenblicke der Zeit x herrschende Beschleunigung erklärt.

Drückt also $f(x)$ den bei geradliniger Bewegung in der Zeit x zurückgelegten Weg aus, so hat der zweite Differentialquotient $f''(x)$ die Bedeutung der im letzten Augenblicke der Zeit x herrschenden Beschleunigung.

41. Bildung höherer Differentialquotienten. Zur Bildung der höheren Differentialquotienten einer Funktion bedarf es neuer Regeln nicht, da es auf wiederholte Bildung des ersten Differentialquotienten ankommt. Wenn es sich jedoch darum handelt, für den allgemeinen oder $n$ten Differentialquotienten eine independente Formel aufzustellen, dann führt das direkte Verfahren nur in einigen wenigen Fällen zum Ziele. In einigen anderen Fällen kann man sich dadurch helfen, daß man die Funktion als *Summe* oder als *Produkt* einfacher Funktionen darstellt, deren allgemeine Differentialquotienten in independenter Form bekannt sind.

I. *Direktes Verfahren.* 1) Für $f(x) = x^m$ ergibt sich durch sukzessive Differentiation

$$Dx^m = mx^{m-1}, \quad D^2x^m = m(m-1)x^{m-2}, \ldots$$

so daß

$$D^n x^m = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}. \tag{1}$$

Läßt man $ax + b$ an die Stelle von x treten, so ändert sich die Formel nur insoweit, daß rechts der Faktor a^n hinzukommt, weil bei jedesmaliger Differentiation mit dem Differentialquotienten von $ax + b$, d. h. mit a multipliziert werden muß (**25** (7)); es ist also

$$D^n(ax+b)^m = m(m-1)\cdots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}. \tag{2}$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so wird der $m$te Differentialquotient von x^m eine Konstante:

$$D^m x^m = m(m-1)\cdots 1$$

und alle höheren sind Null. In jedem andern Falle kann die Bildung der Differentialquotienten unbeschränkt fortgesetzt werden.

2) Für $f(x) = l\,x$ hat man $D\,l\,x = \frac{1}{x} = x^{-1}$, somit

$$D^n l\,x = D^{n-1} x^{-1};$$

hier tritt nun die Formel (1) in Kraft, und zwar ist $m = -1$ und n durch $n - 1$ zu ersetzen, so daß

$$D^n l\,x = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{x^n}; \tag{3}$$

auch diese Formel kann dadurch verallgemeinert werden, daß man $ax + b$ an die Stelle von x treten läßt, und es wird

$$D^n\, l\,(ax + b) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1)\, a^n}{(ax + b)^n}. \tag{4}$$

3) Aus der Formel $De^x = e^x$ folgt unmittelbar

$$D^n e^x = e^x; \tag{5}$$

dagegen ist $De^{kx} = ke^{kx}$ und

$$D^n e^{kx} = k^n e^{kx};$$

und weil $a^x = e^{x\,l\,a}$, so ergibt sich hieraus

$$D^n a^x = (l\,a)^n a^x. \tag{6}$$

4) Die Formel $D \sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ zeigt, daß die einmalige Differentiation des $\sin x$ der Vermehrung des Arguments um $\frac{\pi}{2}$ äquivalent ist; infolgedessen wird n-malige Differentiation einer Vermehrung des Arguments um $n\,\frac{\pi}{2}$ äquivalent sein; es ist also

$$D^n \sin x = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

Durch denselben Schluß ergibt sich aus $D \cos x = -\sin x$ $= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$:

$$D^n \cos x = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right). \tag{8}$$

Vermöge der Periodizität nehmen die rechten Seiten der Formeln (7) und (8) nur je vier verschiedene Werte an, nämlich die $n = 0, 1, 2, 3$ entsprechenden, und diese in zyklischer Wiederholung.

II. *Zerlegung in Teile.* Hat man $f(x)$ als Summe zweier oder mehrerer Funktionen dargestellt, etwa $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, so ist (**24**, (1))

$$D^n f(x) = D^n \varphi(x) + D^n \psi(x).$$

1) Es ist $\frac{1}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a + bx} + \frac{1}{a - bx}\right]$; mithin

$$D^n \frac{1}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2a}\left[D^n (a + bx)^{-1} + D^n (a - bx)^{-1}\right];$$

auf die Ausdrücke der rechten Seite ist die Formel (2) anwendbar, und man findet

$$(9)\quad D^n \frac{1}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdots n \cdot b^n}{2a}\left[\frac{1}{(a + bx)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a - bx)^{n+1}}\right].$$

Für $a = 1$ und $b = i$ ergibt sich hieraus

$$D^n \frac{1}{1 + x^2} = \frac{(-1)^n 1 \cdot 2 \cdots n}{2i}\left[\frac{1}{(x - i)^{n+1}} - \frac{1}{(x + i)^{n+1}}\right].$$

Diese Formel kann dazu verwendet werden, den allgemeinen Differentialquotienten von $\operatorname{arc\,tg} x$ zu bestimmen; da nämlich $D \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1 + x^2}$, so ist $D^n \operatorname{arc\,tg} x = D^{n-1} \frac{1}{1 + x^2}$, also auf Grund der letzten Formel:

$$(10)\qquad D^n \operatorname{arc\,tg} x = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdots (n - 1)}{2i}\left[\frac{1}{(x - i)^n} - \frac{1}{(x + i)^n}\right].$$

2) Es ist $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\{\cos(a + b)x + \cos(a - b)x\}$, mithin

$$(11)\qquad D^n \cos ax \cos bx = \frac{(a + b)^n}{2} \cos\left[(a + b)x + n\frac{\pi}{2}\right] + \frac{(a - b)^n}{2} \cos\left[(a - b)x + n\frac{\pi}{2}\right].$$

III. *Zerlegung in Faktoren.* Die Funktion $y = f(x)$ sei in zwei Faktoren $u = \varphi(x)$ und $v = \psi(x)$ zerlegbar, für welche der allgemeine Ausdruck des $r$ten Differentialquotienten bekannt ist. Durch sukzessive Differentiation ergibt sich, wenn man die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten von y, u, v mit y', u', v'; y'', u'', v''; ... bezeichnet:

$$\begin{aligned} y' &= u' v + u v' \\ y'' &= u'' v + 2 u' v' + u v'' \\ y''' &= u''' v + 3 u'' v' + 3 u' v'' + u v'''; \end{aligned}$$

woraus der Schluß gezogen werden kann, daß

$$(12)\qquad y^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)};$$

in der Tat, gilt diese Formel für n, so gilt sie auch für $n+1$, denn eine neuerliche Differentiation gibt

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \binom{n}{1}u^{(n)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-1)}v'' + \cdots + \qquad u'v^{(n)}$$

$$+ u^{(n)}v' + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v'' + \cdots + \binom{n}{1}u'v^{(n)} + uv^{(n+1)}$$

und weil allgemein $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$, so ist

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v + \binom{n+1}{1}u^{(n)}v' + \binom{n+1}{2}u^{(n-1)}v'' + \cdots + uv^{(n+1)};$$

da nun das Bildungsgesetz auf direktem Wege für $n = 1, 2, 3$ erwiesen ist, so gilt es allgemein. Die Gleichung (12), unter dem Namen der Leibnizschen *Formel* bekannt, läßt eine kurze symbolische Darstellung zu; schreibt man nämlich

$$(12^*)\qquad D^n(uv) = (u+v)^n,$$

so bleibt nur zu beachten, daß man in den Gliedern der Potenzentwicklung die Potenzexponenten in Ordnungsexponenten von Differentialquotienten zu verwandeln und die Endglieder $u^n v^0$ und $u^0 v^n$ durch $u^{(n)}v$, bzw. $uv^{(n)}$ zu ersetzen hat.

Als Beispiel der Anwendung der Formel (12) möge dieselbe Funktion gewählt werden, welche in II. 2) als Summe dargestellt worden ist, nämlich $\cos ax \cos bx$; man erhält unmittelbar

$$D^n(\cos ax \cos bx) = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)\cos bx$$

$$+ \binom{n}{1} a^{n-1}b \cos\left(ax + \overline{n-1}\,\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 \cos\left(ax + \overline{n-2}\,\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(bx + 2\,\frac{\pi}{2}\right) + \cdots$$

$$\cdots + b^n \cos ax \cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right).$$

42. Die höheren Differentiale. Wir nehmen den in 23 entwickelten Begriff des Differentials einer Funktion $f(x)$ wieder auf, wonach

$$(1)\qquad df(x) = f'(x)\,dx;$$

die begriffliche Bedeutung desselben geht dahin, daß es die Änderung, welche die Funktion bei dem Übergange von x zu $x + dx$ erleidet, um so genauer darstellt, je kleiner dx ist, ja daß man durch Einschränkung von dx den Unterschied zwischen der Änderung der Funktion und ihrem Differential nicht nur an sich, sondern auch im Verhältnis zu dx beliebig klein machen kann.

An dieser Stelle möge auf die Verschiedenheit der Bedeutung hingewiesen werden, welche den Zeichen dx und $df(x)$ in der Gleichung (1) einerseits und in dem Leibnizschen Symbol für den Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ anderseits zukommt. Hier bedeuten dx und $df(x)$ zugleich gegen die Grenze Null konvergierende, also *unendlich klein werdende* Größen und das Symbol $\frac{df(x)}{dx}$ selbst den *Grenzwert* ihres Quotienten; dort bedeutet dx eine endliche und $df(x)$ eine dem dx proportionale ebenfalls endliche Größe, beide *sehr klein* in Ansehung der endlichen Rechnungsgrößen wie etwa x und $f(x)$ selbst; der Grad der Kleinheit ist dabei relativ und abhängig von der Schärfe, in welcher die bezügliche Rechnung ausgeführt werden soll. So ist z. B. (30)

$$d \log \sin x = \frac{\operatorname{cotg} x}{l\,10} dx = M \operatorname{cotg} x\,dx;$$

für $x = \operatorname{arc} 30^0 = \frac{\pi}{6}$, $dx = \operatorname{arc} 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}000\,290\,88\ \ldots$ ergibt sich bei Abkürzung auf 5 Dezimalen

$$d \log \sin 30^0 = 0{,}434\,294\,4 \cdot 1{,}732\,050\,6 \cdot 0{,}000\,290\,9$$
$$= 0{,}000\,22$$

und dies stimmt mit der in fünfstelligen Tafeln bei $\log \sin 30^0$ angegebenen Differenz pro Minute überein; selbst bei einer auf 7 Dezimalen angelegten Rechnung erhält man

$$d \log \sin 30^0 = 0{,}000\,218\,8$$

nur in der siebenten Stelle abweichend von der in siebenstelligen Tafeln bei $\log \sin 30^0$ angegebenen Differenz $0{,}000\,218\,7$.

Die *mit einem feststehenden* dx für verschiedene Werte von x gebildeten Werte von $df(x)$ definieren eine Funktion

von x, und von dieser kann neuerdings das Differential gebildet werden; man bezeichnet es statt mit $d(df(x))$ kurz mit $d^2f(x)$ und hat

$$d^2f(x) = D\{f'(x)dx\}dx = f''(x)dx^2. \tag{2}$$

Hiernach ist das *zweite Differential* formell das Produkt aus dem zweiten Differentialquotienten mit dem Quadrat des Differentials der Variablen, begrifflich aber stellt es den Unterschied der ersten Differentiale an den Stellen x und $x + dx$ mit Außerachtlassung von Größen höherer Kleinheitsordnung als dx^2 dar.

Aus der Definitionsgleichung (2) ergibt sich als Folgerung

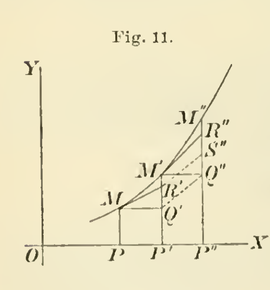
$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}; \tag{3}$$

die rechte Seite ist das von Leibniz für den zweiten Differentialquotienten gebrauchte Symbol, gleichbedeutend also mit $f''(x)$ und $D_x{}^2f(x)$.

Wird dx als gegen Null konvergierende, also als unendlich klein werdende Größe von der ersten Ordnung aufgefaßt, so ist das erste Differential $df(x) = f'(x)dx$, vorausgesetzt, daß $f'(x)$ einen bestimmten von Null verschiedenen Wert hat, ebenfalls eine unendlich klein werdende Größe der ersten, das zweite Differential $d^2f(x) = f''(x)dx^2$ unter einer analogen Voraussetzung über $f''(x)$ eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung.

Bei der Darstellung der Funktion $f(x)$ durch die Ordinaten einer Kurve kann auch das zweite Differential durch eine Liniengröße verdeutlicht werden; bezüglich des ersten Differentials ist es am Schlusse von 23 geschehen. Ist (Fig. 11) $OP = x$, $OP' = x + dx$, $OP'' = x + 2\,dx$, MR' die Tangente in M, $M'R''$ die Tangente in M', MQ' sowie $M'Q''$ parallel zu OX, so hat $Q'R'$ die Bedeutung des Differentials an der Stelle x, $Q''R''$ die Bedeutung des mit dem nämlichen dx gebildeten Differentials an der Stelle $x + dx$; der Unterschied dieser zwei Strecken, welcher nach Konstruktion des Parallelo-

Fig. 11.



gramms $Q'Q''S''R'$ in der Strecke $S''R''$ erhalten wird, ist mit Außerachtlassung von Größen höherer Kleinheitsordnung als dx^2 das zweite Differential.

Man kann in der Bildung der Differentiale fortschreiten und erhält — immer unter der Voraussetzung *eines feststehenden* dx — aus (2) das dritte Differential

$$d^3 f(x) = D_x\{f''(x)dx^2\}dx = f'''(x)dx^3,$$

und so fortfahrend allgemein für das $n$te Differential den Ausdruck:

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{4}$$

Daraus ergibt sich die von Leibniz eingeführte Bezeichnung für den $n$ten Differentialquotienten:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Jeder Formel zwischen den Differentialquotienten mehrerer Funktionen einer Variablen x läßt sich eine Formel zwischen den Differentialen zuordnen und es bedarf, um zu der letzteren zu gelangen, nur der Multiplikation der ersteren mit einer entsprechend hohen Potenz des Differentials dx der Variablen; so folgt aus

$$D_x\{\varphi(x)\psi(x)\} = \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)$$

$$D_x \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)^2}$$

durch Multiplikation mit dx:

$$d\{\varphi(x)\psi(x)\} = \psi(x)\cdot d\varphi(x) + \varphi(x)\cdot d\psi(x)$$

$$d\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x)\cdot d\varphi(x) - \varphi(x)\cdot d\psi(x)}{\psi(x)^2};$$

aus (41, III.)

$$D^n(uv) = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}$$

durch Multiplikation mit dx^n:

$$d^n(uv) = d^n u\cdot v + \binom{n}{1} d^{n-1}u\cdot dv + \binom{n}{2} d^{n-2}u\cdot d^2 v + \cdots + u d^n v.$$

§ 6. Transformation der unabhängigen Variablen.

43. Die Differentialquotienten in bezug auf eine neue Variable. Es ist eines der wichtigsten Hilfsmittel analytischer Untersuchungen, daß man an die Stelle der Variablen, welche in einem Problem auftreten, andere einführt, die mit ihnen in einem gegebenen Zusammenhange stehen. Man bezeichnet diesen Prozeß als *Transformation der Variablen.*

Hier soll zunächst der einfachste Fall behandelt werden, darin bestehend, daß in einem funktionalen Zusammenhange zwischen zwei Variablen y, x, in welchem x die Rolle der *unabhängigen* Veränderlichen spielt, an die Stelle von x eine neue unabhängige Variable treten soll. Er erscheint in zwei verschiedenen Formen, welche nachstehend getrennt behandelt werden.

I. *Irgend eine Funktion* y der Variablen x ist mit x und ihren Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ zu einem Ausdruck oder zu einer Relation verbunden; an die Stelle von x wird u als neue unabhängige Variable eingeführt durch die Transformationsgleichung

$$x = \varphi(u); \tag{1}$$

wie gestaltet sich der Ausdruck oder die Relation in den Variablen y, u und den neuen Differentialquotienten $\frac{dy}{du}, \frac{d^2y}{du^2} \cdots$?

Durch Vermittlung von (1) wird y zur zusammengesetzten Funktion von u, daher ist (28)

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du};$$

bei neuerlicher Differentiation in bezug auf u ist darauf zu achten, daß auch $\frac{dy}{dx}$ durch Vermittlung von (1) Funktion von u ist; daher hat man weiter

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{du^2}$$

$$\frac{d^3y}{du^3} = \frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{du}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2} + \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{du^3};$$

. . . .

Die in diesen Gleichungen auftretenden Differentialquotienten von x sind aus der Transformationsgleichung bestimmbar; wir bringen dies zum Ausdruck, indem wir schreiben

$$\frac{dy}{du} = \varphi'(u)\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \varphi'(u)^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi''(u)\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{du^3} = \varphi'(u)^3\,\frac{d^3y}{dx^3} + 3\,\varphi'(u)\varphi''(u)\,\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi'''(u)\,\frac{dy}{dx};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

daraus ergibt sich durch sukzessive Auflösung:

$$(2)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{du}}{\varphi'(u)} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\varphi'(u)\dfrac{d^2y}{du^2} - \varphi''(u)\dfrac{dy}{du}}{\varphi'(u)^3} \\[2ex] \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{\left[\varphi'(u)\dfrac{d^3y}{du^3} - \varphi'''(u)\dfrac{dy}{du}\right]\varphi'(u) - 3\left[\varphi'(u)\dfrac{d^2y}{du^2} - \varphi''(u)\dfrac{dy}{du}\right]\varphi''(u)}{\varphi'(u)^5} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ersetzt man in dem vorgelegten Ausdruck oder in der zu transformierenden Relation x durch $\varphi(u)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... durch die eben gefundenen Ausdrücke, so ist die Aufgabe gelöst.

II. In einer *gegebenen Funktion*

$$(3) \qquad y = f(x)$$

ist mittels der Transformationsgleichung (1) u als unabhängige Variable einzuführen; wie stellen sich die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... in der neuen Variablen dar?

Die Einführung von u in (3) gibt

$$(4) \qquad y = f[\varphi(u)] = \psi(u),$$

wo nunmehr ψ das Zeichen für eine *bekannte* Funktion ist; es können also jetzt in (2) auch die Differentialquotienten von y in bezug auf u bestimmt werden, und man erhält

$$(5)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(u)}{\varphi'(u)} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u)}{\varphi'(u)^3} \\[2ex] \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{[\varphi'(u)\psi'''(u) - \varphi'''(u)\psi'(u)]\varphi'(u) - 3[\varphi'(u)\psi''(u) - \varphi''(u)\psi'(u)]\varphi''(u)}{\varphi'(u)^5} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Damit wäre die vorgelegte Aufgabe gelöst; den Formeln (5) läßt sich aber eine bemerkenswerte Gestalt geben, an der in der Folge festgehalten werden soll. Multipliziert man in der ersten Gleichung Zähler und Nenner mit du, in der zweiten mit du^3, in der dritten mit $du^5, \dots$ und beachtet, daß $\varphi'(u)du = d\varphi(u) = dx$, $\varphi''(u)du^2 = d^2\varphi(u) = d^2x, \dots$, so schreiben sich die Formeln (5) wie folgt:

$$(6)\qquad \begin{cases} D_x y = \dfrac{dy}{dx} \\[2ex] D_x^2 y = \dfrac{dx\,d^2y - d^2x\,dy}{dx^3} \\[2ex] D_x^3 y = \dfrac{(dx\,d^3y - d^3x\,dy)dx - 3(dx\,d^2y - d^2x\,dy)d^2x}{dx^5}. \end{cases}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind als *wirkliche Quotienten aus Differentialen* anzusehen, und diese Differentiale beziehen sich auf eine *beliebige*, alle jedoch auf dieselbe unabhängige Variable. Diese Formeln (6) werden dann zur Anwendung kommen, wenn in dem funktionalen Zusammenhange zwischen y und x die unabhängige Variable noch der freien Wahl überlassen bleiben soll. Entscheidet man sich für x, so ist dx als *feststehende* Größe zu behandeln, infolgedessen $d^2x = 0$, $d^3x = 0, \dots$ zu setzen; dann führen (6) auf die Gleichungen

$$D_x y = \frac{dy}{dx}, \quad D_x^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad D_x^3 y = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots,$$

deren Inhalt ein formaler ist. Wählt man dagegen y als unabhängige Variable, vertauscht also die Rollen zwischen y und x, so gilt dy als *feststehend* und ist somit $d^2y = 0$, $d^3y = 0, \dots$; führt man dies in den Formeln (6) ein und dividiert jedesmal Zähler und Nenner durch die entsprechende (1., 3., 5., ...) Potenz von dy, so kommt

$$(7) \qquad \begin{cases} D_x y = \dfrac{1}{D_y x} \\ D_x^2 y = -\dfrac{D_y^2 x}{\{D_y x\}^3} \\ D_x^3 y = \dfrac{3\{D_y^2 x\}^2 - D_y x \cdot D_y^3 x}{\{D_y x\}^5}. \end{cases}$$

Die erste dieser Formeln ist die notwendige Wiederkehr des Satzes in 27.

44. Beispiele. Die Anwendung der gewonnenen Formeln mögen die folgenden Beispiele erläutern.

1) Zwischen y, x und den beiden ersten Differentialquotienten bestehe die Beziehung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{x}{1 - x^2} \frac{d y}{d x} + \frac{y}{1 - x^2} = 0;$$

wie gestaltet sich dieselbe, nachdem an die Stelle von x die unabhängige Variable u mittels der Gleichung

$$x = \cos u$$

eingeführt worden ist?

Aus den Formeln (2) ergibt sich

$$\frac{d y}{d x} = -\frac{\frac{d y}{d u}}{\sin u}, \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{-\sin u \cdot \frac{d^2 y}{d u^2} + \cos u \cdot \frac{d y}{d u}}{-\sin^3 u}$$

und durch Eintragung dieser und des Wertes von x in die gegebene Relation verwandelt sich diese in

$$\frac{d^2 y}{d u^2} + y = 0.$$

2) Die zweideutige, in dem Intervall $(-a, +a)$ reelle Funktion

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

kann durch die Substitution

$$x = a \sin u$$

in eine eindeutige, nämlich

$$y = b \cos u$$

umgewandelt werden, und zwar ergibt sich der positive Zweig in dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, der negative Zweig in dem

Intervall $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ von u. Es sind die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ in der Variablen u darzustellen.

Auf Grund der Formeln (5) erhält man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg} u, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2\cos^3 u}.$$

3) Der Ausdruck

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

welcher unter der Voraussetzung gebildet ist, daß x als unabhängige Variable gilt, soll so umgestaltet werden, daß die Wahl der unabhängigen Variablen noch freisteht.

Zu diesem Zwecke setze man für $\frac{dy}{dx} = D_x y$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = D_x^2 y$ die Werte aus (6) ein, und nach einfacher Umgestaltung ergibt sich:

$$\varrho = \frac{[dx^2 + dy^2]^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - d^2x\,dy}.$$

4) Durch die Gleichung

$$x = a \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{y(2a-y)},$$

in welcher die zyklometrische Funktion mit ihrem Hauptwert und die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, ist x als eindeutige explizite Funktion von y gegeben. Es sollen die Differentialquotienten von y in bezug auf x, d. i. $D_x y, D_x^2 y, \ldots$ berechnet werden.

Aus der gegebenen Gleichung können die Differentialquotienten von x in bezug auf y unmittelbar bestimmt werden, nämlich

$$D_y x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a-y}{a}\right)}} - \frac{a-y}{\sqrt{y(2a-y)}} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}$$

$$D_y^2 x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a-y}{y}} \cdot \frac{2a-y+y}{(2a-y)^2} = \frac{a}{(2a-y)^2}\sqrt{\frac{2a-y}{y}};$$

setzt man diese Werte in die Formeln (7) ein, so findet sich

$$D_x y = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$$

$$D_x^2 y = -\frac{a}{(2a-y)^2}\sqrt{\frac{2a-y}{y}} \cdot \left(\frac{2a-y}{y}\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{a}{y^2}.$$

Zu bemerken ist, daß hierbei $D_x y$, $D_x^2 y$ als Funktionen von y dargestellt sind im Gegensatze zu dem Falle, wo ursprünglich y als explizite Funktion von x gegeben ist.

5) Zu zeigen, daß die Gleichung

$$(a^2 + x^2)\frac{d^2 y}{d x^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

durch die Substitution $x = a \operatorname{tg} u$ übergeht in

$$\frac{d^2 y}{d u^2} = 0.$$

6) Zu zeigen, daß sich die Gleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

durch die Substitution $x = e^u$ verwandelt in

$$\frac{d^2 y}{d u^2} + n^2 y = 0.$$

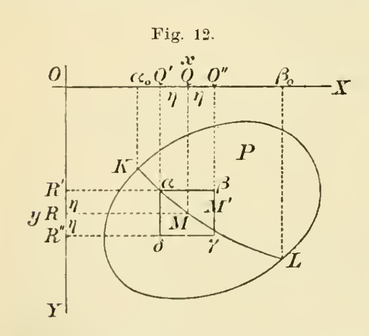
Dritter Abschnitt.

Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen.

§ 1. Partielle Differentialquotienten und Differentiale. Das totale Differential.

45. Stetigkeit der Funktionen mehrerer Variablen. Es sei ein Bereich P der beiden unabhängigen Variablen x, y gegeben (8) und auf diesem Bereiche z als eindeutige Funktion dieser Variablen definiert: $z = f(x, y)$ (11). Man kann den Bereich P durch einen Teil der auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogenen Ebene geometrisch darstellen so, daß jedem Punkt M (Fig. 12) welcher innerhalb oder auf der Begrenzung dieses Teiles liegt, eine Wertverbindung x/y entspricht, welche dem Bereiche angehört. Durch Zuhilfenahme einer dritten Achse wird es möglich, auch den zu x/y gehörigen Funktionswert z in die Darstellung einzubeziehen; diese dritte Achse möge im Ursprung O auf der Ebene XOY senkrecht stehen und ihre positive Richtung OZ nach oben, die negative OZ' nach unten wenden; aus M werde nun eine Parallele zu OZ oder OZ' geführt, je nachdem z positiv oder negativ ist, und auf ihr die Länge von $|z|$ Einheiten abgetragen; der Endpunkt F dieser Parallelen, die man *Applikate* von F nennt, kann dann zur Darstellung von z an der Stelle x/y dienen.

Fig. 12.



Läßt man x ein Intervall (α_0, β_0) stetig durchlaufen und ordnet ihm Werte y zu, welche eine stetige Funktion von x konstituieren, jedoch so, daß die Wertverbindung x/y oder der Punkt x/y beständig dem Bereich angehört, so beschreibt der

Punkt eine den Bereich P durchsetzende Kurve KL. Da y dabei eine Funktion von x ist, so erscheint $z = f(x, y)$ in dieser Auffassung als Funktion von x allein, und ist es eine *stetige* Funktion von x (17), so beschreibt der Punkt $x/y/z$ oder F eine *Kurve im Raume;* wir wollen dann sagen, $z = f(x, y)$ *sei längs der Kurve KL stetig.*

Ist $z = f(x, y)$ längs jeder den Bereich P durchsetzenden Kurve stetig, so heißt $f(x, y)$ eine im Bereiche P stetige Funktion.

Von den Eigenschaften einer solchen Funktion heben wir die folgende hervor.

Wenn die Funktion $f(x, y)$ in dem Bereiche P stetig ist, so läßt sich an jeder Stelle x/y innerhalb des Bereichs zu einem beliebig klein festgesetzten positiven ε ein hinreichend kleines positives η bestimmen derart, daß für jede Wertverbindung x'/y', für welche $|x' - x| < \eta$ und $|y' - y| < \eta$,

$$(1) \qquad |f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon.$$

In der geometrischen Darstellung hat dieser Satz die Bedeutung, daß zu dem Punkte $M(x/y)$ als Mittelpunkt eine Umgebung $\alpha\beta\gamma\delta$ in Form eines Quadrates von einer so kleinen Seite 2η sich konstruieren läßt, derart, daß der zu einem beliebigen Punkte M' dieser Umgebung gehörige Funktionswert sich von dem zu M gehörigen dem Betrage nach um weniger als ε unterscheidet.

Die Richtigkeit des Satzes geht aus der Definition der Stetigkeit im Bereiche P hervor. Auf jeder durch P geführten *Richtung* läßt sich zu jeder Seite von M ein Grenzpunkt, M_1 zur einen, M_2 zur anderen, angeben, derart, daß für jeden zwischen M_1, M_2 auf dieser Richtung liegenden Punkt die Beziehung (1) gilt (17 (1)). Denkt man sich dies für alle Richtungen ausgeführt, so wird es unter den Grenzpunkten einen geben, welcher am wenigsten von M abweicht, und dieser bestimmt die verlangte Umgebung*).

Man bezeichnet die in dem Satze ausgesprochene Eigenschaft als Stetigkeit der Funktion $f(x, y)$ *an der Stelle x/y;*

*) Man lege durch diesen Punkt einen Kreis vom Zentrum M und schreibe diesem ein nach den Achsen orientiertes Quadrat ein.

gewöhnlich nimmt man sie zum Ausgangspunkte und erklärt dann $f(x, y)$ als stetig *im Bereiche* P, wenn es an *jeder* Stelle desselben stetig ist. Übrigens kann man den Inhalt des Satzes auch in der Form ausdrücken, es sei der zu der Stelle x/y gehörige Funktionswert $f(x, y)$ der Grenzwert von $f(x', y')$ bei *beliebiger* unaufhörlicher Annäherung von x'/y' an x/y, in Zeichen

$$\lim_{x'=x,\ y'=y} f(x', y') = f(x, y). \tag{2}$$

Ist $f(x, y)$ eine in dem Bereiche P stetige Funktion, so ist der Ort der Punkte F, welche die Werte der Funktion in dem oben entwickelten Sinne darstellen, eine *Fläche* und $z = f(x, y)$ wird die *Gleichung* dieser Fläche genannt.

Von einer Funktion $u = \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, welche für einen gewissen Bereich der n Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ eindeutig definiert ist, wird man in Analogie mit der für eine Funktion zweier Variablen hervorgehobenen Eigenschaft sagen, sie sei an der *Stelle* oder in dem *Punkte* $x_1/x_2/\ldots/x_n$ stetig, wenn sich zu einem beliebig kleinen positiven ε ein hinreichend kleines positives η so bestimmen läßt, daß für jede Wertverbindung $x_1'/x_2'/\ldots/x_n'$, für welche

$$|x_1' - x_1| < \eta, \quad |x_2' - x_2| < \eta, \ldots |x_n' - x_n| < \eta,$$

die Beziehung besteht:

$$|f(x_1', x_2', \ldots x_n') - f(x_1, x_2, \ldots x_n)| < \varepsilon;$$

und die Funktion wird weiter als stetig im *Bereiche* gelten, wenn sie es an allen Stellen ist.

46. Partielle Differentialquotienten und Differentiale. Es sei $z = f(x, y)$ eine im Gebiete P stetige Funktion; verfolgt man ihren Verlauf bei einem feststehenden Werte von y, also längs einer Geraden, welche das Gebiet P parallel zur X-Achse durchsetzt, so verhält sie sich wie eine Funktion von einer Variablen und läßt die Bildung der für solche Funktionen aufgestellten Begriffe und Größen zu.

Erteilt man, von einem bestimmten Werte x ausgehend, demselben eine Änderung

$$\Delta x = h,$$

so erfährt die Funktion die *partielle Änderung:*

(1) $$\Delta_x z = f(x+h,\ y) - f(x,\ y);$$

konvergiert der aus beiden gebildete Differenzenquotient

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+h,\ y) - f(x,\ y)}{h},$$

während h den stetigen Grenzübergang $\lim h = \pm 0$ ausführt, gegen einen bestimmten Grenzwert, so heißt dieser der zur Stelle x/y gehörige *partielle Differentialquotient in bezug auf* x, wird mit $D_x f(x,\ y)$, oder, in einer von Jacobi eingeführten Abänderung des Leibnizschen Symbols für den Differentialquotienten einer Funktion einer Variablen, mit $\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$, kürzer $\frac{\partial z}{\partial x}$, bezeichnet, so daß

(2) $$D_x f(x,\ y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h=\pm 0} \frac{f(x+h,\ y) - f(x,\ y)}{h}.$$

Besitzt die Funktion an *jeder* Stelle von P einen solchen Differentialquotienten, so ist hierdurch eine neue Funktion im Bereiche P definiert, welche man als *partielle Ableitung* von $f(x,\ y)$ in bezug auf x oder auch wieder als partiellen Differentialquotienten nach x bezeichnet. Man gebraucht dafür dieselben Zeichen wie in (2), neben diesen auch wohl $f_x'(x,\ y)$.

Durch Multiplikation des partiellen Differentialquotienten mit der Änderung Δx der Variablen, welche letztere begrifflich mit dem Differential dx derselben zusammenfällt (**23**), ergibt sich das *partielle Differential* $d_x z$ in bezug auf x, so daß

(3) $$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx;$$

für die Beziehung desselben zur Änderung $\Delta_x z$ gelten die bei Funktionen einer Variablen gemachten Bemerkungen (**23**, **42**).

Zu analogen Betrachtungen wird man geführt, wenn man den Verlauf von $z = f(x,\ y)$ bei feststehendem x, also längs einer das Gebiet P parallel zur Y-Achse durchquerenden Geraden, verfolgt; aus der Änderung

$$\Delta y = k,$$

die man einem Ausgangswerte y erteilt, entspringt die *partielle Änderung*

(1*) $$\Delta_y z = f(x,\ y+k) - f(x,\ y),$$

dann der *partielle Differentialquotient* in bezug auf y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{k=\pm 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}, \tag{2*}$$

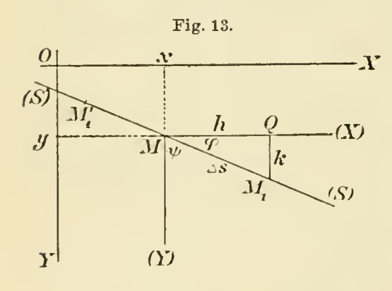
einerseits genommen an der bestimmten Stelle x/y, andererseits als Funktion im Gebiete P, und schließlich das *partielle Differential* in bezug auf y:

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{3*}$$

Es bedarf keiner näheren Erläuterung, wie sich diese Betrachtung fortsetzt, wenn es sich um eine Funktion von mehr als zwei Variablen handelt*).

47. Der totale Differentialquotient und das totale Differential. Man kann, auf die geometrische Darstellung bezugnehmend, die partiellen Differentialquotienten in bezug auf x, y auch als *Differentialquotienten in der Richtung* X, bzw. Y bezeichnen und kann ihnen den *Differentialquotienten in einer beliebigen Richtung* oder, sofern dabei beide Variablen zugleich abgeändert werden, den *totalen Differentialquotienten* gegenüberstellen.

Fig. 13.



Die von dem Punkte $M(x/y)$ (Fig. 13) ausgehende Richtung $M(S)$ und die entgegengesetzte $M(S')$ fassen wir in eins zusammen, sprechen kurz von der Richtung S und charakterisieren sie durch die hohlen Winkel φ und ψ, welche $M(S)$ mit den Richtungen $M(X)$ und $M(Y)$ einschließt. Der auf $M(S)$ liegende Punkt M_1 gehöre zur Wertverbindung $x+h/y+k$, wobei $MQ = h$, $QM_1 = k$ ist; die Entfernung $MM_1 = \Delta s = \sqrt{h^2+k^2}$ werde auf $M(S)$ *positiv* gezählt; dann ist

$$\frac{h}{\Delta s} = \cos\varphi \qquad \frac{k}{\Delta s} = \cos\psi. \tag{4}$$

---

*) Außer den hier angeführten Bezeichnungen für die partiellen Differentialquotienten sind noch andere im Gebrauch, z. B. f_x', f_y' oder, wenn keine Verwechslung zu besorgen ist, $f'(x)$, $f'(y)$, auch f_x, f_y; man vergleiche auch später Artikel 52.

Den Unterschied der zu x/y und $x+h/y+k$ gehörigen Funktionswerte bezeichnet man als *totale Änderung* von z an der Stelle x/y und gebraucht dafür das Zeichen Δz, so daß

$$\Delta z = f(x+h,\ y+k) - f(x,\ y); \tag{5}$$

der entsprechende Differenzenquotient ist $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ und läßt sich folgendermaßen umgestalten:

$$(6)\left\{\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta s} &= \frac{f(x+h,\, y+k) - f(x,\, y+k) + f(x,\, y+k) - f(x,\, y)}{\Delta s} \\ &= \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h}\frac{h}{\Delta s} + \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}\frac{k}{\Delta s}. \end{aligned}\right.$$

Kommt der Punkt M_1 auf $M(S')$ zu liegen, nach M_1', so ändern $h,\ k,\ \Delta s$ gleichzeitig ihre Vorzeichen, die Quotienten $\frac{h}{\Delta s}$, $\frac{k}{\Delta s}$ behalten also für beide Lagen, und wie nahe auch M_1, beziehungsweise M_1' an M rückt, die in (4) angegebenen Werte bei; besitzt ferner die Funktion partielle Differentialquotienten in bezug auf x und y, so ist

$$\lim_{h=\pm 0} \frac{f(x+h,\ y+k) - f(x,\ y+k)}{h} = f_x'(x,\ y+k),$$

$$\lim_{k=\pm 0} \frac{f(x,\ y+k) - f(x,\ y)}{k} = f_x'(x,\ y) = \frac{\partial z}{\partial y};$$

wenn endlich der erste dieser Differentialquotienten eine stetige Funktion von y ist, so hat man weiter

$$\lim_{k=\pm 0}\ \lim_{h=\pm 0} \frac{f(x+h,\ y+k) - f(x,\ y+k)}{h} = f_x'(x,\ y) = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Man hätte den Zähler von $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ auch erweitern können auf

$$f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y) + f(x+h,\ y) - f(x,\ y),$$

und es hätte sich dann bei analog durchgeführter Betrachtung die Bedingung ergeben, daß f_y' eine stetige Funktion von x sein müsse, damit bei $\lim k = 0$ und $\lim h = 0$ der Quotient

$$\frac{f(x+h,\ y+k) - f(x+h,\ y)}{k}$$

gegen die Grenze $f_y'(x,\ y)$ konvergiere.

Bei stetigem beiderseitigen Grenzübergange von $x+h/y+k$ zu x/y in der Richtung S, wobei die Größen $h,\ k,\ \Delta s$ gleich-

zeitig der Null als Grenze sich nähern, konvergiert also der Quotient (6) gegen den Grenzwert

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\psi, \tag{7}$$

wenn an der Stelle x/y entweder f_x' eine stetige Funktion von y oder f_y' eine stetige Funktion von x ist. Man nennt dann diesen Grenzwert den *totalen Differentialquotienten* der Funktion *$f(x, y)$ in der Richtung S.*

Für die Richtung $M(X)$

$$\varphi = 0, \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

fallen die Begriffe $\frac{dz}{ds}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$, für die Richtung $M(Y)$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = 0$$

$\frac{dz}{ds}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ zusammen.

Aus dem totalen Differentialquotienten ergibt sich in analoger Weise wie bei einer Funktion einer Variablen durch Multiplikation mit ds das *totale Differential* dz der Funktion; da nun aus (4)

$$\Delta s\cos\varphi = h = \Delta x, \quad \Delta s\cos\psi = k = \Delta y$$

folgt und bei den unabhängigen Variablen Δx und dx einerseits und Δy und dy anderseits gleichbedeutend sind, so ergibt sich für das totale Differential der Ausdruck

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{8}$$

welcher mit Rücksicht auf (3) und (3*) auch in der Form

$$dz = d_x z + d_y z \tag{8*}$$

geschrieben werden kann.

Das totale Differential einer Funktion zweier Variablen stellt sich demnach, wenn die Bedingungen für die Existenz des totalen Differentialquotienten vorhanden sind, als Summe der auf die einzelnen Variablen bezüglichen partiellen Differentiale dar und bedeutet begrifflich einen Wert, der sich von der totalen Änderung Δz (5) nur um Größen höherer Kleinheitsordnung in bezug auf dx und dy unterscheidet, welch letztere vermöge (4)

für jeden von $0, \frac{\pi}{2}$ *und* π *verschiedenen Wert von* φ *Größen gleicher Kleinheitsordnung sind.*

Die Richtung, nach welcher das Differential (8) genommen ist, ergibt sich zufolge (4) aus den Gleichungen

$$\frac{dx}{|\sqrt{dx^2+dy^2}|} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{|\sqrt{dx^2+dy^2}|} = \cos\psi$$

eindeutig in dem Intervall $(0, 2\pi)$, weil für das Differential zwei entgegengesetzte Richtungen nicht äquivalent sind wie für den Differentialquotienten.

48. Geometrische Deutung des totalen Differentials. Bevor auf die Ausdehnung der eben entwickelten Begriffe auf Funktionen von mehr als zwei Variablen eingegangen wird, soll die geometrische Bedeutung derselben erläutert werden für den Fall, daß die Werte der Funktion $z = f(x, y)$ durch die Applikaten einer Fläche dargestellt werden.

Es sei F (Fig. 14) der zu x/y gehörige Punkt der Fläche, FF' die Kurve, welche beschrieben wird, wenn M auf der zur x-Achse Parallelen MM' fortschreitet, FG' die Tangente an diese Kurve in F, FH' die Parallele zu OX; dann ist (23)

$$MM' = h = dx, \quad H'F' = \Delta_x z, \quad H'G' = d_x z;$$

ferner sei FF'' die Kurve, welche bei der Bewegung von M auf der zur y-Achse Parallelen MM'' beschrieben wird, FG'' die Tangente an diese Kurve in F, FH'' die Parallele zur y-Achse: alsdann ist

$$MM'' = k = dy,$$
$$H''F'' = \Delta_y z,$$
$$H''G'' = d_y z.$$

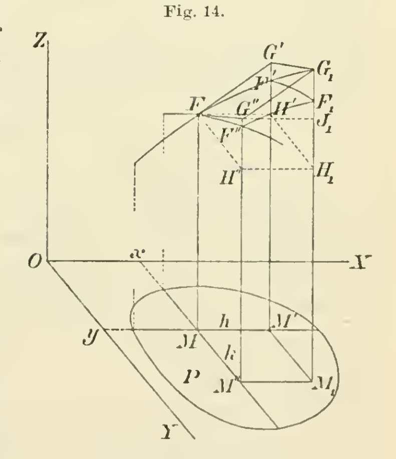


Fig. 14.

Auf dem Wege $M''M_1$ werde die Kurve $F''F_1$, auf dem Wege $M'M_1$ die Kurve $F'F_1$ beschrieben; wird $H''H_1$ parallel zur x-Achse und $H'H_1$ parallel zur y-Achse geführt, so ist

$$H_1 F_1 = \Delta z;$$

dagegen schneidet die Ebene, welche durch die Tangenten FG' und FG'' gelegt wird, auf der Geraden $M_1 F_1$ einen Punkt G_1 ein als vierte Ecke des durch $G'FG''$ bestimmten Parallelogramms, und führt man $G''J_1$ parallel zur x-Achse, so zerfällt die Strecke $H_1 G_1$ in die Teile $H_1 J_1$ und $J_1 G_1$, deren erster gleich $H''G''$, deren zweiter wegen der Kongruenz der Dreiecke $G''J_1 G_1$ und $FH'G'$ gleich $H'G'$ ist; mithin ist

$$H_1 G_1 = H'G' + H''G'' = d_x z + d_y z,$$

also

$$H_1 G_1 = dz.$$

Die Ebene $FG'G_1G''$ der beiden Tangenten FG', FG'' nennt man die *Tangentialebene* der Fläche im Punkte F. *Hiernach ist das totale Differential bei dem Übergange von der Wertverbindung x/y zu jener $x + dx/y + dy$ dargestellt durch die Änderung, welche die Applikate der im Punkte $x/y/z$ an die Fläche gelegten Tangentialebene dabei erleidet.*

49. Ausdehnung auf drei und mehr Variable. Handelt es sich um eine stetige Funktion $u = f(x, y, z)$ dreier Variablen, welche für einen Bereich R dieser Variablen gegeben ist, so läßt dieser Bereich auch noch eine geometrische Versinnlichung zu (9) und die Betrachtungen von 47 gestatten fast wörtliche Übertragung. Die von dem Punkte M des Raumes, welcher der Wertverbindung $x/y/z$ der Variablen zugeordnet ist, ausgehende Richtung $M(S)$ sei durch die Winkel φ, ψ, χ charakterisiert, welche sie mit den positiven Halbachsen des (orthogonalen) räumlichen Koordinatensystems einschließt, und werde mit der entgegengesetzten Richtung $M(S')$ zusammen kurz als Richtung S bezeichnet. Dann ergibt sich unter Voraussetzung der Existenz und Stetigkeit der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ der *totale Differentialquotient in der Richtung S:*

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \psi + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \chi \tag{9}$$

und daraus das *totale Differential:*

(10) $$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

also

(10*) $$du = d_x u + d_y u + d_z u,$$

wobei die Richtung eindeutig bestimmt ist durch

$$\frac{dx}{|\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}|} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{|\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}|} = \cos\psi,$$

$$\frac{dz}{|\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}|} = \cos\chi.$$

Bei einer Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n (> 3) Variablen hört auch die Möglichkeit der geometrischen Darstellung des Bereiches R auf; man behält aber die geometrische Ausdrucksweise bei, ordnet der Wertverbindung $x_1/x_2/\ldots/x_n$ einen Punkt M im n-dimensionalen Raume zu, bezogen auf ein n-achsiges orthogonales Koordinatensystem; spricht ferner von der Richtung, welche den Punkt M mit dem Punkte

$$M_1 \ldots x_1 + dx_1/x_2 + dx_2/\ldots/x_n + dx_n$$

verbindet und bestimmt sie durch die Richtungskosinusse

$$\cos\varphi_1 = \frac{dx_1}{|\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}|}, \ldots \cos\varphi_n = \frac{dx_n}{|\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}|},$$

deren Quadratsumme 1 ist; nennt weiter

$$ds = |\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}|$$

die *Entfernung* von M zu M_1; erklärt, die Stetigkeit der Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots$ vorausgesetzt,

(11) $$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos\varphi_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos\varphi_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cos\varphi_n$$

für den *totalen Differentialquotienten* von u in der bezeichneten Richtung (und der ihr entgegengesetzten) und

(12) $$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x^2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

für das zu jener Richtung gehörige *totale Differential*. Der in 47 für zwei Variable formulierte Satz, daß das totale Differential der Summe der partiellen Differentiale gleichkommt, behält also für beliebig viele Variable seine Geltung.

Hat die Funktion u einen konstanten Wert im ganzen Bereiche R, so ist ihr totaler Differentialquotient $\frac{du}{ds}$ und daher auch ihr totales Differential du im ganzen Bereiche $= 0$ (21). Demnach folgt aus einer Gleichung von der Form

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$$

eine lineare homogene Beziehung zwischen den Differentialen der Variablen, nämlich:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

50. Anwendungen. Die Bestimmung des totalen Differentials kommt häufig zur Anwendung, wenn es sich darum handelt, die Änderung einer Größe zu berechnen, welche sie bei verhältnismäßig sehr kleinen Änderungen der sie bestimmenden Größen erfährt, wenn von Größen höherer Kleinheitsordnung abgesehen werden kann.

Zur Erläuterung mögen die folgenden *Beispiele* dienen.

1) Welche Änderung erfährt die Fläche eines Rechtecks mit den Seiten x, y, wenn diese um die sehr kleinen Größen dx, dy sich ändern?

Die Fläche ist

$$u = xy;$$

daraus ergibt sich $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, folglich ist

$$du = ydx + xdy.$$

Die Rechnung sowie eine einfache Figur belehren darüber, daß bei diesem Ansatze das Produkt $dxdy$ vernachlässigt ist.

2) Es ist die Änderung zu bestimmen, welche das Volumen eines geraden Zylinders vom Grundhalbmesser x und der Höhe y erleidet, wenn die genannten Dimensionen um die kleinen Beträge dx, dy sich ändern.

Das Volumen ist

$$v = \pi x^2 y;$$

daraus berechnet sich $\frac{\partial v}{\partial x} = 2\pi xy$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \pi x^2$, somit ist das verlangte

$$dv = 2\pi xydx + \pi x^2 dy.$$

Die wirkliche Änderung ist

$$\pi(x+dx)^2(y+dy)-\pi x^2 y = 2\pi xy\,dx+\pi x^2 dy+2\pi x\,dx\,dy \\ +\pi y\,dx^2+\pi\,dx^2 dy;$$

unterdrückt werden also $2\pi x dx dy$, $\pi y dx^2$ und $\pi dx^2 dy$, Beträge, die in bezug auf dx, dy von zweiter, beziehungsweise dritter Kleinheitsordnung sind. Es ist nicht schwer, die beiden Teile von dv geometrisch zu interpretieren.

3) In einem ebenen Dreieck ändern sich eine Seite x und die beiden ihr anliegenden Winkel y, z um die Beträge dx, dy, dz beziehungsweise; es ist die daraus hervorgehende Änderung der Dreiecksfläche zu bestimmen.

Die Fläche des Dreiecks ist

$$u=\frac{x^2\sin y\sin z}{2\sin(y+z)};$$

daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x\sin y\sin z}{\sin(y+z)}=\frac{2u}{x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2\cos y\sin z}{2\sin(y+z)}-\frac{x^2\sin y\sin z\cos(y+z)}{2\sin^2(y+z)} \\ =u\operatorname{cotg} y-u\operatorname{cotg}(y+z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2\sin y\cos z}{2\sin(y+z)}-\frac{x^2\sin y\sin z\cos(y+z)}{2\sin^2(y+z)} \\ =u\operatorname{cotg} z-u\operatorname{cotg}(y+z)$$

also ist $du=u\left[\frac{2\,dx}{x}+\{\operatorname{cotg} y-\operatorname{cotg}(y+z)\}dy \right.$
$\left. +\{\operatorname{cotg} z-\operatorname{cotg}(y+z)\}dz\right].$

Es sei beispielsweise

$$x=500\text{ m},\quad y=\frac{\pi}{6}\,(30^0),\qquad z=\frac{\pi}{4}\,(45^0),$$

$$dx=0{,}01\text{ m},\quad dy=\text{arc }5''=0{,}000\,024\,24,\quad dz=\text{arc }10''=0{,}000\,048\,48;$$

mit diesen Daten berechnet sich zunächst

$$u=45\,753\cdot 17\text{ m}^2$$

und weiter

$$du=45753{,}17\,[0{,}0000400+0{,}0000354+0{,}0000354]=5{,}07\text{ m}^2;$$

die direkte Rechnung der Fläche mit den geänderten Daten liefert

$$u'=45\,758{,}26\text{ m}^2,$$

woraus die wirkliche Änderung bei auf zwei Dezimalen angelegter Rechnung $u'-u=5{,}09\text{ m}^2$ sich ergibt.

4) Man zeige, daß aus

$$z = \frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y},$$

worin $X = ax^2 + 2bx + c$, $Y = ay^2 + 2by + c$ ist, folgt:

$$\frac{dz}{a - z^2} = \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

5) Zu zeigen, daß sich aus

$$(y - z) X^{\frac{1}{3}} + (z - x) Y^{\frac{1}{3}} + (x - y) Z^{\frac{1}{3}} = 0,$$

worin $X = Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + D$ und Y, Z analoge Ausdrücke in y, z mit denselben Koeffizienten sind, ergibt:

$$X^{-\frac{2}{3}} dx + Y^{-\frac{2}{3}} dy + Z^{-\frac{2}{3}} dz = 0.$$

§ 2. Die höheren Differentialquotienten und Differentiale.

51. Wiederholte Differentiation nach derselben Variablen. Wenn die Funktion $z = f(x, y)$ auf dem Gebiete P, auf welchem sie gegeben ist, einen partiellen Differentialquotienten in bezug auf x besitzt, der selbst wieder wie die ursprüngliche Funktion auf dem gedachten Gebiete stetig ist und einen partiellen Differentialquotienten in bezug auf x zuläßt, so heißt dieser der *zweite partielle Differentialquotient* der Funktion $f(x, y)$ in bezug auf x und kann durch eines der Zeichen

$$D_x^2 f(x, y), \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

dargestellt werden; die beiden letzten Zeichen sind eine von Jacobi herrührende Nachbildung des entsprechenden Leibnizschen Symbols für Funktionen einer Variablen.

Wie bei Funktionen einer Variablen (40) kann dieser Prozeß, solange die angeführten Voraussetzungen fortbestehen, wiederholt werden, und man gelangt so zum dritten, ... n-ten partiellen Differentialquotienten in bezug auf x, d. i.

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3}, \cdots \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n},$$

oder kürzer

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \cdots \frac{\partial^n z}{\partial x^n}.$$

Derselbe Gedankengang läßt sich auf die Variable y anwenden, wodurch die höheren partiellen Differentialquotienten in bezug auf y zustande kommen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \cdots \frac{\partial^n z}{\partial y^n}.$$

Bei einer Funktion von mehr als zwei Variablen treten weitere Reihen derart gebildeter höherer partieller Differentialquotienten auf.

52. Wiederholte Differentiation nach verschiedenen Variablen. Da das Resultat der partiellen Differentiation von $z = f(x, y)$ nach x im allgemeinen wieder eine Funktion von x, y ist, die wir in der nun folgenden Untersuchung mit $f_1(x, y)$ bezeichnen wollen, so daß

$$f_1(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x},$$

so kann auf dasselbe ein zweitesmal die partielle Differentiation in bezug auf y angewendet werden; das Ergebnis derselben bezeichnen wir als *zweiten partiellen Differentialquotienten in bezug auf x und y* und schreiben es in einer der Formen $f_{12}(x, y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, so daß

$$f_{12}(x, y) = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Andererseits ist auch der partielle Differentialquotient nach y:

$$f_2(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y},$$

eine Funktion beider Variablen und kann als solche in bezug auf x differentiiert werden, wodurch der *zweite partielle Differentialquotient in bezug auf y und x* entsteht:

$$f_{21}(x, y) = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Es ist jetzt unsere Aufgabe, die Beziehung dieser zwei zweiten Differentialquotienten, welche sich formell durch die Reihenfolge der Operationen unterscheiden, durch die sie aus der ursprünglichen Funktion abgeleitet sind, für eine Stelle x/y des Gebietes P zu untersuchen.

Wir setzen voraus, daß auch die Stellen $x+h/y$, $x/y+k$ $x+h/y+k$ dem Bereiche P angehören. Auf Grund des Mittelwertsatzes (38) ist

$$f(x+h,\, y) - f(x,\, y) = hf_1(x+\theta h,\, y); \quad (0 < \theta < 1).$$

Ersetzt man hier y durch $y+k$, so wird*)

$$f(x+h,\, y+k) - f(x,\, y+k) = hf_1(x+\theta h,\, y+k);$$

durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten ergibt sich

$$f(x+h,\, y+k) - f(x,\, y+k) - f(x+h,\, y) + f(x,\, y)$$
$$= h[f_1(x+\theta h,\, y+k) - f_1(x+\theta h,\, y)]$$

und weiter, wenn man auf die Differenz rechts den Mittelwertsatz anwendet,

$$(1) \quad f(x+h,\, y+k) - f(x,\, y+k) - f(x+h,\, y) + f(x,\, y)$$
$$= hkf_{12}(x+\theta h,\, y+\theta' k), \qquad (0 < \theta' < 1).$$

Unter neuerlicher Anwendung des Mittelwertsatzes erhält man

$$f(x, y+k) - f(x, y) = kf_2(x, y+\theta'' k), \quad (0 < \theta'' < 1)$$

und wenn man diesen Ansatz mit $x+h$ wiederholt,

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) = kf_2(x+h, y+\theta'' k);$$

durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten ergibt sich

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$
$$= k[f_2(x+h, y+\theta'' k) - f_2(x, y+\theta'' k)],$$

nochmalige Anwendung des Mittelwertsatzes auf der rechten Seite gibt schließlich

$$(2) \qquad f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$
$$= khf_{21}(x+\theta''' h, y+\theta'' k), \quad (0 < \theta''' < 1).$$

---

*) Allerdings hängt der unbestimmte positive echte Bruch θ auch von y ab und ändert sich daher bei dem Übergange von y zu $y+k$, etwa in θ_1; die Anwendung des Mittelwertsatzes setzt aber die Stetigkeit von f_1 voraus; man kann sich also h, k so klein gewählt denken, daß $f_1(x+\theta_1 h,\ y+k)$ sich von $f_1(x+\theta h,\ y+k)$ um eine beliebig kleine Größe unterscheidet; die Mitführung dieser Größe würde den Beweis nur komplizierter gestalten.

Aus der Vergleichung von (1) und (2) geht hervor, daß es positive echte Brüche θ, θ', θ'', θ''' gibt derart, daß

$$f_{12}(x+\theta h, y+\theta' k) = f_{21}(x+\theta''' h, y+\theta'' k);$$

sind nun $f_{12}(x, y)$, $f_{21}(x, y)$ an der Stelle x/y stetige Funktionen von x, y, so führt die letzte Gleichung für gegen ± 0 konvergierende h, k zu

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y),$$

in andern Zeichen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \tag{3}$$

Existieren also an der Stelle x/y und in der durch die Intervalle $(x-h, x+h)$, $(y-k, y+k)$ gekennzeichneten Umgebung dieser Stelle die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, und sind sie dortselbst stetige Funktionen von x, y, so ist an dieser Stelle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Erfüllt die Funktion $f(x, y)$ in ihrem ganzen Gebiete die angeführten Bedingungen, so findet die Gleichung (3) an jeder Stelle statt. Der Inhalt dieser Gleichung läßt sich dahin formulieren, *daß das Resultat der sukzessiven Differentiation einer Funktion nach zwei verschiedenen Variablen von der Reihenfolge, in welcher man die beiden Differentiationen ausführt, nicht abhängt.*

Diese wichtige Tatsache läßt sich nun auch auf mehr als zwei Differentiationen und auch auf mehr als zwei Variable ausdehnen. Soll die Funktion $z = f(x, y)$ zweimal in bezug auf x und einmal in bezug auf y differentiiert werden, so zeigt das für die Multiplikation dreier Faktoren gültige Schema

$$xxy = x(xy) = x(yx) = (xy)x = (yx)x = yxx,$$

in welchem immer nur zwei aufeinanderfolgende Buchstaben vertauscht worden sind, daß es gleichgültig ist, ob man die Differentiationen in der Ordnung xxy oder xyx oder yxx

ausführt; man bezeichnet daher den betreffenden Differentialquotienten mit

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}.^{*)}$$

Ist die Funktion $u = f(x, y, z)$ m-mal in bezug auf x, n-mal in bezug auf y und p-mal in bezug auf z zu differentiieren, so darf man diese $m + n + p$ Differentiationen in beliebiger Reihenfolge zur Ausführung bringen; ihr Resultat drückt man durch das Symbol

$$\frac{\partial^{m+n+p} u}{\partial x^m \partial y^n \partial z^p}$$

aus.

Durch den Umstand, daß die Reihenfolge mehrerer Differentiationen nach verschiedenen Variablen keinen Einfluß auf das Endergebnis übt, vermindert sich die Anzahl der von einander verschiedenen Differentialquotienten einer bestimmten Ordnung gegenüber derjenigen, welche statthätte, wenn die Reihenfolge von Einfluß wäre. Im letztgedachten Falle hätte man nämlich bei einer Funktion von n Variablen

$$n^r$$

Differentialquotienten r-ter Ordnung zu unterscheiden entsprechend der Anzahl der Variationen mit Wiederholung von n Elementen in der r-ten Klasse; wogegen sich die Zahl in Wirklichkeit auf

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{1\cdot 2\cdots r}$$

stellt, entsprechend der Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von n Elementen in der r-ten Klasse.

Man spricht bei Funktionen mehrerer Variablen mitunter von *reinen* und *gemischten* Differentialquotienten, je nachdem

---

*) Zur Bezeichnung der höheren partiellen Differentialquotienten von $f(x, y)$ sind auch die Zeichen

$$f''_{x^2},\ f''_{xy},\ f''_{y^2};\ f'''_{x^3},\ f'''_{x^2y}, \ldots$$

oder einfacher

$$f_{xx},\ f_{xy},\ f_{yy};\ f_{xxx},\ f_{xxy}, \ldots$$

gebräuchlich.

die Differentiation nur nach einer oder nach mehreren Variablen erfolgt.

53. Beispiele. Die Bildung der höheren partiellen Differentialquotienten werden die folgenden Beispiele zur Genüge dartun.

1) Die rationale ganze Funktion dritten Grades

$$f(x, y) = \alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3$$

ergibt bei einmaliger Differentiation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\,\alpha x^2 + 6\,\beta x y + 3\,\gamma y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\,\beta x^2 + 6\,\gamma x y + 3\,\delta y^2;$$

bei zweimaliger Differentiation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\,\alpha x + 6\,\beta y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6\,\beta x + 6\,\gamma y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6\,\gamma x + 6\,\delta y;$$

wobei man unmittelbar erkennt, daß sich für $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ aus $\frac{\partial f}{\partial x}$ und aus $\frac{\partial f}{\partial y}$ ein und derselbe Wert ergibt; bei dreimaliger Differentiation entstehen:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6\,\alpha, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 6\,\beta, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 6\,\gamma, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6\,\delta$$

und wieder zeigt es sich, daß jeder der beiden mittleren Differentialquotienten aus der vorangehenden Gruppe auf zwei Arten übereinstimmend erhalten wird. Alle höheren Differentialquotienten haben den Wert Null.

2) Die Funktion

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

ist für alle Wertverbindungen mit Ausnahme von 0/0 definiert. Mit Ausschluß dieser Stelle hat man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2};$$

weiter

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2\,xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2\,xy}{(x^2+y^2)^2};$$

und

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x^2+y^2-2\,y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x^2+y^2-2\,x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

also tatsächlich $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3) Es ist zu zeigen, daß die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - q^2 z = \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

durch die Funktion

$$z = e^{q\sqrt{x^2+xy}}$$

befriedigt wird.

54. Totale Differentialquotienten und Differentiale höherer Ordnung. In 47 ist für den totalen Differentialquotienten in der Richtung $S(\varphi, \psi)$ einer Funktion $z = f(x, y)$, welche an der Stelle x/y die dort angeführten Bedingungen erfüllt, der Ausdruck

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\psi$$

gefunden worden; die Bildungsweise desselben spricht sich darin aus, daß man die partiellen Differentialquotienten mit den zugeordneten Richtungskosinussen zu multiplizieren und die Produkte zu addieren hat.

Sofern nun die Funktion z an der Stelle x/y auch alle partiellen Differentialquotienten 2., 3., ... n-ter Ordnung zuläßt, und sofern diese stetig sind, besitzt sie auch höhere totale Differentialquotienten in der Richtung S; der zweite totale Differentialquotient ist:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{\partial \frac{dz}{ds}}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial \frac{dz}{ds}}{\partial y}\cos\psi;$$

führt man aber die rechts angedeuteten Differentiationen aus, wobei zu beachten ist, daß $\cos\varphi$, $\cos\psi$ konstant sind, so findet sich:

$$\frac{\partial \frac{dz}{ds}}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cos \psi$$

$$\frac{\partial \frac{dz}{ds}}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos \psi;$$

trägt man dies in den obigen Ausdruck ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf **52**, (3):

$$(4) \qquad \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \varphi \cos \psi + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos^2 \psi.$$

Durch Multiplikation dieses Differentialquotienten mit ds^2 erhält man das *zweite totale Differential*, welches mit Rücksicht darauf, daß laut **47**

$$ds \cos \varphi = dx, \quad ds \cos \psi = dy$$

ist, folgendermaßen sich gestaltet:

$$(5) \qquad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Seine Bildungsweise hat so viel Analogie mit dem Quadrat eines bestimmten Binoms, daß man sich zur Abkürzung der symbolischen Schreibweise

$$(5^*) \qquad d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z$$

bedienen kann; nach ausgeführter Quadrierung lautet beispielsweise das erste Glied $\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2$ und geht bei der symbolischen Multiplikation mit z in $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2$, d. h. tatsächlich in das erste Glied von (5) über u. s. w.

Aus (4) ergibt sich zunächst wieder:

$$\frac{d^3 z}{ds^3} = \frac{\partial \frac{d^2 z}{ds^2}}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \frac{d^2 z}{ds^2}}{\partial y} \cos \psi;$$

ferner ist

$$\frac{\partial \frac{d^2 z}{ds^2}}{\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} \cos \varphi \cos \psi + \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} \cos^2 \psi$$

$$\frac{\partial \frac{d^2 z}{ds^2}}{\partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \cos \varphi \cos \psi + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \cos^2 \psi.$$

mithin auf Grund der Ergebnisse in 52:

$$(6)\qquad \frac{d^3 z}{d s^3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\cos^3\varphi + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\cos^2\varphi\,\cos\psi$$
$$+ 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\cos\varphi\,\cos^2\psi + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\cos^3\psi.$$

Durch Multiplikation mit ds^3 entsteht das *dritte totale Differential*

$$(7)\quad d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

wofür wieder symbolisch geschrieben werden kann:

$$(7^*)\qquad d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dx\right)^3 z.$$

Die Richtung, für welche das totale Differential gilt, ist jedesmal bestimmt durch

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \cos\varphi,\quad \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \cos\psi.$$

Durch vollständige Induktion kann das Bildungsgesetz des n-ten totalen Differentialquotienten und des n-ten totalen Differentials erschlossen werden. Wäre nämlich erwiesen, daß

$$\frac{d^n z}{d s^n} = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\cos^n\varphi + \binom{n}{1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\cos^{n-1}\varphi\cos\psi$$
$$+ \binom{n}{2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\cos^{n-2}\varphi\cos^2\psi + \cdots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\cos^n\psi,$$

so folgte aus dem eben entwickelten Vorgange

$$\frac{d^{n+1} z}{d s^{n+1}} = \left[\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}\cos^n\varphi\right.$$
$$+ \binom{n}{1}\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}\cos^{n-1}\varphi\cos\psi + \binom{n}{2}\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}\cos^{n-2}\varphi\cos^2\psi + \cdots$$
$$\left. + \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x \partial y^n}\cos^n\psi\right]\cos\varphi$$
$$+ \left[\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}\cos^n\varphi \qquad + \binom{n}{1}\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-1}\partial y^2}\cos^{n-1}\varphi\cos\psi + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}\cos^n\psi\right]\cos\psi$$

und mit Rücksicht auf die Eigenschaft $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ der Binomialkoeffizienten

$$\frac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n+1}} \cos^{n+1}\varphi + \binom{n+1}{1} \frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^n \partial y} \cos^n \varphi \cos \psi$$

$$+ \binom{n+1}{2} \frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n-1} \partial y} \cos^{n-1}\varphi \cos^2\psi + \cdots + \frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n+1}} \cos^{n+1}\psi;$$

d. h. es bestünde dasselbe Bildungsgesetz auch für $\frac{d^{n+1}z}{ds^{n+1}}$; da es für $n = 2, 3$ direkt bewiesen worden, so gilt allgemein für den n-ten totalen Differentialquotienten der Ausdruck:

$$\frac{d^n z}{ds^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \cos \psi\right)^n z \tag{8}$$

und für das n-te totale Differential der Ausdruck:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z. \tag{9}$$

Die Ausdehnung auf Funktionen von mehr als zwei Variablen unterliegt nach dem Vorgeführten keiner Schwierigkeit und ergibt ein analoges Resultat, so für $u = f(x, y, z)$:

$$\frac{d^n u}{ds^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \cos \psi + \frac{\partial}{\partial z} \cos \chi\right)^n u,$$

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right)^n u.$$

Auf Grund der in **53** gefundenen Resultate hat beispielsweise die Funktion

$$z = \alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3$$

das zweite und dritte totale Differential:

$$d^2 z = 6(\alpha x + \beta y) dx^2 + 12(\beta x + \gamma y) dx\, dy + 6(\gamma x + \delta y) dy^2$$

$$d^3 z = 6\{\alpha dx^3 + 3\beta dx^2 dy + 3\gamma dx dy^2 + \delta dy^3\},$$

und die Funktion

$$z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

das zweite totale Differential:

$$d^2 z = 2 \frac{xy(dx^2 - dy^2) - (x^2 - y^2) dx\, dy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

§ 3. Differentiation zusammengesetzter und impliziter Funktionen.

55. Zusammengesetzte Funktionen einer Variablen. Es seien $u, v, \ldots$ eindeutige und stetige Funktionen von x; $y = f(u, v, \ldots)$ eine eindeutige stetige Funktion von $u, v, \ldots$; dann ist y auch eindeutige stetige Funktion von x und wird eine *zusammengesetzte Funktion* von x genannt.

Um ihren Differentialquotienten in bezug auf x zu bestimmen, gehe man von einem Werte x aus und erteile demselben eine Änderung Δx; dadurch ändern sich auch die zu x gehörigen Werte von $u, v, \ldots$ um $\Delta u, \Delta v, \ldots$ und der zu diesen Werten $u, v, \ldots$ gehörige Wert von y um Δy; auf Grund der gemachten Voraussetzungen konvergieren mit Δx zugleich auch $\Delta u, \Delta v, \ldots$ und Δy gegen den Grenzwert Null. Nun besteht zwischen $\Delta u, \Delta v, \ldots$ und Δy die Beziehung

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, \ldots) - f(u, v, \ldots);$$

die rechtsstehende totale Differenz unterscheidet sich von dem totalen Differential — und ein solches ist vorhanden, wenn $f(u, v, \ldots)$ an der betrachteten Stelle partielle Differentialquotienten nach $u, v, \ldots$ besitzt und diese stetig sind an der betrachteten Stelle (47) — um Größen höherer Kleinheitsordnung als $\Delta u, \Delta v, \ldots$, so daß

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v + \cdots + \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v + \cdots,$$

wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Größen bedeuten, welche mit $\Delta u, \Delta v, \ldots$ zugleich gegen Null konvergieren. Die Änderungen $\Delta u, \Delta v, \ldots$ von $u, v, \ldots$ ihrerseits unterscheiden sich von den betreffenden Differentialen — und solche sind vorhanden, wenn $u, v, \ldots$ an der Stelle x bestimmte Differentialquotienten besitzen — um Größen höherer Kleinheitsordnung als Δx, so daß

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x + \eta_1 \Delta x$$

$$\Delta v = \frac{dv}{dx} \Delta x + \eta_2 \Delta x,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

wenn unter $\eta_1, \eta_2, \ldots$ mit Δx gleichzeitig gegen Null konvergierende Größen verstanden werden. Wird dies in die vorangehende Gleichung eingetragen, so kommt

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \cdots\right)\Delta x + \left(\eta_1 \frac{\partial f}{\partial u} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial v} + \cdots\right)\Delta x$$
$$+ \varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \Delta v + \cdots$$

und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \cdots + \left(\eta_1 \frac{\partial f}{\partial u} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial v} + \cdots\right)$$
$$+ \left(\varepsilon_1 \frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon_2 \frac{\Delta v}{\Delta x} + \cdots\right);$$

konvergiert nun Δx gegen den Grenzwert Null, so nähern sich die in Klammern eingeschlossenen Teile der rechten Seite auch dieser Grenze, infolgedessen ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \cdots. \tag{1}$$

Durch Multiplikation mit dx ergibt sich daraus das Differential von y, nämlich

$$dy = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \cdots. \tag{2}$$

Der Differentialquotient der zusammengesetzten Funktion wird also gefunden, indem man ihre partiellen Differentialquotienten in bezug auf $u, v, \ldots$ mit den entsprechenden Differentialquotienten von $u, v, \ldots$ in bezug auf x multipliziert und die Produkte addiert; das Differential gestaltet sich ebenso, als ob $u, v, \ldots$ unabhängige Variable wären.

Bevor wir zu weiteren Ausführungen schreiten, sei bemerkt, daß die Formel (1) bereits anderweitig abgeleitete Resultate als spezielle Fälle enthält. So fällt ihr Inhalt bei Beschränkung auf das erste Glied der rechten Seite mit dem Satze **28**, (15) zusammen. Ist ferner $y = f(u, v, w, \ldots) = uvw \ldots$, also

$$\frac{\partial f}{\partial u} = vw \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial v} = uw \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial w} = uv \cdots,$$

so gibt (1)

$$\frac{d(uvw \cdots)}{dx} = \frac{du}{dx} vw \cdots + u\frac{dv}{dx} w \cdots + uv\frac{dw}{dx} \cdots + \cdots,$$

eine in **25** bereits abgeleitete Formel. Wenn weiter

$$y = f(u, v) = u^v,$$

so ist

$$\frac{\partial f}{\partial u} = vu^{v-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = u^v l u,$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v l u \frac{dv}{dx}$$

$$= u^v \left\{ \frac{v}{u} \frac{du}{dx} + l u \frac{dv}{dx} \right\};$$

diese Formel ist am Schlusse von **31** bereits entwickelt.

Um zu den höheren Differentialquotienten und Differentialen von y zu gelangen, hat man die Formel (1) neuerdings in bezug auf x zu differentiieren und dabei zu beachten, daß $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \ldots$ wieder zusammengesetzte Funktionen und daher in derselben Weise zu behandeln sind wie f selbst; es ist daher:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{dv}{dx} + \cdots \right) \frac{du}{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{dv}{dx} + \cdots \right) \frac{dv}{dx} +$$

$$\cdots + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d^2 v}{dx^2} + \cdots;$$

der in der ersten Zeile angesetzte Teil rührt von der Differentiation der ersten Faktoren der rechten Seite in (1) her, der in der zweiten Zeile von der Differentiation der zweiten Faktoren. Nach vollzogener Reduktion (**52**) ergibt sich:

$$(3) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d^2 v}{dx^2} + \cdots$$

und daraus durch Multiplikation mit dx^2 das zweite Differential

$$(4) \qquad d^2 y = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2 v + \cdots.$$

Der erste Hauptteil würde das zweite totale Differential in dem Falle darstellen, wenn $u, v, \ldots$ unabhängige Variable wären (**54**, (5)); der zweite Hauptteil verdankt also seine Entstehung dem Umstande, daß u, v Funktionen einer weiteren Variablen sind.

Das Aufsteigen zu höheren Differentialquotienten bedarf keiner Erläuterung mehr.

56. Eulers Satz über homogene Funktionen. Die Formel (1) soll dazu benutzt werden, um einen wichtigen Satz

der Analysis zu erweisen, der eine besondere Gattung von Funktionen betrifft und Eulers Namen führt.

Man versteht unter einer *homogenen Funktion n-ten Grades* mehrerer Variablen $x, y, z \ldots$ eine solche Funktion $f = f(x, y, z, \ldots)$, welche die Eigenschaft besitzt, daß

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^n f(x, y, z, \ldots), \tag{5}$$

wobei t jede beliebige von Null verschiedene endliche Zahl bedeuten kann.

Solcher Art sind beispielsweise die Funktionen

$$a_{11} x^2 + 2\, a_{12} x y + a_{22} y^2$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

und zwar die erste vom Grade 2, die zweite vom Grade $\frac{1}{2}$, die dritte vom Grade 0.

Betrachtet man in der Gleichung (5) t allein als variabel, setzt vorübergehend

$$tx = u, \quad ty = v, \quad tz = w, \ldots$$

und differentiiert beide Teile in bezug auf t, so hat man links die Formel (1) zur Anwendung zu bringen und erhält so:

$$\frac{\partial f(u, v, w, \ldots)}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f(u, v, w, \ldots)}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{d f(u, v, w, \ldots)}{dw} \frac{dw}{dt} + \cdots$$
$$= n t^{n-1} f;$$

nun ist aber $\frac{du}{dt} = x$, $\frac{dv}{dt} = y$, $\frac{dw}{dt} = z, \ldots$ und setzt man, nachdem dies eingetragen worden, $t = 1$, wodurch $u = x$, $v = y$, $w = z$ wird, so kommt

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z + \cdots = n f. \tag{6}$$

Multipliziert man also die partiellen Differentialquotienten einer homogenen Funktion nach den einzelnen Variablen mit diesen Variablen selbst, so ist die Summe der so gebildeten Produkte die mit dem Homogenitätsgrade vervielfachte Funktion.

In den oben zusammengestellten Beispielen hat man der Reihe nach

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\, a_{11} x + 2\, a_{12} y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\, a_{12} x + 2\, a_{22} y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = 2\, a_{11} x^2 + 4\, a_{11} xy + 2\, a_{11} y^2 = 2 f;$$

dann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} = \frac{1}{2} f;$$

endlich (53, 2))

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = 0 = 0 \cdot f.$$

57. Implizite Funktionen einer Variablen. Die Hilfsmittel der Differentiation von Funktionen einer und mehrerer Variablen, soweit sie bisher entwickelt worden sind, bedürfen noch einer wichtigen Ergänzung. Sie reichen zunächst nur dann aus, wenn die betreffende Funktion durch einen Ausdruck dargestellt ist, in welchem die Variablen untereinander und mit konstanten Größen durch eine endliche Folge der bekannten elementaren, algebraischen oder transzendenten, Operationen verbunden sind; man sagt in solchem Falle, die Funktion sei *explizite* und in endlicher Form gegeben. Es wird sich nun darum handeln, die Differentiation auch dann zu vollziehen, wenn die Funktion mit den Variablen durch eine Gleichung verbunden erscheint, welche nicht die eben gedachte Form hat, mit anderen Worten, wenn die Funktion *implizite* gegeben ist (17).

Es gibt allerdings Fälle, wo man die zweite Form auf die erste durch Auflösung der Gleichung zurückführen kann; aber selbst da ist es nicht immer vorteilhaft, diesen Weg einzuschlagen.

Angenommen, $f(x, y)$ sei eine in dem Gebiete P stetige Funktion und besitze dort stetige partielle Differentialquotienten in bezug auf x und y, von welchen der letztere an keiner Stelle verschwindet; ferner erlange $f(x, y)$ im Gebiete P den Wert c, jedoch nicht an einer oder mehreren einzelnen Stellen, sondern für alle Wertverbindungen x/y, welche den Punkten

einer das Gebiet durchziehenden Kurve entsprechen; dann ist durch die Gleichung

$$f(x, y) = c \tag{7}$$

y implizite als stetige Funktion von x definiert, und zwar für ein gewisses Intervall (α, β) von x. Wäre $y = \varphi(x)$ diese Funktion in expliziter Form, so müßte die Einsetzung von $\varphi(x)$ an die Stelle von y die Gleichung (7) identisch, d. i. für jeden Wert von x aus (α, β) erfüllen.

In diesem Sinne ist die linke Seite von (7) als zusammengesetzte Funktion von x anzusehen, und ihr Differentialquotient ist einerseits nach 55, (1):

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

andererseits hat er den Wert Null, weil die Funktion konstant ist; mithin ist, da $\frac{dx}{dx} = 1$,

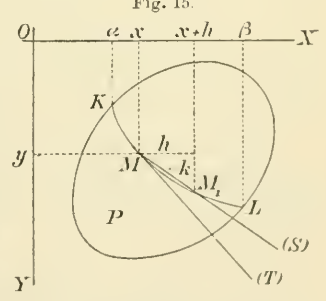
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{8}$$

und daraus ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \tag{9}$$

was nach den gemachten Voraussetzungen immer einen bestimmten Wert darstellt; die Voraussetzung, daß der partielle Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, ist nur von solchen Wertverbindungen einzuhalten, welche der Gleichung (7) genügen.

Fig. 15.



Auch aus dem Begriffe des totalen Differentialquotienten einer Funktion zweier Variablen läßt sich das obige Resultat ableiten. Ist KL (Fig. 15) die Kurve, längs welcher die Gleichung (7) gilt, M ein Punkt derselben, zur Wertverbindung x/y gehörig, M_1 ein anderer Punkt $x + h/y + k$, so ist der Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y)}{\Delta s}$$

gleich Null und bleibt es, wenn sich M_1 statt in der Richtung $M(S)$ längs KL dem Punkte M nähert; dabei nähert sich die Richtung $M(S)$ der Richtung $M(T)$ der Tangente an KL im Punkte M, folglich ist auch

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\psi = 0,$$

wo φ, ψ die Winkel der Tangente mit $M(X)$ und $M(Y)$ bezeichnen; da nun

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \lim_{h=+0}\frac{k}{h} = \frac{dy}{dx},$$

so fällt die voranstehende Gleichung mit der Gleichung (8) zusammen.

Die Gleichung (8) bezeichnen wir als das Ergebnis der Differentiation der Gleichung (7) in bezug auf x; sie wird gebildet, indem man die linke Seite von (7) zuerst partiell nach x differentiiert, dann den partiellen Differentialquotienten nach y mit dem Differentialquotienten von y nach x multipliziert und die Summe beider Ausdrücke gleich Null setzt.

Wendet man die gleiche Regel auf die Gleichung (8) an, so ergibt sich unter Voraussetzung der Existenz der zweiten partiellen Differentialquotienten von $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx} = 0$$

oder, wenn man reduziert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \tag{10}$$

aus welcher Gleichung sich eine Bestimmung für $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ergibt, nachdem man für $\frac{dy}{dx}$ den Wert aus (9) eingesetzt hat.

Behufs Ermittelung des dritten Differentialquotienten $\frac{d^3 y}{dx^3}$ müßte die Gleichung (10) abermals in bezug auf x differentiiert werden, usw.

Ist durch die Gleichung (7) y als mehrdeutige Funktion definiert, so setzen wir voraus, daß die Werte von y nach dem Gesetze der Stetigkeit in Zweige gesondert sind, d. h. so, daß y mit x stetig sich ändert (10). Die obige Rechnung erledigt die Frage nach den Differentialquotienten von y für alle Zweige

zugleich; die Trennung der Zweige erfolgt erst dann, wenn eine bestimmte Stelle ins Auge gefaßt wird, insofern dieselbe dann auch einem bestimmten Zweige angehören muß.

58. Beispiele. Die folgenden Beispiele dienen zur Erläuterung des Vorgeführten.

1) Durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ist y als zweideutige stetige Funktion von x in dem Intervalle $(-a, +a)$ gegeben; die explizite Darstellung lautet:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und läßt zwischen einem positiven und negativen Zweige unterscheiden. In dieser Form ergibt sich

$$y' = \mp \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad y'' = \mp \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = \mp \frac{ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wobei die oberen Zeichen jedesmal dem positiven, die unteren dem negativen Zweige entsprechen.

Bewirkt man die Differentiation in impliziter Form, so ist zuerst

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2}y' = 0$$

und nach nochmaliger Differentiation

$$\frac{1}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{y}{b^2}y'' = 0;$$

aus der ersten Gleichung folgt:

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

aus der zweiten nach Einsetzung dieses Wertes bei Berücksichtigung der gegebenen Gleichung:

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

Die Wertverbindungen $\pm a, 0$ sollten ausgeschlossen werden, weil für sie der partielle Differentialquotient der linken Seite der vorgelegten Gleichung nach y, d. i. $\frac{2y}{b^2}$, verschwindet;

indessen zeigen beide Formen der Rechnung, daß für $\lim x = \pm a$ und $\lim y = 0$ y' sowohl als y'' unendlich wird.

2) Die Gleichung

$$x^3 - 3\,axy + y^3 = 0 \qquad (a > 0)$$

bestimmt y im allgemeinen als dreideutige Funktion von x:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} + \sqrt{\frac{x^3}{4}(x^3 - 4\,a^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{x^3}{2} - \sqrt{\frac{x^3}{4}(x^3 - 4\,a^3)}};$$

aber nur, wenn die Diskriminante $\frac{x^3}{4}(x^3 - 4\,a^3)$ negativ ist, sind alle drei Bestimmungen reell, und dies findet in dem Intervall $(0, +a\sqrt[3]{4})$ statt; außerhalb desselben, d. i. in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(a\sqrt[3]{4}, +\infty)$, ist nur einer von den drei Werten reell, verhält sich die Funktion also wie eine eindeutige.

Einmalige Differentiation der vorgelegten Gleichung gibt:

$$x^2 - ay - (ax - y^2)y' = 0,$$

zweimalige Differentiation:

$$2\,x - ay' - (a - 2\,yy')y' - (ax - y^2)y'' = 0;$$

aus der ersten Gleichung folgt

$$y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2},$$

aus der zweiten, wenn man diesen Wert für y' einsetzt und die ursprünglich gegebene Gleichung berücksichtigt,

$$y'' = \frac{2\,a^3xy}{(ax - y^2)^3}.$$

Hier muß jedoch ein Wertepaar von x, y, nämlich $x = 0$, $y = 0$, ausgeschlossen werden, weil für dasselbe der partielle Differentialquotient der linken Seite der vorgelegten Gleichung in bezug auf y: $-3\,ax + 3\,y^2$, verschwindet; dieses Wertepaar macht sich auch schon durch den Umstand bemerkbar, daß bei demselben die Scheidung der eindeutigen Funktion von der dreideutigen eintritt.

3) Durch die Gleichung

$$a\cos^2 x + b\cos^2 y = 0$$

ist y als unendlich vieldeutige Funktion von x definiert. Mit Ausschluß aller Stellen x/y, an welchen $-2\,b\cos y \sin y$

$= - b \sin 2y$, d. i. der partielle Differentialquotient der linken Seite nach y, verschwindet, gilt

$$a \sin 2x + b \sin 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$2a \cos 2x + 2b \cos 2y \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b \sin 2y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

und daraus berechnet sich, wieder mit Rücksichtnahme auf die vorgelegte Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a \sin 2x}{b \sin 2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8a(a+b)\cos^2 x \cos^2 y}{b^2 \sin^3 2y}.$$

4) Aus $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ zu bestimmen.

5) Zu zeigen, daß sich aus

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} - \sqrt{ay^2 + 2by + c} = C(x - y)$$

ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{ay^2 + 2by + c}{ax^2 + 2bx + c}}.$$

59. Zusammengesetzte Funktionen zweier Variablen. Wir nehmen den in 55 behandelten Fall einer zusammengesetzten Funktion mit folgender Abänderung wieder auf: Es seien $u, v, \ldots$ gegebene eindeutige und stetige Funktionen der unabhängigen Variablen x, y; $z = f(u, v, \ldots)$ eine gegebene eindeutige und stetige Funktion von $u, v, \ldots$; dann heißt z eine zusammengesetzte Funktion von x, y und ist auf demselben Gebiete dieser Variablen eindeutig und stetig, auf welchem dies von $u, v, \ldots$ gilt.

Wenn man, von einer Stelle x, y dieses Gebietes ausgehend, x allein ändert, so können die in 55 durchgeführten Betrachtungen Wort für Wort auf den gegenwärtigen Fall übertragen werden und besteht der einzige Unterschied darin, daß an die Stelle der gewöhnlichen Differentialquotienten durchgehends partielle treten; mithin ergibt sich für den partiellen Differentialquotienten von z nach x der Ausdruck (55, (1)):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \cdots. \tag{11}$$

In gleicher Weise erhält man

$$(12)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \cdots.$$

Daraus leitet sich der Differentialquotient für eine Richtung $S(\varphi, \psi)$ und das totale Differential ab:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\psi = \dfrac{\partial f}{\partial u}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\psi\right\} + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial f}{\partial v}\left\{\dfrac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial v}{\partial y}\cos\psi\right\} + \cdots \\ \qquad = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{ds} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{ds} + \cdots \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} dz = \dfrac{\partial f}{\partial u}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy\right\} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\left\{\dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy\right\} + \cdots \\ \qquad = \dfrac{\partial f}{\partial u}du + \dfrac{\partial f}{\partial v}dv + \cdots. \end{cases}$$

Diese Formeln zeigen, daß mit $u, v, \ldots$ genau so zu operieren ist, als ob es unabhängige Variable wären.

Sollen die zweiten Differentialquotienten von z bestimmt werden, so ist zu beachten, daß die rechten Seiten der Gleichungen (11), (12) in $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \ldots$ wieder zusammengesetzte Funktionen sind und in $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \cdots$ Funktionen von x und y aufweisen; demzufolge ist

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left\{\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \cdots\right\}\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \qquad + \left\{\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \cdots\right\}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \cdots \\ \qquad + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \cdots \\ = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \cdots \\ \qquad + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \cdots; \end{cases}$$

in gleicher Weise ergibt sich aus (12):

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \cdots \\ \qquad + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \cdots; \end{cases}$$

ebensowohl aus (11) wie aus (12) erhält man:

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \\ \qquad \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \cdots. \end{cases}$$

Die Aufstellung des zweiten totalen Differentialquotienten und Differentials unterlassen wir; sie würde das unter (14) bemerkte bestätigen. Auch die Ausdehnung auf mehr als zwei unabhängige Variable unterliegt keiner Schwierigkeit.

Es sei beispielsweise $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$; setzt man $\frac{y}{x} = u$, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}; \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}, \; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2};$$

infolgedessen hat man auf Grund von (11), (12), (15) — (17):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial u}\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{y^2}{x^4} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{y}{x^3} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{x^2}.$$

Aus $z = f(ax + by, \alpha x - \beta y)$ ergibt sich, wenn man $ax + by = u$, $\alpha x - \beta y = v$ setzt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= a\frac{\partial f}{\partial u} + \alpha\frac{\partial f}{\partial v} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= b\frac{\partial f}{\partial u} - \beta\frac{\partial f}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2a\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= b^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2b\beta\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= ab\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (\alpha b - a\beta)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

60. Implizite Funktionen zweier Variablen. Es sei $f(x, y, z)$ eine in dem Gebiete R eindeutige und stetige Funktion der Variablen x, y, z, welche stetige partielle Differentialquotienten besitzt. Die Funktion nehme ferner innerhalb des Gebietes den Wert c an, aber nicht an vereinzelten Stellen, sondern an einer unendlichen Menge von Stellen $x/y/z$ derart, daß die z dieser Stellen eine eindeutige stetige Funktion

der x, y bilden, in geometrischer Ausdrucksweise: sie nehme den Wert c längs einer das Gebiet R durchsetzenden Fläche an. Dann ist durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = c \tag{18}$$

z implizit als eindeutige stetige Funktion von x, y definiert; wäre $z = \varphi(x, y)$ die explizite Darstellung dieser Funktion, so müßte die Einsetzung von $\varphi(x, y)$ an Stelle von z die Gleichung (18) identisch befriedigen, d. h. für jede Wertverbindung x/y des betreffenden Gebietes P.

Sonach erscheint die linke Seite von (18) als zusammengesetzte Funktion der Variablen x, y und hat zufolge (11) den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

in bezug auf x, und dieser muß, da es sich um eine konstante Funktion handelt, Null sein; beachtet man noch, daß $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ (weil y von x unabhängig ist), so entsteht die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{19}$$

aus welcher, wenn $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ ist, folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \tag{20}$$

in gleicher Weise ergibt sich, wenn man nach y differentiiert,

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{21}$$

und daraus unter der gleichen Bedingung:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{22}$$

[Die Voraussetzung, daß $\frac{\partial f}{\partial z}$ nicht verschwindet, braucht hier nur für solche Wertbindungen $x/y/z$ erfüllt zu sein, welche der Gleichung (18) genügen.]

Die Gleichungen (19), (21) sind das Resultat der partiellen Differentiation von (18) in bezug auf x, respektive y. Differentiiert man sie, von denselben Grundsätzen Gebrauch machend, die erste wieder nach x, die zweite nach y, endlich die erste nach y oder die zweite nach x, so kommt man zu den Gleichungen:

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

die wieder unter der Bedingung $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ und in Verbindung mit (20) und (22) die Differentialquotienten zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ zu berechnen gestatten.

Die Werte x, y, z, die in den Gleichungen (20), (22), (23) auftreten, haben der Gleichung (18) zu genügen.

61. Beispiele. Die Durchführung des eben entwickelten Verfahrens soll an den folgenden Beispielen erklärt werden.

1) Die Gleichung

$$
ax^2 + by^2 + cz^2 = k
$$

bestimmt z als zweideutige Funktion von x und y, die ohne weiteres auch in expliziter Form gegeben werden könnte; die Differentiation gestaltet sich jedoch in impliziter Form einfacher und übersichtlicher. Es lauten die Gleichungen (19), (21), (23) im vorliegenden Falle wie folgt:

$$
\begin{aligned}
ax + cz\,\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\
by + cz\,\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\
a + c\left(\frac{\partial z^2}{\partial x}\right) + cz\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0 \\
b + c\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + cz\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0 \\
c\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + cz\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= 0
\end{aligned}
$$

und geben durch sukzessive Auflösung unter Berücksichtigung der vorgelegten Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a x}{c z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{b y}{c z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{a(k - b y^2)}{c^2 z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{b(k - a x^2)}{c^2 z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{a b x y}{c^2 z^3}.$$

2) Durch die Gleichung

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2 = h^2$$

ist z als zweideutige Funktion von x, y definiert. Setzt man zur Abkürzung:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = u_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = u_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = u_3$$

und bedient sich der Summenbezeichnung

$$m_1 + m_2 + m_3 = [m],$$

so lauten die Gleichungen (19), (21), (23) hier folgendermaßen:

$$[au] + [cu] \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$[bu] + [cu] \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$[aa] + 2[ac]\frac{\partial z}{\partial x} + [cc]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + [cu] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$[bb] + 2[bc]\frac{\partial z}{\partial y} + [cc]\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + [cu] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$[ab] + [ac]\frac{\partial z}{\partial y} + [bc]\frac{\partial z}{\partial x} + [cc]\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + [cu]\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

und ihre sukzessive Auflösung liefert die Werte:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{[au]}{[cu]}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{[bu]}{[cu]}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{[aa][cu]^2 - 2[ac][au][cu] + [cc][au]^2}{[cu]^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{[bb][cu]^2 - 2[bc][bu][cu] + [cc][bu]^2}{[cu]^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{[bc][cu]^2 - \{[ac][bu] + [bc][au]\}[cu] + [cc][au][bu]}{[cu]^3}.$$

3) Man bestimme aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy = 2a^2$$

die ersten und zweiten Ableitungen von z.

62. Implizite Funktionen, gegeben durch simultane Gleichungen. Im Bereiche R seien $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ als eindeutige stetige Funktionen von x, y, z gegeben; φ besitze längs einer das Gebiet R durchsetzenden Fläche den Wert α, ψ längs einer anderen Fläche durchwegs den Wert β; beide Flächen mögen sich nach einer ebenfalls R durchsetzenden Linie schneiden; dann entspricht jedem Punkte dieser Linie eine Wertverbindung $x/y/z$, für welche $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$ ist; die y dieser Wertverbindungen konstituieren eine Funktion von x und ebenso bilden die z dieser Wertverbindungen eine Funktion von x für ein gewisses Intervall dieser letzten Variablen. Wir drücken diesen Sachverhalt dadurch aus, daß wir sagen, durch die *simultanen* Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= \alpha \\ \psi(x, y, z) &= \beta\end{aligned}\right. \tag{24}$$

seien y, z implizite als Funktionen von x gegeben. Um die Differentialquotienten dieser Funktionen zu bestimmen, differentiiere man die linken Seiten als zusammengesetzte Funktionen von x und setze die Resultate der Null gleich, weil es sich um konstante Funktionen handelt; dadurch erhält man die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} &= 0\end{aligned}\right. \tag{25}$$

zur Bestimmung von $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$; die Lösbarkeit setzt aber voraus, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z}\end{vmatrix} = X$$

von Null verschieden sei; ist dies der Fall und setzt man weiter zur Abkürzung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix} = Y, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = Z,$$

so lautet die Lösung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X}. \tag{26}$$

Für die Differentiale von y, z ergibt sich daraus bei gegebenem dx

$$dy = \frac{Y}{X}\,dx, \qquad dz = \frac{Z}{X}\,dx,$$

so daß

$$dx : dy : dz = X : Y : Z. \tag{26*}$$

Sind auch die zweiten Differentialquotienten erforderlich, so hat man die Gleichungen (25) nochmals unter Rücksichtnahme darauf zu differentiieren, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ abermals zusammengesetzte Funktionen von derselben Art sind wie φ, ψ selbst; als Resultat ergibt sich das Gleichungspaar:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\frac{dz}{dx} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} \\ &\qquad + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}\frac{dz}{dx} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx} \\ &\qquad + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{d^2 z}{dx^2} = 0, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

das wieder nur unter der Bedingung

$$X \neq 0$$

zu einer Bestimmung von $\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dx^2}$ führt, nachdem die Werte (26) in (27) eingetragen worden sind.

Die eben behandelte Aufgabe ist ein spezieller Fall des folgenden allgemeinen Problems der Differentialrechnung: Es sind r simultane Gleichungen zwischen $n + r$ Variablen x_1, $x_2, \ldots x_n$, $u_1, u_2, \ldots u_r$ gegeben; dadurch sind im allgemeinen r von den Variablen, z. B. $u_1, u_2, \ldots u_r$, als Funktionen der n übrigen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche voneinander nicht abhängen, bestimmt; es sollen die Differentialquotienten der $u_1, u_2, \ldots u_r$ nach den einzelnen Variablen ermittelt werden.

Die Lösung besteht darin, daß man sämtliche Gleichungen in bezug auf die betreffende Variable, z. B. x_1, differentiiert, die linke Seite — die rechte wird als konstant vorausgesetzt — als zusammengesetzte Funktion behandelnd; dadurch entstehen r Gleichungen, welche in bezug auf $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial u_r}{\partial x_1}$ linear sind und eine Bestimmung dieser Größen nur dann zulassen, wenn die Determinante r-ten Grades aus deren Koeffizienten nicht Null ist.

Es bedarf kaum der Bemerkung, daß im allgemeinen die Auswahl der r unter den $n+r$ Variablen, die man als Funktionen der n anderen auffassen will, freigestellt ist; erst nach Wahl dieser abhängigen Variablen hat die Aufgabe einen bestimmten Sinn.

63. Beispiele. 1) Durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$
$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

sind y und z als stetige Funktionen von x in dem Intervalle $(0, 2a)$ bestimmt. Durch ein- und zweimalige Differentiation erhält man die Gleichungen:

$$x + y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = 0$$
$$x - a + y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} + z\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$
$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

und durch Auflösung derselben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y}, \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{z}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{y^3}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{a^2}{z^3}.$$

2) Die Gleichungen

$$x + y + z + u = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = c^3$$

bestimmen x, y, z als Funktionen von u in dem Intervalle $(-b, +b)$ Zur Bestimmung der ersten Differentialquotienten ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{dx}{du} + \frac{dy}{du} + \frac{dz}{du} + 1 = 0$$

$$x\frac{dx}{du} + y\frac{dy}{du} + z\frac{dz}{du} + u = 0$$

$$x^2\frac{dx}{du} + y^2\frac{dy}{du} + z^2\frac{dz}{du} + u^2 = 0;$$

die Determinante der Koeffizienten ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y);$$

die Determinanten, welche die Zähler der Unbekannten bilden, sind der Reihe nach

$$-(z-y)(u-y)(u-z), \quad (u-z)(x-z)(x-u),$$
$$-(x-u)(y-u)(y-x);$$

daraus folgt:

$$\frac{dx}{du} = -\frac{(u-y)(u-z)}{(x-y)(x-z)}, \quad \frac{dy}{du} = -\frac{(u-z)(u-x)}{(y-z)(y-x)},$$
$$\frac{dz}{du} = -\frac{(u-x)(u-y)}{(z-x)(z-y)}.$$

§ 4. Transformation der Variablen.

64. Simultane Transformation zweier voneinander abhängigen Variablen. Nachdem in **43** der einfachste Fall der Transformation behandelt worden ist, sind wir jetzt in der Lage, auch die übrigen Fälle zu erledigen. Wir beginnen mit dem folgenden Problem:

Zwischen den beiden Variablen x, y besteht ein funktionaler Zusammenhang, in welchem x als unabhängige Variable angesehen wird; an die Stelle von x, y werden zwei neue Variable u, v mittels der Transformationsgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

eingeführt; es sind die ursprünglichen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$ *durch die aus dem neuen Zusammenhange zwischen* u *und* v *hervorgehenden* $\frac{dv}{du}$, $\frac{d^2v}{du^2}$, $\cdots$ *darzustellen.*

Da in dem neuen Zusammenhange u als unabhängige Variable auftreten soll, so differentiiere man die Gleichungen (1) in bezug auf u; ein- und zweimalige Ausführung dieses Prozesses liefert:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{dx}{du} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{du} \\ \frac{dy}{du} = \frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv}{du} \\ \frac{d^2x}{du^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2} \\ \frac{d^2y}{du^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2}; \end{cases}$$

setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen **43**, (6) oder die daraus resultierenden

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{du}\cdot\frac{d^2y}{du^2} - \frac{d^2x}{du^2}\cdot\frac{dy}{du}}{\left(\frac{dx}{du}\right)^3} \end{cases}$$

ein, so ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Von den Transformationsgleichungen (1) wird vorausgesetzt, daß sie *umkehrbar eindeutig* sind; das bedeutet so viel, daß nicht allein φ, ψ eindeutige Funktionen der Argumente u, v, sondern daß auch u, v als eindeutige Funktionen von x, y bestimmt sind; wäre

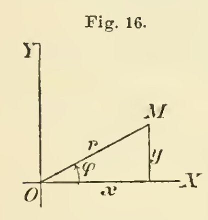
$$(1^*)\quad \begin{cases} u = \varphi_1(x, y) \\ v = \psi_1(x, y) \end{cases}$$

diese Bestimmung, so heißt (1*) die *inverse Transformation* zu (1).

Bei geometrischer Interpretation lassen die Gleichungen (1) und (1*) zwei wesentlich verschiedene Deutungen zu, welche kurz auseinandergesetzt werden sollen.

I. Sind x, y die Koordinaten eines Punktes M der Ebene in bezug auf ein bestimmtes, z. B. rechtwinkliges Koordinatensystem und u, v die Koordinaten *desselben* Punktes in bezug auf ein zweites System, so bestimmen die Gleichungen (1) und (1*) eine *Koordinatentransformation* und vermitteln insbesondere die Gleichungen (1) den Übergang vom ersten System zum zweiten, die (1*) den Übergang vom zweiten zum ersten. Geht durch den Punkt M eine Kurve, so bestimmt $\frac{dy}{dx}$ die Richtung der Tangente an dieselbe (**22**, (2)) und ist $\frac{dv}{du}$ für die *nämliche* Richtung bestimmend, jedesmal in einer dem Koordinatensystem entsprechenden Weise.

Fig. 16.



Einen der wichtigsten Fälle dieser Art bildet die Transformation rechtwinkliger Koordinaten in Polarkoordinaten, wobei der Ursprung und die positive Abszissenachse des ersten Systems als Pol, beziehungsweise Polarachse verwendet werden (Fig. 16). Dann ist $u = r$ der *Radiusvektor* und $v = \varphi$ die *Anomalie* des Punktes M; die Gleichungen (1) lauten:

$$(4) \qquad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

und jene (1*)

$$(4^*) \qquad \begin{cases} r = \left| \sqrt{x^2 + y^2} \right| \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

wobei die Eindeutigkeit der letzten Gleichung dadurch herbeigeführt wird, daß man festsetzt, φ sei jener Bogen aus dem Intervall $(0, 2\pi)$, dessen Sinus das Vorzeichen von y, dessen Kosinus das Vorzeichen von x hat. An die Stelle der Gleichungen (2) treten die folgenden:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi + \dfrac{dr}{d\varphi}\cos\varphi \\ \dfrac{dy}{d\varphi} = \quad r\cos\varphi + \dfrac{dr}{d\varphi}\sin\varphi \\ \dfrac{d^2x}{d\varphi^2} = -r\cos\varphi - 2\dfrac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + \dfrac{d^2r}{d\varphi^2}\cos\varphi \\ \dfrac{d^2y}{d\varphi^2} = -r\sin\varphi + 2\dfrac{dr}{d\varphi}\cos\varphi + \dfrac{d^2r}{d\varphi^2}\sin\varphi. \end{cases}$$

II. Bedeuten wieder x, y die Koordinaten eines Punktes M der Ebene in bezug auf ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem, $u = x_1$, $v = y_1$ die Koordinaten eines anderen Punktes M_1 *derselben* Ebene in bezug auf *dasselbe* Koordinatensystem, so vermitteln die Gleichungen (1*) oder

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x, y) \\ y_1 = \psi_1(x, y) \end{cases}$$

den Übergang von M zu M_1, die inversen Gleichungen (1) oder

$$(6^*)\quad \begin{cases} x = \varphi(x_1, y_1) \\ y = \psi(x_1, y_1) \end{cases}$$

den Übergang von M_1 zu M, und beide bestimmen eine *Transformation der Ebene in sich.* Die Ebene erscheint nun als Trägerin zweier Punktsysteme S und S_1, die Gleichungen (6) ordnen jedem Punkte aus S einen und nur einen Punkt aus S_1, umgekehrt die Gleichungen (6*) jedem Punkte aus S_1 einen und nur einen Punkt aus S zu; aus diesem Grunde wird die Transformation auch *ein-eindeutige Punkttransformation* genannt. Weil wir von den Funktionen φ_1, ψ_1; φ, ψ voraussetzen, daß sie stetig sind und bestimmte Differentialquotienten besitzen, so werden hinreichend kleinen Änderungen von x, y beliebig kleine Änderungen von x_1, y_1 und umgekehrt entsprechen; infolgedessen wird bei stetiger Bewegung des Punktes M im allgemeinen auch der transformierte Punkt M_1 eine stetige Bewegung ausführen; daher nennt man die Transformation eine *kontinuierliche.* Geht durch den Punkt M eine Kurve, so bestimmt $\frac{dy}{dx}$ die Richtung ihrer Tangente daselbst, $\frac{dy_1}{dx_1}$ hingegen die Richtung der Tangente an die *transformierte Kurve* im Punkte M_1.

Unter den ein-eindeutigen Punkttransformationen spielt die *projektive Transformation* eine besonders wichtige Rolle; sie ist durch die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \\ y_1 = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \end{cases}$$

bestimmt, in welchen alle a, b, c gegebene Konstanten sind. Um die *inverse* Transformation zu erhalten, bezeichne man den gemeinsamen Nenner mit N und bilde aus (7) die Gleichungen

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = N x_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = N y_1$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 = N;$$

werden in der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

die den Elementen $a_1, b_1, \ldots$ adjungierten Unterdeterminanten mit $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ bezeichnet und multipliziert man die obigen drei Gleichungen der Reihe nach mit α_1, α_2, α_3 und addiert sie, so folgt wegen $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = R$, $b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 = 0$, $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$:

$$Rx = N(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3);$$

ebenso erhält man nach Multiplikation mit β_1, β_2, β_3 und Addition:

$$Ry = N(\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3)$$

und nach Multiplikation mit γ_1, γ_2, γ_3 und darauffolgender Addition:

$$R = N(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3);$$

ist nun $R \neq 0$ — und nur dann lassen die Gleichungen (7) Auflösung nach x, y zu und bestimmen eine eigentliche Transformation der Ebene in sich —, so ergibt paarweise Division der letzten drei Gleichungen:

$$(7^*)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3} \\ y = \dfrac{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3} \end{cases}$$

Das wesentliche Merkmal der projektiven Transformation liegt darin, daß sie jede Gerade der Ebene wieder in eine Gerade transformiert. Denn beschreibt der Punkt M die Gerade

$$Ax + By + C = 0,$$

so beschreibt der transformierte Punkt M_1 das Gebilde

$$A\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3} + B\frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3} + C = 0,$$

d. i.

$$(A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1)x_1 + (A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2)y_1 \\ + (A\alpha_3 + B\beta_3 + C\gamma_3) = 0,$$

also wieder eine Gerade.

Man erkennt ebenso leicht: Beschreibt der Punkt M einen Kegelschnitt, so beschreibt der transformierte Punkt M_1 wieder einen Kegelschnitt. Allgemein: Beschreibt M eine algebraische Kurve n-ter Ordnung, so beschreibt auch M_1 eine solche.

An die Stelle der Gleichungen (2) treten nun:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{(a_3 x + b_3 y + c_3)\left(a_1 + b_1\frac{dy}{dx}\right) - (a_1 x + b_1 y + c_1)\left(a_3 + b_3\frac{dy}{dx}\right)}{(a_3 x + b_3 y + c_3)^2}$$

$$= \frac{-\gamma_2 y + \beta_2 + (\gamma_2 x - \alpha_2)\frac{dy}{dx}}{(a_3 x + b_3 y + c_3)^2},$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{(a_3 x + b_3 y + c_3)\left(a_2 + b_2\frac{dy}{dx}\right) - (a_2 x + b_2 y + c_2)\left(a_3 + b_3\frac{dy}{dx}\right)}{(a_3 x + b_3 y + c_3)^2}$$

$$= \frac{\gamma_1 y - \beta_1 - (\gamma_1 x - \alpha_1)\frac{dy}{dx}}{(a_3 x + b_3 y + c_3)^2},$$

so daß

$$(8) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\gamma_1 y - \beta_1 - (\gamma_1 x - \alpha_1)\frac{dy}{dx}}{-\gamma_2 y + \beta_2 + (\gamma_2 x - \alpha_2)\frac{dy}{dx}};$$

dadurch ist die *Richtung* bestimmt, in welche die durch $\frac{dy}{dx}$ charakterisierte Richtung aus dem Punkte M im Wege der Transformation (7) übergeführt wird.

Die einfachste unter den projektiven Transformationen ist die *lineare Transformation,* welche eintritt, wenn $a_3 = b_3 = 0$, $c_3 = 1$; sie ist also durch die Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$$

bestimmt und nur dann eine eigentliche Transformation, wenn

$$\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

setzt man ferner

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \alpha, \qquad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \beta,$$

so lautet die inverse Transformation:

$$(9^*)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{b_2 x_1 - b_1 y_1 + \alpha}{\gamma} \\ y = \dfrac{-a_2 x_1 + a_1 y_1 + \beta}{\gamma}. \end{cases}$$

Die durch sie herbeigeführte Richtungstransformation ist durch die Gleichung

$$(10)\qquad \frac{d y_1}{d x_1} = \frac{a_2 + b_2 \dfrac{d y}{d x}}{a_1 + b_1 \dfrac{d y}{d x}}$$

bestimmt. Da sie von x, y nicht abhängt, so wird jede Richtung, deren Koeffizient $\frac{d y}{d x}$ ist, in eine Richtung vom Koeffizienten $\frac{d y_1}{d x_1}$ transformiert, mit anderen Worten: *die lineare Transformation führt parallele Gerade wieder in parallele Gerade über.*

65. Beispiele. 1) Der Ausdruck

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{d y}{d x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2 y}{d x^2}}$$

für rechtwinklige Koordinaten x, y ist in Polarkoordinaten r, φ zu transformieren.

Mit Hilfe der Gleichungen (3), in welchen nur $u = \varphi$ gesetzt werden muß, erhält man zunächst

$$\varrho = \frac{\left[\left(\dfrac{d x}{d \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{d y}{d \varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d x}{d \varphi} \dfrac{d^2 y}{d \varphi^2} - \dfrac{d^2 x}{d \varphi^2} \dfrac{d y}{d \varphi}};$$

nun folgt aus den Gleichungen (5):

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

und weiter nach gehöriger Reduktion

$$\frac{dx}{d\varphi}\frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{d^2x}{d\varphi^2}\frac{dy}{d\varphi} = r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 r - \frac{d^2r}{d\varphi^2},$$

somit ist

$$\varrho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

2) Für die projektive Punkttransformation

$$x_1 = \frac{c}{y}, \quad y_1 = \frac{ax}{y}$$

(dieselbe geht aus der allgemeinen (7) hervor, wenn $a_1 = b_1 = b_2 = c_2 = a_3 = c_3 = 0$, $c_1 = c$, $a_1 = a$, $b_3 = 1$ ist) die *Richtungstransformation* zu bestimmen.

Die nicht verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

gibt zur ersten und zweiten Zeile die Unterdeterminanten

$$\alpha_1 = 0, \qquad \beta_1 = 0, \qquad \gamma_1 = a;$$
$$\alpha_2 = c, \qquad \beta_2 = 0, \qquad \gamma_2 = 0;$$

daher ist nach (8)

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ay - ax\frac{dy}{dx}}{-c\frac{dy}{dx}};$$

d. h. geht durch den Punkt $M(x/y)$ eine Kurve, deren Tangente den Richtungskoeffizienten $\frac{dy}{dx}$ hat, so hat die Tangente der transformierten Kurve im homologen Punkte M_1 den Richtungskoeffizienten $\frac{dy_1}{dx_1}$.

So wird beispielsweise der *Kreis*

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0$$

durch die vorliegende projektive Transformation in

$$\frac{c^2 y_1^2}{a^2 x_1^2} + \frac{c^2}{x_1^2} - 2r\frac{c}{x_1} = 0,$$

also in die *Parabel*

$$c y_1^2 - 2a^2 r x_1 + a^2 c = 0$$

transformiert; im Punkte $x = 0$, $y = 2r$ des Kreises hat die Tangente den Richtungskoeffizienten $\frac{dy}{dx} = 0$, in dem homologen Punkte $x_1 = \frac{c}{2r}$, $y_1 = 0$ hat die Parabeltangente den Richtungskoeffizienten $\frac{dy_1}{dx_1} = \infty$.

66. Transformation der Variablen in Funktionen von mehr als einer Veränderlichen. Der einfachste Fall ist der folgende: *In einem funktionalen Zusammenhange zwischen drei Variablen x, y, z werden x, y als die unabhängigen Veränderlichen aufgefaßt; an ihre Stelle sollen zwei neue unabhängige Variable treten, welche mit ihnen in einem gegebenen Zusammenhange stehen.*

Wie das analoge Problem **43** tritt auch dieses in zwei verschiedenen Formen auf, je nachdem z eine *beliebige*, unbestimmt gelassene oder eine *gegebene* Funktion von x, y ist. Hier wie dort sind die in beiden Fällen in Kraft tretenden Formeln im Wesen die gleichen.

I. Es sei z eine beliebige Funktion der unabhängigen Variablen x, y, an deren Stelle die neuen Variablen u, v mittels der Transformationsgleichungen

$$(11) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

eingeführt werden sollen; irgend ein Ausdruck oder eine Relation zwischen x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\cdots$ ist in den u, v, z, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\cdots$ darzustellen.

Indem man z als zusammengesetzte Funktion von u, v auffaßt, erhält man, von den Abkürzungen:

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = f_u, \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = f_v,$$

$$\frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u^2} = f_{uu}, \quad \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v^2} = f_{vv}, \quad \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v} = f_{uv}$$

Gebrauch machend, zunächst die beiden Gleichungen (59, (11), (12))

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \varphi_u \dfrac{\partial z}{\partial x} + \psi_u \dfrac{\partial z}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \varphi_v \dfrac{\partial z}{\partial x} + \psi_v \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

und aus diesen ergibt sich bei allen Wertverbindungen u, v, für welche die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, für $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ die Bestimmung:

$$(13) \qquad 1 : \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \psi_u \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \psi_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varphi_u & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \varphi_v & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Sind auch die zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in der betreffenden Rechnung, so differentiiere man die Gleichung (12) nochmals, und man erhält (59, (15) bis (17)):

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \varphi_{uu} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \psi_{uu} \dfrac{\partial z}{\partial y} + \varphi_u \left(\varphi_u \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \psi_u \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \\ \qquad\qquad + \psi_u \left(\varphi_u \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \psi_u \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \varphi_{vv} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \psi_{vv} \dfrac{\partial z}{\partial y} + \varphi_v \left(\varphi_v \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \psi_v \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \\ \qquad\qquad + \psi_v \left(\varphi_v \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \psi_v \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \varphi_{uv} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \psi_{uv} \dfrac{\partial z}{\partial y} + \varphi_u \left(\varphi_v \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \psi_v \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \\ \qquad\qquad + \psi_u \left(\varphi_v \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \psi_v \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

— dabei ist von einer Reduktion der Gleichungen abgesehen worden; nach Einsetzung der Werte für $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ aus (13) können hieraus $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ bestimmt werden für alle Wertverbindungen u, v, für welche

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0;$$

denn die Determinante der Koeffizienten von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in (14), d. i.

$$\begin{vmatrix} \varphi_u{}^2 & 2\varphi_u\psi_u & \psi_u{}^2 \\ \varphi_v{}^2 & 2\varphi_v\psi_v & \psi_v{}^2 \\ \varphi_u\varphi_v & \varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u & \psi_u\psi_v \end{vmatrix}$$

stellt sich als negative dritte Potenz der obigen Determinante zweiten Grades dar*) und ist daher zugleich mit dieser verschieden von Null.

II. Ist z eine *gegebene* Funktion von $x, y, z = f(x, y)$, so lautet die Aufgabe dahin, die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots$ oder einen aus x, y, z und diesen Differentialquotienten gebildeten Ausdruck in den neuen Variablen u, v darzustellen.

Führt man die Substitution (11) in der gegebenen Funktion aus, so ergibt sich

$$z = f[\varphi(u, v), \ \psi(u, v)] = \chi(u, v) \tag{15}$$

ebenfalls als bekannte Funktion von u, v und es lassen sich somit die Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \chi_u, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \chi_v, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \chi_{uu}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \chi_{vv}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \chi_{uv}$$

bestimmen; setzt man ihre Werte in (12) und (14) ein, so sind diese Gleichungen geeignet, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ als Funktionen von u, v zu bestimmen.

Die Führung der Rechnung im Falle von mehr als zwei unabhängigen Variablen und ihre Ausdehnung auf höhere Differentialquotienten bedarf keiner weiteren Erklärung.

---

*) Man löse, um dies einzusehen, die Determinante dritten Grades in die Summe

$$\begin{vmatrix} \varphi_u^2 & \varphi_u\psi_u & \psi_u^2 \\ \varphi_v^2 & \varphi_v\psi_v & \psi_v^2 \\ \varphi_u\varphi_v & \varphi_u\psi_v & \psi_u\psi_v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_u^2 & \varphi_u\psi_u & \psi_u^2 \\ \varphi_v^2 & \varphi_v\psi_v & \psi_v^2 \\ \varphi_u\varphi_v & \varphi_v\psi_u & \psi_u\psi_v \end{vmatrix}$$

auf und entwickle beide Bestandteile nach der ersten oder der dritten Kolonne.

67. Beispiele. 1) Für eine beliebige Funktion z von x, y ist der Ausdruck

$$R = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

der Transformation

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$

zu unterwerfen (64, I).

Die Gleichungen (12) lauten im vorliegenden Falle:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = - r \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial z}{\partial y};$$

quadriert man sie, nachdem man die erste durch r dividiert hat, und bildet hierauf ihre Summe, so ergibt sich:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2;$$

mithin ist

$$R = 1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2.$$

2) Es sei V eine beliebige Funktion der unabhängigen Variablen x, y, z; man soll die mit Hilfe derselben gebildeten Ausdrücke:

$$\Omega_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$
$$\Omega_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

einer linearen Transformation (64, II)

$$(16) \qquad \begin{cases} x = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 \\ y = a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 \\ z = a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 \end{cases}$$

unterwerfen von solcher Art, daß durch sie $x^2 + y^2 + z^2$ übergeführt wird in $x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$.

Eine lineare Transformation von dieser Beschaffenheit wird, ohne Rücksicht auf die Anzahl der Variablen, eine *orthogonale Transformation* genannt.

Um zunächst die *Eigenschaften der Koeffizienten* einer solchen Transformation zu ermitteln, bilde man die Quadratsumme der Transformationsgleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 =$$
$$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)x_1{}^2 + (b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2)y_1{}^2 + (c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2)z_1{}^2$$
$$+ 2(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)y_1z_1 + 2(c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)z_1x_1$$
$$+ 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)x_1y_1;$$

ersetzt man die linke Seite, entsprechend der Definition, durch $x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2$, so führt die Vergleichung beider Seiten zu folgenden für die orthogonale Transformation charakteristischen Beziehungen*):

$$(17)\qquad \begin{cases} a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = 1 \\ b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 = 1 \\ c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 = 1 \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man ferner (16) der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3; dann mit b_1, b_2, b_3, endlich mit c_1, c_2, c_3 und bildet jedesmal die Summe mit Rücksicht auf (17), so ergibt sich die inverse Transformation

$$(16^*)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1x + a_2y + a_3z \\ y_1 = b_1x + b_2y + b_3z \\ z_1 = c_1x + c_2y + c_3z \end{cases}$$

und zu den Relationen (17) treten somit noch die folgenden:

$$(17^*)\qquad \begin{cases} a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 = 1 \\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2 = 1 \\ a_3{}^2 + b_3{}^2 + c_3{}^2 = 1 \\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0 \\ a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 = 0 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \end{cases}$$

*) Mit Hilfe dieser Relationen ist leicht nachzuweisen, daß das Quadrat der Determinante der Transformation:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

gleich der Einheit, die Determinante selbst also von Null verschieden ist.

Die Ausführung der Gleichungen (12) gibt nun:

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = a_1 \dfrac{\partial V}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial V}{\partial y} + a_3 \dfrac{\partial V}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y_1} = b_1 \dfrac{\partial V}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial V}{\partial y} + b_3 \dfrac{\partial V}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z_1} = c_1 \dfrac{\partial V}{\partial x} + c_2 \dfrac{\partial V}{\partial y} + c_3 \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

und die sinngemäße Ausführung von (14):

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2} = {a_1}^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + {a_2}^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + {a_3}^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2\, a_2 a_3 \dfrac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial z} \\ \qquad\qquad + 2\, a_3 a_1 \dfrac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial x} + 2\, a_1 a_2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial {y_1}^2} = {b_1}^2 \dfrac{\partial^3 V}{\partial x^2} + {b_2}^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + {b_3}^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2\, b_2 b_3 \dfrac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial z} \\ \qquad\qquad + 2\, b_3 b_1 \dfrac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial x} + 2\, b_1 b_2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial {z_1}^2} = {c_1}^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + {c_2}^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + {c_3}^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2\, c_2 c_3 \dfrac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial z} \\ \qquad\qquad + 2\, c_3 c_1 \dfrac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial x} + 2\, c_1 c_2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}. \end{cases}$$

Bildet man die Quadratsumme der Gleichungen (18), dann die einfache Summe der Gleichungen (19), beides mit Rücksicht auf (17*), so ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \Omega_1,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial {z_1}^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Omega_2;$$

d. h. die beiden Ausdrücke Ω_1, Ω_2 erleiden bei einer orthogonalen Transformation der Variablen x, y, z keine Änderung.

3) Durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist z als zweideutige Funktion der beiden Variablen x, y definiert auf demjenigen Gebiete, für welches

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqq 0,$$

d. h. im Innern und auf dem Umfange einer Ellipse mit den Halbachsen a, b. Es sind die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ mittels der Transformation

$$x = a \sin u \cos v$$
$$y = b \sin u \sin v$$

in den Variablen u, v darzustellen.

Mit Hilfe dieser Substitution ergibt sich

$$z = \pm c \cos u$$

und die Gleichungen (12) gestalten sich wie folgt:

$$\mp c \sin u = \quad a \cos u \cos v \frac{\partial z}{\partial x} + b \cos u \sin v \frac{\partial z}{\partial y}$$
$$0 = - a \sin u \sin v \frac{\partial z}{\partial x} + b \sin u \cos v \frac{\partial z}{\partial y};$$

ihre Auflösung liefert:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mp \frac{c \sin u \cos v}{a \cos u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \mp \frac{c \sin u \sin v}{b \cos u};$$

die Vorzeichen beziehen sich aufeinander.

4) Zu zeigen, daß die Transformation $x = u + v$, $y = uv$ zu den Gleichungen führt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v}}{u - v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}}{u - v}.$$

5) Zu zeigen, daß infolge der Transformation

$$x = \xi + \eta \cos \omega$$
$$y = \quad \eta \sin \omega$$

(Übergang von rechtwinkligen Koordinaten x, y zu schiefwinkligen ξ, η bei derselben Abszissenachse und dem Koordinatenwinkel ω) die folgenden Relationen stattfinden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \omega} \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \cos \omega + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \right\},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \omega} \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right\}.$$

68. Simultane Transformation dreier voneinander abhängigen Variablen. *Zwischen den drei Variablen x, y, z bestehe ein funktionaler Zusammenhang, in welchem x, y als unabhängige Veränderliche gelten; an Stelle von x, y, z sollen neue Variable u, v, w mittels der Transformationsgleichungen*

$$(20) \qquad \begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$$

eingeführt werden. Es sind die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$ *durch die aus dem neuen Zusammenhange hervorgehenden* $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \cdots$ *darzustellen.*

Zur Lösung dieser Aufgabe sind die Gleichungen 66, (12), (14) heranzuziehen, deren erste Gruppe wir zu diesem Zwecke in der Form schreiben

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}; \end{cases}$$

nun sind, da w als Funktion von u, v aufgefaßt wird, vermöge (20) x, y, z zusammengesetzte Funktionen von u, v; infolgedessen hat man mit Benutzung der in 66 eingeführten Bezeichnung:

$$(22) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \varphi_u + \varphi_w \dfrac{\partial w}{\partial u}, \; \dfrac{\partial y}{\partial u} = \psi_u + \psi_w \dfrac{\partial w}{\partial u}, \; \dfrac{\partial z}{\partial u} = \chi_u + \chi_w \dfrac{\partial w}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \varphi_v + \varphi_w \dfrac{\partial w}{\partial v}, \; \dfrac{\partial y}{\partial v} = \psi_v + \psi_w \dfrac{\partial w}{\partial v}, \; \dfrac{\partial z}{\partial v} = \chi_v + \chi_w \dfrac{\partial w}{\partial v}; \end{cases}$$

nach Eintragung dieser Werte in (21) sind diese Gleichungen zur Lösung der gestellten Aufgabe geeignet, soweit sie die ersten Differentialquotienten von z betrifft.

Die erste der Gleichungen (14) lautet in anderer Schreibweise:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$
$$+ \frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right);$$

darin sind $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ durch die Werte aus (22) und $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ durch die folgenden zu ersetzen, die aus (22) sich ergeben:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \varphi_{uu} + 2\varphi_{uw}\frac{\partial w}{\partial u} + \varphi_{ww}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \varphi_w \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \psi_{uu} + 2\psi_{uw}\frac{\partial w}{\partial u} + \psi_{ww}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \psi_w \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \chi_{uu} + 2\chi_{uw}\frac{\partial w}{\partial u} + \chi_{ww}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \chi_w \frac{\partial^2 w}{\partial u^2};$$

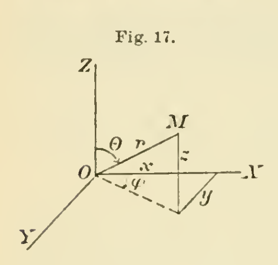
in ähnlicher Weise sind die beiden noch übrigen Gleichungen der Gruppe (14) zu behandeln, wodurch sich wieder Gleichungen ergeben, welche im Verein mit (21) die gestellte Aufgabe auch in bezug auf die zweiten Differentialquotienten lösen.

Bei geometrischer Interpretation dieses Problems sind wieder zwei Auffassungen zu unterscheiden, welche den in 64 unter I, II erörterten entsprechen.

I. Bedeuten x, y, z die Koordinaten eines Punktes M im Raume in bezug auf ein Koordinatensystem und u, v, w die Koordinaten *desselben* Punktes in bezug auf ein anderes Koordinatensystem, so spricht man von einer räumlichen *Koordinatentransformation.*

Eine der wichtigsten unter diesen bildet der Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu räumlichen Polarkoordinaten. Dann ist $w = r$ der Radiusvektor, $u = \varphi$ der Neigungswinkel der Ebene MOZ gegen die zx-Ebene und $v = \theta$ der Winkel ZOM (Fig. 17) und die Transformationsgleichungen lauten:

Fig. 17.



$$(23) \qquad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta; \end{cases}$$

die inverse Transformation ist durch

$$(23^*) \qquad \begin{cases} r = \left|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right| \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} \\ \theta = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{z}{\left|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right|} \end{cases}$$

bestimmt, wobei die Eindeutigkeit der zweiten Gleichung dadurch herbeigeführt wird, daß man festsetzt, φ sei derjenige Bogen aus dem Intervalle $(0, 2\pi)$, dessen Sinus das Vorzeichen von y und dessen Kosinus das Vorzeichen von x hat.

In diesem Falle lauten die Gleichungen (21), nachdem bereits jene (22) berücksichtigt worden sind, wie folgt:

$$0 = \left(- r \sin\theta \sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \cos\varphi\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(r \sin\theta \cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \sin\varphi\right) \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$- r \sin\theta + \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta = \left(r \cos\theta \cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\varphi\right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(r \cos\theta \sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \sin\varphi\right) \frac{\partial z}{\partial y}$$

und daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{r^2 \sin\theta \cos\varphi + r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \sin\varphi - r \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta \cos\varphi - \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta \sin\varphi}{r^2 \cos\theta + r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{r^2 \sin\theta \sin\varphi - r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin\theta \cos\varphi - r \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta \sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta \cos\varphi}{r^2 \cos\theta + r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta}.$$

II. Läßt man wieder x, y, z die Koordinaten eines Punktes M im Raume in bezug auf ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem, $u = x_1, v = y_1, w = z_1$ aber die Koordinaten eines anderen Punktes M_1 in bezug auf *dasselbe* Koordinatensystem vorstellen, so bestimmen die Gleichungen (20) und ihre inversen, d. i.

$$(24) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x, y, z) \\ y_1 = \psi_1(x, y, z) \\ z_1 = \chi_1(x, y, z) \end{cases}$$

und

$$(24^*) \qquad \begin{cases} x = \varphi(x_1, y_1, z_1) \\ y = \psi(x_1, y_1, z_1) \\ z = \chi(x_1, y_1, z_1) \end{cases}$$

eine *Transformation des Raumes in sich;* insbesondere vermitteln die Gleichungen (24) den Übergang von dem Systeme S, welchem der Punkt M angehört, zu dem Systeme S_1, in welchem M_1 liegt; die Gleichungen (24*) den umgekehrten Prozeß. Sind $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ stetige Funktionen mit bestimmten Differentialquotienten und ebenso φ, ψ, χ, so ist die Transformation eine kontinuierliche.

Zu den wichtigsten ein-eindeutigen Punkttransformationen

des Raumes gehört die *projektive*, deren allgemeinste Gleichungen lauten:

$$(25) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ y_1 = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ z_1 = \dfrac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}. \end{cases}$$

Uber dieselbe sei mit dem Hinweise auf die Ausführungen in **64**, II nur bemerkt, daß sie jede Ebene wieder in eine Ebene und jede Fläche zweiter Ordnung wieder in eine Fläche zweiter Ordnung verwandelt.

Vierter Abschnitt.

Reihen.

§ 1. Reihen mit konstanten Gliedern.

69. Begriff der Konvergenz und Divergenz. Eine unbegrenzt fortsetzbare Folge reeller Zahlen sei gegeben:

(1) $$a_0, a_1, a_2, \ldots;$$

aus derselben läßt sich eine zweite, unbegrenzt fortsetzbare Zahlenfolge

(2) $$s_0, s_1, s_2, \ldots$$

bilden, indem man die ersten $1, 2, 3, \ldots n+1, \ldots$ Zahlen der Folge (1) durch Addition verbindet, so daß

(3) $$\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_1 = a_0 + a_1 \\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \end{cases}$$

Wenn nun die Zahlen der Folge (2) sich einer bestimmten, endlichen Grenze s nähern, wenn also

(4)*) $$\lim_{n=+\infty} s_n = s,$$

so nennt man die aus den Zahlen der Folge (1) gebildete *unendliche Reihe*

(5) $$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_0^{\infty} {}^i a_i$$

konvergent und s ihren *Grenzwert* (auch ihre *Summe*; vgl. hierzu

*) Es ist kaum nötig zu bemerken, daß bei diesem Grenzübergange n die Reihe der positiven ganzen oder der *natürlichen* Zahlen zu durchlaufen hat.

75). Die Zahlen der Folge (2), welche endliche Summen von Gliedern der Reihe (5) darstellen, bezeichnet man als *Partialsummen* dieser Reihe.

Zeigen die Partialsummen ein anderes Verhalten, als es hier beschrieben worden, so wird die unendliche Reihe *divergent* genannt. Welche Erscheinungen eine divergente Reihe aufweisen kann, werden die nachfolgenden Betrachtungen sogleich lehren.

Der direkte, allerdings nur selten betretbare Weg zur Untersuchung einer Reihe auf ihre *Konvergenz* oder *Divergenz* besteht in der Bildung der allgemeinen Partialsumme s_n und ihrer Prüfung für ein unbegrenzt wachsendes n. Zwei Beispiele werden dieses Verfahren erläutern und zugleich die verschiedenen Formen der Divergenz kennen lehren.

1) Es sei x eine reelle Zahl und $a_i = x^i$; die hieraus entspringende Reihe

$$\sum_0^\infty {}^i a_i = 1 + x + x^2 + \cdots \tag{6}$$

ist die unendliche *geometrische Progression*; ihre allgemeine Partialsumme

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

zeigt nun folgendes Verhalten: α) Für $|x| < 1$ konvergiert x^{n+1} mit beständig wachsendem n gegen Null, s_n gegen $\frac{1}{1-x}$, die Reihe (6) ist konvergent und hat den Grenzwert

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

β) Für $x > 1$ wächst x^{n+1} und auch s_n über jeden positiven Betrag hinaus, der Grenzwert von s_n ist $+\infty$ und die Reihe (6) divergent. γ) Ist $x < -1$, so wächst x^{n+1} und damit auch s_n dem Betrage nach über jede positive Zahl hinaus, wechselt aber beständig sein Vorzeichen, da der Exponent abwechselnd gerad, ungerad ist; die Reihe (6) ist divergent und man sagt, sie *schwanke zwischen* $-\infty$ *und* $+\infty$. δ) Für $x = 1$ verliert der Ausdruck für s_n seine Bestimmtheit; indessen läßt die Reihe selbst, welche nun lautet: $1 + 1 + 1 + \cdots$, ihre Divergenz unmittelbar erkennen, und zwar ist ihr Grenz-

wert $+\infty$. ε) Ähnlich muß für $x = -1$ auf die Reihe selbst, d. i. $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ gegriffen werden, deren Partialsummen die Zahlenfolge $1, 0, 1, 0, \ldots$ bilden; die Reihe (6) ist divergent und man sagt, sie *schwanke zwischen* 0 *und* 1.

Wie dieses Beispiel zeigt, tritt die Divergenz entweder dadurch zutage, daß die Partialsummen schließlich mit Beibehaltung eines bestimmten Vorzeichens dem Betrage nach größer werden und bleiben als jede positive Zahl — der Grenzwert der Reihe ist $+\infty$ oder $-\infty$ — oder daß sie bei numerischem Wachsen beständig ihr Vorzeichen wechseln — der Grenzwert ist unbestimmt unendlich — oder daß sie zwischen zwei endlichen Zahlen schwanken — der Grenzwert ist unbestimmt.

2) Aus der unbegrenzt fortsetzbaren Folge reeller Zahlen

$$\alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ldots$$

bilde man die neue Folge

$$a_0 = \alpha_0 - \alpha_1, \quad a_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad a_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \ldots;$$

dann gehört zu der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

die allgemeine Partialsumme

$$s_n = (\alpha_0 - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \cdots + (\alpha_n - \alpha_{n+1}) = \alpha_0 - \alpha_{n+1};$$

die Reihe ist demnach konvergent, wenn α_{n+1} mit wachsendem n gegen eine bestimmte Grenze konvergiert; ist α diese Grenze, so hat die Reihe den Grenzwert $s = \alpha_0 - \alpha$. In jedem anderen Falle ist sie divergent.

Ist beispielsweise

$$\alpha_i = \frac{1}{(p+i-1)(p+i)\cdots(p+q+i-1)},$$

also

$$a_i = \alpha_i - \alpha_{i+1} = \frac{1}{(p+i)\cdots(p+q+i-1)}\left(\frac{1}{p+i-1} - \frac{1}{p+q+i}\right)$$
$$= \frac{q+1}{(p+i-1)(p+i)\cdots(p+q+i)},$$

so ist $\lim\limits_{i=+\infty} \alpha_i = 0$, die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ also konvergent und $s = \alpha_0 = \frac{1}{(p-1)p\cdots(p+q-1)}$ ihr Grenzwert, so daß

$$\sum_0^\infty {}_i \frac{q+1}{(p+i-1)(p+i)\cdots(p+q+i)} =$$

$$\frac{q+1}{(p-1)p\cdots(p+q)} + \frac{q+1}{p(p+1)\cdots(p+q+1)} + \cdots$$

$$= \frac{1}{(p-1)p\cdots(p+q-1)};$$

ist also insbesondere $p = 2$, $q = 0$, so folgt

$$\sum_0^\infty {}_i \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = 1,$$

und für $p = 2$, $q = 1$ ergibt sich

$$\sum_0^\infty {}_i \frac{2}{(i+1)(i+2)(i+3)} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = \frac{1}{2}.$$

70. Allgemeine Konvergenzbedingung. Aus dem Begriffe des Grenzwertes (15) ergibt sich die notwendige Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Reihe. Soll nämlich die Reihe (5) konvergent sein und den Grenzwert s besitzen, so muß der Unterschied zwischen s und den aufeinanderfolgenden Partialsummen schließlich dem Betrage nach kleiner werden und *bleiben* als eine beliebig klein festgesetzte positive Zahl ε; mit anderen Worten, es muß sich zu dem gegebenen ε eine natürliche Zahl m derart bestimmen lassen, daß

$$|s_n - s| < \varepsilon$$

für alle $n \geqq m$. Infolgedessen wird es auch zu $\frac{\varepsilon}{2}$ eine natürliche Zahl m' geben derart, daß sowohl

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wie auch

$$|s_{n+p} - s| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wenn nur $n \geqq m'$, welche der Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ auch p sein möge; aus diesen beiden Beziehungen folgt die weitere

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon, \tag{7}$$

oder, da $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $s_{n+p} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{7*}$$

Soll eine Reihe konvergent sein, so muß sich ein Glied bestimmen lassen, von welchem an die Summe beliebig vieler aufeinanderfolgender Glieder dem absoluten Betrage nach kleiner ist als eine im voraus festgesetzte beliebig kleine positive Zahl.

Diese Bedingung ist zur Konvergenz auch hinreichend; denn ist sie für $n = m'$ erfüllt, so kann der absolute Betrag keiner Partialsumme $s_n (n > m')$ größer sein als $|s_{m'}| + \varepsilon$: die absoluten Beträge aller dieser Partialsummen sind also zwischen die Grenzen $|s_m'|$ und $|s_m'| + \varepsilon$ eingeschlossen, die sich durch Wahl des ε beliebig eng ziehen lassen.

Aus der für eine konvergente Reihe charakteristischen Eigenschaft lassen sich wichtige Folgerungen ziehen.

1) Für $p = 1$ lautet (7*)

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \tag{8}$$

und dies ist gleichbedeutend mit dem Ansatze $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = 0$. *Soll also eine Reihe konvergent sein, so muß ihr allgemeines Glied a_n mit beständig wachsendem n der Null als Grenze sich nähern oder unendlich klein werden.* Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend, wie man anfänglich, ja bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts, geglaubt hat, weil es auch divergente Reihen gibt, welche sie erfüllen, wie alsbald gezeigt werden wird.

Man kann diesen Ergebnissen eine kurze Fassung geben in dem Falle, wo die Glieder der Reihe *rationale* Zahlen sind, nämlich: Die Glieder einer unendlichen Reihe müssen, soll sie konvergent sein, eine Elementarreihe und ihre Partialsummen eine *Fundamentalreihe* bilden; die durch diese Fundamentalreihe definierte Zahl ist der Grenzwert der unendlichen Reihe (4).

2) Zerlegt man die unendliche Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ in die *endliche* Summe

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

und in die unendliche Reihe

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots, \tag{9}$$

so ist diese mit der ursprünglichen zugleich konvergent; denn ihre aufeinanderfolgenden Partialsummen $s_1', s_2', \ldots$ unterscheiden

sich von den Partialsummen $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ der ursprünglichen Reihe um den festen Betrag s_n, indem

$$s_{n+1} = s_n + s_1', \quad s_{n+2} = s_n + s_2', \ldots;$$

nähern sich daher die Zahlen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ einer Grenze s, so nähern sich die Zahlen $s_1', s_2', s_3', \ldots$ der Grenze $s - s_n$. Zufolge des Satzes (7*) ist der absolute Betrag des Grenzwertes r_n von (9) kleiner als ε, sobald $n \geqq m'$. Man nennt r_n den *Rest* der bei dem $n + 1$ten Gliede a_n abgebrochenen Reihe (5). Es läßt sich also, wenn die Reihe konvergent ist, zu einem beliebig klein festgesetzten ε eine natürliche Zahl m' derart bestimmen, daß

$$|r_n| < \varepsilon,$$

wenn $n \geqq m'$ ist. Dadurch, daß man statt des Grenzwertes s die Partialsumme $s_{m'}$ oder eine höhere nimmt, wird ein Fehler begangen, dessen Betrag kleiner als ε ist.

Auf dieser Eigenschaft beruht die Anwendung der konvergenten Reihen in der Analysis zur Darstellung von Zahlen; ferner ist es vermöge derselben bei der Untersuchung einer Reihe auf Konvergenz gestattet, beliebig viele Anfangsglieder außer acht zu lassen, was mitunter vorteilhaft sein kann.

3) Besteht die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ aus lauter positiven Gliedern und ist sie konvergent, so ist auch jede Reihe, welche aus ihr durch Unterdrückung einer endlichen oder unendlichen Anzahl*) von Gliedern oder durch beliebige Zeichenänderung an den Gliedern entsteht, konvergent. Denn die Relation (7*), wenn sie für die ursprüngliche Reihe bestanden hat, kann durch einen solchen Vorgang nicht aufgehoben werden, sie besteht vielmehr im allgemeinen für die abgeänderte Reihe nur noch in verstärktem Maße.

71. Allgemeine Sätze über Reihen. Aus dem Begriffe der Konvergenz und Divergenz lassen sich die folgenden Sätze erweisen:

1) Ist die Reihe $\sum_0^\infty a_i$ konvergent und s ihr Grenzwert,

*) Z. B. durch Weglassung aller Glieder mit geradem oder mit ungeradem Zeiger o. dgl.

so ist auch die mit Hilfe eines bestimmten von Null verschiedenen k gebildete Reihe $\sum_0^\infty {}^i k a_i$ konvergent und ks ihr Grenzwert.

Denn ist s_n die Partialsumme aus den $n+1$ Anfangsgliedern der ersten Reihe, so ist ks_n die entsprechende Partialsumme der zweiten, und konvergiert s_n für $\lim n = +\infty$ gegen s, so konvergiert ks_n gleichzeitig gegen ks.

War dagegen die erste Reihe divergent, so ist es die zweite auch.

Mil Hilfe dieses Satzes ergibt sich beispielsweise aus der letzten Gleichung in 69, daß

$$\sum_0^\infty {}^i \frac{1}{(i+1)(i+2)(i+3)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = \frac{1}{4}.$$

2) Sind die Reihen $\sum_0^\infty {}^i a_i$ und $\sum_0^\infty {}^i b_i$ konvergent und s, t ihre Grenzwerte, so sind auch die Reihen

$$\sum_0^\infty {}^i (a_i + b_i), \quad \sum_0^\infty {}^i (a_i - b_i)$$

konvergent und $s+t$, $s-t$ beziehungsweise ihre Grenzwerte.

Bezeichnet man nämlich die Partialsummen aus den $n+1$ ersten Gliedern der vier Reihen folgeweise mit s_n, t_n, σ_n, τ_n, so ist

$$\sigma_n = s_n + t_n, \quad \tau_n = s_n - t_n$$

und daraus ergibt sich, wenn man den Grenzübergang $\lim n = +\infty$ ausführt, die Richtigkeit der obigen Behauptungen.

Ist nur eine der beiden ersten Reihen divergent, so gilt das Nämliche für die beiden letzten Reihen.

Der Satz läßt sich auf eine beliebige, aber beschränkte Anzahl von Reihen ausdehnen.

72. Reihen mit positiven Gliedern. Wir wenden uns nun der speziellen Betrachtung von unendlichen *Reihen mit durchwegs positiven Gliedern* zu, einesteils, weil diese Reihen ausgezeichnete Eigenschaften besitzen, andernteils, weil die Be-

trachtung der anderen Reihen auf sie zurückleitet. Zunächst sollen Sätze allgemeiner Natur vorgeführt werden.

1) *Eine Reihe mit durchwegs positiven Gliedern ist entweder konvergent, oder divergent mit dem Grenzwert* $+\infty$.

Denn die Partialsummen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ einer solchen Reihe bilden eine steigende Folge von Zahlen, bei welcher nur zweierlei eintreten kann: entweder bleiben alle Glieder unter einer festen positiven Zahl und nähern sich dann notwendig mit beständig wachsendem Zeiger einer bestimmten Grenze, welche jener Zahl höchstens gleichkommt — die Reihe ist dann konvergent; oder sie werden schließlich größer als jede beliebige positive Zahl — die Reihe hat dann den Grenzwert $+\infty$.

Hieraus folgt, daß die Konvergenz einer Reihe mit positiven Gliedern erwiesen ist, sobald es gelingt zu zeigen, daß s_n für jedes n unter einer Zahl A verbleibt; unter dieser Zahl bleibt dann auch die Summe beliebig vieler aus der Reihe herausgegriffener Glieder.

2) *Ist eine Reihe mit durchwegs positiven Gliedern konvergent, so bleibt sie es auch, wenn man die Glieder anders anordnet, und behält denselben Grenzwert.*

Würde sich die Änderung der Anordnung blos auf einen endlichen Abschnitt der Reihe beziehen, so bedürfte der Satz keines Beweises. Die Änderung soll sich aber auf die Reihe in ihrem ganzen Verlaufe erstrecken, d. h. ist

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{10}$$

die ursprüngliche und

$$a_{\alpha_0} + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \cdots \tag{11}$$

die transformierte Reihe, so soll zwischen den Zeigern i und α_i eine ein-eindeutige Beziehung solcher Art bestehen, daß mit i zugleich auch α_i über jeden Betrag wächst; dann enthält die Reihe (11) alle Glieder von (10) und nur diese.

Bezeichnet s den Grenzwert von (10), so ist jede Partialsumme von (11) kleiner als s, weil sie aus Gliedern von (10) besteht; demnach ist (11) tatsächlich konvergent.

Es seien ferner

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$\sigma_\nu = a_{\alpha_0} + a_{\alpha_1} + \cdots + a_{\alpha_\nu}$$

zwei Partialsummen von (10) und (11) von solcher Art, daß in σ_ν die Glieder von s_n vorkommen; die darüber hinausgehenden Glieder von σ_ν stammen daher aus dem zu s_n gehörigen Reste r_n, demzufolge ist

$$\sigma_\nu - s_n < r_n;$$

mit wachsendem n nimmt auch ν beständig zu und sinkt r_n unter jeden noch so klein festgesetzten Betrag ε hinab; folglich ist

$$\lim \sigma_\nu = \lim s_n = s.$$

Daß eine divergente Reihe aus positiven Gliedern divergent bleibt, wenn man ihre Glieder anders anordnet, folgt daraus, daß

$$\sigma_\nu > s_n,$$

und daß s_n mit wachsendem n größer wird als jede beliebige positive Zahl.

3) *Wenn man in einer konvergenten Reihe aus positiven Gliedern die Glieder gruppenweise zusammenfaßt und aus den Summen dieser Gruppen eine neue Reihe bildet, so ist diese ebenfalls konvergent und hat denselben Grenzwert wie die ursprüngliche.*

Denn die Partialsummen der neuen Reihe kommen unter den Partialsummen der ursprünglichen Reihe vor und nähern sich daher der nämlichen Grenze wie diese. Diese Schlußweise zeigt übrigens, daß der Satz für *jede* konvergente Reihe gilt.

Daß aus einer divergenten Reihe mit positiven Gliedern durch den beschriebenen Vorgang wieder eine divergente Reihe entsteht, erkennt man auf die nämliche Art.

Umgekehrt bleibt eine konvergente Reihe aus positiven Gliedern auch dann konvergent, wenn man einzelne oder alle Glieder in Summen positiver Zahlen auflöst.

Die Eigenschaften 2) und 3) begründen eine vollständige Analogie zwischen unendlichen Reihen mit positiven Gliedern einerseits und endlichen Summen andererseits; sowie der Wert der letzteren unabhängig ist von der Anordnung und gruppen-

weisen Zusammenfassung der Summanden, ist dort der Grenzwert unabhängig von der Anordnung und gruppenweisen Zusammenfassung der Glieder; aus diesem Grunde bezeichnet man hier den Grenzwert auch als *Summe der unendlichen Reihe.*

73. Konvergenzkriterien der Reihen mit positiven Gliedern. Zur Entscheidung der Frage, ob eine vorgelegte Reihe aus positiven Gliedern — selbstverständlich eine solche, deren allgemeines Glied a_n mit wachsendem n der Grenze Null sich nähert — konvergent oder divergent sei, gibt es ein für alle Fälle anwendbares Verfahren nicht. Die Hilfsmittel, deren man sich dabei bedient, stützen sich zumeist auf die Vergleichung mit einer Reihe von bereits bekanntem Verhalten, und als solche dient insbesondere die unendliche geometrische Reihe. Einige der hierher gehörigen Sätze sind nachstehend entwickelt.

1) *Ist die Reihe* $\sum_0^\infty{}^i a_i$ *aus positiven Gründen konvergent, s ihre Summe, und die Reihe* $\sum_0^\infty{}^i b_i$, *ebenfalls aus positiven Gliedern, so beschaffen, daß wenigstens von einem Werte $n+1$ des Zeigers angefangen beständig $b_i < a_i$ ist, so ist auch* $\sum_0^\infty{}^i b_i$ *konvergent.*

Denn die Partialsummen der Reihe

$$b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + \cdots$$

sind dann kleiner als die gleichstelligen Partialsummen der Reihe

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots,$$

diese aber wieder sämtlich kleiner als $s - s_n$; infolgedessen ist die erstangeschriebene Reihe konvergent (72, 1)), ihre Summe kleiner als $s - s_n$, daher auch $\sum_0^\infty{}^i b_i$ konvergent und ihre Summe kleiner als $\sum_0^n{}^i b_i + s - s_n$.

Daraus ergibt sich als Folgerung: Ist $\sum_0^\infty{}^i a_i$ divergent

und von einem Werte $n+1$ des Zeigers angefangen beständig $b_i > a_i$, so ist auch die Reihe $\sum\limits_0^\infty b_i$ divergent. Denn wäre $\sum\limits_0^\infty b_i$ konvergent, so müßte es nach dem obigen Satze auch $\sum\limits_0^\infty a_i$ sein, gegen die Voraussetzung.

Von dieser Folgerung kann Gebrauch gemacht werden bei Beurteilung der Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots, \tag{12}$$

welche unter dem Namen der *harmonischen Reihe* als Vergleichsreihe häufige Anwendung findet. Faßt man die Glieder gruppenweise wie folgt zusammen (**72**, 3)):

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots,$$

so sind die Glieder dieser neuen Reihe vom dritten angefangen größer als die gleichgestellten Glieder der Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\cdots$$

oder

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots,$$

welche divergent ist; folglich ist auch die Reihe (12) divergent.

2) *Wenn in der Reihe $\sum\limits_0^\infty a_i$ aus positiven Gliedern der Quotient $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ von einem Zeiger n an kleiner bleibt als ein echter Bruch, so ist die Reihe konvergent; bleibt dagegen von $i=n$ angefangen $\frac{a_{i+1}}{a_i} \geqq 1$, so ist die Reihe divergent.*

Denn ist $k<1$ und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < k$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{a_{n+p}}{a_{n+p-1}} < k,$$

so ergibt sich durch Multiplikation

$$a_{n+p} < a_n k^p;$$

von dem Werte $n+1$ des Zeigers angefangen sind also die Glieder der vorgelegten Reihe kleiner als die korrespondierenden Glieder einer geometrischen Reihe mit echtgebrochenem Quotienten, die konvergent ist (69, 1)); nach dem vorangehenden Satze ist es also auch die Reihe $\sum\limits_0^\infty a_i$.

Aus dem obigen Ansatze folgt, daß

$$r_n < a_n k(1 + k + k^2 + \cdots) = \frac{a_n k}{1-k},$$

daß also der Rest der Reihe, wenn man sie bei dem Gliede a_n abbricht, kleiner ist als $\frac{a_n k}{1-k}$.

Der Beweis des zweiten Teiles ist einfach zu führen; aus den Relationen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geqq 1, \quad \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} \geqq 1, \ldots$$

schließt man auf

$$a_n \leqq a_{n+1} \leqq a_{n+2} \leqq a_{n+3} \leqq \cdots,$$

folglich nehmen die Glieder von a_n an nicht mehr ab und kann daher $\lim a_i$ für $i = +\infty$ nicht Null sein (70, 1)).

Es mag bemerkt werden, daß die Beziehung $\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1$ für für $i \geqq n$ zur Konvergenz nicht ausreicht, wie das Beispiel der harmonischen Reihe erweist, wo $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{i}{i+1}$ tatsächlich beständig < 1 ist, während die Reihe doch divergiert.

Aus dem obigen Satze fließt der nachstehende als Folgerung: *Ist* $\lim\limits_{n=+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, *so ist* $\sum a_i$ *konvergent, wenn* $\lambda < 1$, *und divergent, wenn* $\lambda > 1$; *im Falle, daß* $\lambda = 1$, *kann keine Entscheidung getroffen werden.*

Denn ist $\lambda < 1$ und schaltet man zwischen λ und 1 den echten Bruch k ein, so läßt sich notwendig ein Wert n des Zeigers bestimmen, von welchem an fortab $\frac{a_{i+1}}{a_i} < k$. Und ist

$\lambda > 1$, so muß notwendig ein n sich angeben lassen derart, daß $\frac{a_{i+1}}{a_i} \overline{\gtrless} 1$ ist für $i \overline{\gtrless} n$.

Das vorstehende Kriterium, von Cauchy, dem Begründer der allgemeinen Reihentheorie, stammend, kommt bei Beurteilung von Reihen am häufigsten zur Anwendung.

In der Reihe

$$1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

wo $a > 0$, ist

$$a_n = \frac{a^n}{1 \cdot 2 \cdots n}, \quad a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1}$$

daher $\lim\limits_{n=+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, wie groß auch die Zahl a sein mag; die angeschriebene Reihe ist also immer konvergent, auch wenn a negativ ist (70, 3)).

Dagegen ist in der Reihe

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots,$$

wo wieder $a > 0$, wenn man die Bezeichnung der Glieder mit a_1 beginnt,

$$a_n = \frac{a^n}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{n+1}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} a$$

und $\lim\limits_{n=+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$; die Reihe ist somit nur dann konvergent, wenn a ein positiver echter Bruch ist; sie ist es aber auch, wenn a ein negativer echter Bruch ist (70, 3)). Für $a = 1$, wo das Kriterium unwirksam würde, ist die Reihe als divergent bereits bekannt.

Bezüglich der Reihe

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots \quad (p > 0)$$

trifft das Kriterium keine Entscheidung; denn beginnt man mit a_1, so ist

$$a_n = \frac{1}{n^p}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p$$

und somit $\lim\limits_{n=+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

3) *Ist in einer Reihe* $\sum_0^\infty{}_i a_i$ *mit positiven Gliedern* $\lim_{i=+\infty} i a_i$ *nicht Null, wird also* a_i *im Vergleiche zu* $\frac{1}{i}$ *bei beständig wachsendem* i *unendlich klein von der ersten oder einer niedrigeren Ordnung, so ist die Reihe divergent.**)

Welches auch der genannte Grenzwert ist, immer läßt sich eine positive unter ihm liegende Zahl α angeben derart, daß von einem Werte n des Zeigers angefangen das Produkt $i a_i$ größer bleibt als α, so daß

$$n a_n > \alpha$$
$$(n+1) a_{n+1} > \alpha,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

woraus

$$a_n + a_{n+1} + \cdots > \alpha \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots \right);$$

der Rest r_n der vorgelegten Reihe ist also größer als der mit α multiplizierte Rest der harmonischen Reihe, die als divergent erkannt worden ist; folglich ist auch Σa_i divergent.

Daraus ergibt sich beispielsweise die Divergenz der Reihe

$$\sum_0^\infty{}_i \frac{a}{a i + b}$$

weil $\frac{a}{a i + b}$ in bezug auf $\frac{1}{i}$ unendlich klein wird von der ersten Ordnung; ebenso folgt daraus die Divergenz der Reihe

$$\sum_0^\infty{}_i \frac{1}{i^p}$$

für $p < 1$, weil dann $\frac{1}{i^p}$ in bezug auf $\frac{1}{i}$ unendlich klein von niedrigerer als der ersten Ordnung ist; hiernach ist z. B. die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots,$$

darin sämtliche Wurzeln mit demselben Zeichen genommen, divergent.

*) Im Gegensatze zu dem vorigen operiert dieses Kriterium und das folgende nur mit einem Gliede; man unterscheidet hiernach Konvergenzkriterien erster und zweiter Art, je nachdem a_n oder $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ in Betracht gezogen wird.

4) *Wenn in einer Reihe* $\sum_0^\infty a_i$ *aus positiven Gliedern* $\lim_{i=\infty} i^{1+p} a_i$ *bei* $p > 0$ *nicht unendlich ist, wenn also* a_i *in bezug auf* $\frac{1}{i}$ *bei beständig wachsendem* i *unendlich klein von höherer als der ersten Ordnung wird, so ist die Reihe konvergent.*

Welches auch der genannte Grenzwert ist, so läßt sich zu einer über ihm liegenden Zahl β ein Zeigerwert n bestimmen, von welchem angefangen das Produkt $i^{1+p} a_i$ beständig kleiner bleibt als β, so daß

$$n^{1+p} a_n < \beta$$
$$(n+1)^{1+p} a_{n+1} < \beta$$
$$\cdots\cdots$$

woraus

$$(13) \qquad \begin{cases} a_n < \dfrac{\beta}{n^{1+p}} \\ a_{n+1} < \dfrac{\beta}{(n+1)^{1+p}} \cdot \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

Die mit Ausschluß von $x = 0$ durchwegs stetige Funktion $f(x) = -\frac{1}{p x^p}$ besitzt an jeder Stelle einen Differentialquotienten $f'(x) = \frac{1}{x^{1+p}}$, infolgedessen kann auf sie der Mittelwertsatz (**38**, 2)) angewendet werden und gibt:

$$\frac{1}{p x^p} - \frac{1}{p(x+h)^p} = \frac{h}{(x+\theta h)^{1+p}}; \quad (0 < \theta < 1);$$

setzt man hierin $x = n$, $h = 1$ und beachtet, daß die rechte Seite für $\theta = 1$ ihren kleinsten Wert erreicht, so folgt

$$\frac{1}{(n+1)^{1+p}} < \frac{1}{p n^p} - \frac{1}{p(n+1)^p}$$

und nach Multiplikation mit β unter Rücksichtnahme auf (13):

$$a_{n+1} < \beta \left(\frac{1}{p n^p} - \frac{1}{p(n+1)^p}\right)$$
$$a_{n+2} < \beta \left(\frac{1}{p(n+1)^p} - \frac{1}{p(n+2)^p}\right)$$
$$a_{n+3} < \beta \left(\frac{1}{p(n+2)^p} - \frac{1}{p(n+3)^p}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Bildet man die Summe dieser Ungleichheiten, so entsteht rechts eine Reihe von dem Baue der Reihe in 69, 2); dieselbe ist konvergent, weil

$$\lim_{r=+\infty} \frac{1}{p(n+r)^p} = 0,$$

und ihr Grenzwert ist $\frac{1}{p\,n^p}$; mithin ist

$$r_n < \frac{\beta}{p\,n^p}$$

und $\sum_0^n a_i = \sum_0^i a_i + r_n < \sum_0^n a_i + \frac{\beta}{p\,n^p}$, womit die Reihe als konvergent erwiesen ist (72, 1)).

Diesem Satze zufolge ist jede Reihe von der Form:

$$\sum_1^\infty{}^i \frac{1}{i^\nu} = \frac{1}{1^\nu} + \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{3^\nu} + \cdots,$$

(mit Beziehung auf den Spezialfall $\nu = 1$ auch *hyperharmonische* Reihe genannt), konvergent, wenn $\nu > 1$; Beispiele solcher Art sind

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1^3}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \cdots.$$

74. Reihen mit positiven und negativen Gliedern. Indem wir uns nun der Betrachtung solcher Reihen zuwenden, welche *positive und negative Glieder in unbegrenzter Anzahl* enthalten, knüpfen wir zunächst an die 70, 3) aufgestellte Folgerung an, daß eine konvergente Reihe aus durchwegs positiven Gliedern konvergent bleibt, wenn man die Vorzeichen der Glieder beliebig verändert. Daraus folgt durch Umkehrung die Tatsache, daß eine Reihe mit beliebig bezeichneten Gliedern sicher konvergent ist, wenn diese Eigenschaft der aus den Absolutwerten ihrer Glieder gebildeten Reihe zukommt. Von einer solchen Reihe sagt man, sie sei *absolut* (unbedingt) *konvergent.* Die wesentlichen Eigenschaften solcher Reihen drückt der folgende Satz aus:

Der Grenzwert einer absolut konvergenten Reihe aus positiven und negativen Gliedern in unbeschränkter Anzahl ist gleich der Summe der Reihe, die aus den positiven Gliedern gebildet wird, vermindert um die Summe der Reihe, welche aus den Absolutwerten der negativen Glieder sich zusammensetzt. Er ist unabhängig von der Anordnung der Glieder.

Sei

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{14}$$

die gegebene Reihe, s ihr Grenzwert, s_n ihre allgemeine Partialsumme; ferner

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots \tag{15}$$

die als konvergent vorausgesetzte Reihe aus den absoluten Werten der Glieder von (14), σ ihr Grenzwert, σ_n ihre allgemeine Partialsumme; ferner seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Indizes der positiven Glieder in der Ordnung, in welcher sie in (14) auftreten, und ebenso $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ die Zeiger der negativen Glieder; dann sind die Reihen

$$a_{\alpha_0} + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \cdots \tag{16}$$

$$|a_{\beta_0}| + |a_{\beta_1}| + |a_{\beta_2}| + \cdots \tag{17}$$

beide notwendig konvergent; denn jede geht aus der konvergenten Reihe (15) durch Unterdrückung eines Teiles der Glieder hervor (**70**, 3)).

Die Partialsumme s_n von (14) umfasse positive Glieder bis zum Zeiger α_μ, negative Glieder bis zum Zeiger β_ν; werden die bis zu diesen Gliedern reichenden Partialsummen von (16) und (17) mit t_{α_μ}, beziehungsweise u_{β_ν} bezeichnet, so ist

$$s_n = t_{\alpha_\mu} - u_{\beta_\nu}; \tag{18}$$

wächst nun n unaufhörlich, so nehmen auch die Gliederzahlen der rechtsstehenden Partialsummen beständig zu und überschreiten nach und nach jede natürliche Zahl; demnach nähern sich für $\lim n = +\infty$ t_{α_μ}, u_{β_ν} den Summen t, u der Reihen (16), (17), so daß

$$s = t - u. \tag{19}$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung erwiesen. Der zweite Teil ergibt sich daraus, daß t, u ungeändert bleiben, wenn man

die Glieder in (16) und (17) anders anordnet (72, 2)); demzufolge hängt auch s nicht ab von der Anordnung der Glieder in der ursprünglichen Reihe (14).

Eine absolut konvergente Reihe weist also wie eine Reihe aus positiven Gliedern das Merkmal einer endlichen Summe auf, von der Anordnung der Glieder unabhängig zu sein; daher kann auch der Grenzwert einer solchen Reihe als *Summe* derselben bezeichnet werden.

75. Bedingt konvergente Reihen. Multiplikationstheorem. Eine Reihe aus positiven und negativen Gliedern kann aber auch konvergent sein, ohne daß es die Reihe aus den absoluten Werten ihrer Glieder ist; man nennt die Reihe dann *relativ* (bedingt) *konvergent.* Sie erfüllt die Bedingung 70, (7) und insbesondere ist auch $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = 0$, die aus den Absolutwerten der Glieder gebildete Reihe dagegen hat den Grenzwert $+\infty$.

Während also eine absolut konvergente Reihe schon *vermöge der Größe ihrer Glieder* konvergiert, tritt dies bei einer bedingt konvergenten *erst durch den Wechsel des Vorzeichens ein.* Von den bedingt konvergenten Reihen gilt nun der folgende Satz:

Der Grenzwert einer bedingt konvergenten Reihe ist abhängig von der Anordnung der Glieder; man kann ihn durch entsprechende Reihung der Glieder jeder beliebigen Zahl A gleichmachen.

Es sei wieder (14) die gegebene Reihe, welche als konvergent vorausgesetzt wird, während die aus ihr abgeleitete (15) jetzt divergent ist. Infolgedessen müssen auch beide Reihen (16) und (17) divergent sein; denn wäre es nur eine von beiden, so würde sich aus der immer noch zu Recht bestehenden Beziehung (18) für lim $n = +\infty$ entweder $s = +\infty$ oder $s = -\infty$ ergeben, je nachdem man (16) oder (17) divergent annähme; beides steht im Widerspruche mit der Voraussetzung.

Welches nun auch die Zahl A ist (die wir zunächst als positiv uns denken wollen), so läßt sich die Reihe (16) vermöge ihrer Divergenz vom Anfang aus in Gruppen G_0, G_1,

$G_2 \ldots$ und die Reihe (17) in Gruppen G_0', G_1', G_2', ...*) zerlegen derart, daß

$$G_0 > A,$$

während sich die Ungleichheit umkehrte oder in eine Gleichung verwandelte, wenn man das letzte Glied der Gruppe G_0 ausließe; daß ferner

$$G_0 - G_0' < A,$$

während sich die Ungleichheit bei Fortlassung des letzten Gliedes der Gruppe G_0' umkehrte oder in eine Gleichung verwandelte; daß weiters

$$G_0 - G_0' + G_1 > A$$

und

$$G_0 - G_0' + G_1 - G_1' < A$$

mit derselben Zusatzbemerkung usw. In dieser Anordnung bilden also die Glieder der Reihe (14) eine neue Reihe

$$G_0 - G_0' + G_1 - G_1' + G_2 - G_2' + \cdots \tag{20}$$

von solcher Art, daß eine mit G_n schließende Partialsumme Σ_n größer ist als A, jedoch so, daß

$$\Sigma_n - A \leqq a_\mu,$$

wenn a_μ das letzte Glied der Gruppe G_n, und daß eine bei $-G_n'$ schließende Partialsumme Σ_n' kleiner ist als A, jedoch so, daß

$$A - \Sigma_n' \leqq |a_{\mu'}|,\text{**)}$$

wenn $|a_{\mu'}|$ das letzte Glied der Gruppe G_n' ist.

Da nun mit n zugleich sowohl μ wie auch μ' beständig und über jeden Betrag hinaus wächst und da $\lim a_\mu$ sowohl wie $\lim |a_{\mu'}|$ Null ist, so zeigen die beiden letzten Ungleichungen, daß die Unterschiede $\Sigma_n - A$, $A - \Sigma_n'$ mit beständig wachsendem n schließlich unter jeden positiven Betrag herabsinken, so daß

$$\lim \Sigma_n = \lim \Sigma_n' = A,$$

---

*) Die Buchstaben sollen zugleich die *Summen* der betreffenden Gruppen, die unter Umständen auch eingliedrig sein können, bezeichnen.

**) Das Gleichheitszeichen käme in Kraft, wenn einmal nach Weglassung des letzten Gliedes die Partialsumme dem A gerade gleich würde.

d. h. in der durch (20) gekennzeichneten Anordnung ihrer Glieder hat die Reihe (14) den beliebig festgesetzten Grenzwert A.

Wäre A negativ, so hätte man mit einer negativ genommenen Gruppe aus (12) zu beginnen und zwischen beiden Reihen abzuwechseln.

Da der Grenzwert einer bedingt konvergenten Reihe erst durch eine bestimmte Anordnung der Glieder gegeben ist, so fehlt einer solchen Reihe der Charakter einer endlichen Summe; es empfiehlt sich daher nicht, jenen Grenzwert als Summe der Reihe zu bezeichnen.

Aus dem Zusammenhalt der beiden Sätze dieses und des vorigen Artikels geht hervor, daß eine Reihe aus positiven und negativen Gliedern in unbeschränkter Anzahl *nur dann* bei jeder Anordnung der Glieder konvergent ist und denselben Grenzwert besitzt, wenn sie *absolut konvergiert.*

Über die Addition und Subtraktion konvergenter Reihen wurde in **71**, 2) ein Satz aufgestellt, der für absolut konvergente Reihen eine Erweiterung dahin erfährt, daß die Glieder der beiden gegebenen Reihen in beliebiger Reihenfolge durch Addition bzw. Subtraktion zu einer Reihe verbunden werden dürfen, und daß diese immer gegen die Summe, bzw. die Differenz der Grenzwerte der gegebenen Reihen konvergiert.

Für absolut konvergente Reihen gilt aber auch ein Multiplikationstheorem, das folgendermaßen lautet: *Sind die Reihen* $\sum_0^\infty a_n$ *und* $\sum_0^\infty b_n$ *absolut konvergent und* s, t *ihre Grenzwerte, so ist auch die Reihe* $\sum_0^\infty c_n$ *mit dem allgemeinen Gliede*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0 \tag{21}$$

konvergent und st *ihr Grenzwert.*

Bildet man nämlich das Produkt

$$s_n t_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n)$$

aus den Partialsummen der $n+1$ ersten Glieder der beiden gegebenen Reihen und vergleicht dasselbe mit der Partialsumme

$$u_{2n} = c_0 + c_1 + \cdots + c_{2n}$$

der $2n+1$ ersten Glieder der neuen Reihe $\sum\limits_0^\infty c_n$, so zeigt sich folgendes: Alle Bestandteile des erstgedachten Produktes kommen in u_{2n} vor; es enthält aber u_{2n} überdies alle jene Produkte von der Form $a_\mu b_\nu$, in welchen einer der beiden Zeiger μ, ν die Zahl n überschreitet, die Summe $\mu+\nu$ beider Zeiger aber nicht über $2n$ hinausgeht; diese überschüssigen Glieder von u_{2n} gestatten folgende Anordnung:

$$\begin{array}{l} a_{n+1}(b_0+b_1+\cdots+b_{n-1})+b_{n+1}(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}) \\ +\,a_{n+2}(b_0+b_1+\cdots+b_{n-2})+b_{n+2}(a_0+a_1+\cdots+a_{n-2}) \\ +\,a_{n+3}(b_0+b_1+\cdots+b_{n-3})+b_{n+3}(a_0+a_1+\cdots+a_{n-3}) \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad +\,a_{2n}b_0 \qquad\qquad +\,b_{2n}a_0 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l} a_{n+1}t_{n-1}+a_{n+2}t_{n-2}+\cdots+a_{2n}t_0 \\ +\,b_{n+1}s_{n-1}+b_{n+2}s_{n-2}+\cdots+b_{2n}s_0. \end{array}$$

Mithin ist

$$\begin{array}{l} |u_{2n}-s_nt_n| \leq |a_{n+1}||t_{n-1}|+|a_{n+2}||t_{n-2}|+\cdots+|a_{2n}||t_0| \\ \qquad +\,|b_{n+1}||s_{n-1}|+|b_{n+2}||s_{n-2}|+\cdots+|b_{2n}||s_0|; \end{array}$$

weiters gilt für jedes $m \leqq n-1$

$$\begin{array}{l} |s_m| < |a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}| \\ |t_m| < |b_0|+|b_1|+\cdots+|b_{n-1}|; \end{array}$$

wobei das Ungleichheitszeichen nur im Falle $m=n-1$ in ein Gleichheitszeichen übergehen kann; daher ist in verstärktem Maße

$$\begin{array}{l} |u_{2n}-s_nt_n| < (|b_0|+|b_1|+\cdots+|b_{n-1}|)(|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_{2n}|) \\ \qquad +(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|)(|b_{n+1}|+|b_{n+2}|+\cdots+|b_{2n}|); \end{array}$$

die ersten Faktoren der beiden rechtsstehenden Produkte konvergieren wegen der vorausgesetzten Konvergenz von $\sum\limits_0^\infty |a_n|$ und $\sum\limits_0^\infty |b_n|$ mit wachsendem n gegen bestimmte endliche Grenzen, die zweiten Faktoren sinken schließlich aus dem nämlichen Grunde unter jeden noch so kleinen positiven Betrag herab (70); daraus folgt, daß der ganze rechtsstehende Ausdruck

mit wachsendem n schließlich kleiner wird als jede noch so kleine positive Zahl; deshalb ist

$$\lim |u_{2n} - s_n t_n| = 0,$$

also

$$\lim_{n=+\infty} u_{2n} = st.$$

Damit ist aber die Konvergenz der Reihe $\sum_0^\infty e_n$ und st als ihr Grenzwert erwiesen.

76. Alternierende Reihen. Unter den Reihen mit positiven und negativen Gliedern sind die *alternierenden Reihen*, bei welchen positive und negative Glieder miteinander abwechseln, besonders bemerkenswert. Für solche Reihen gibt es ein in vielen Fällen brauchbares Konvergenzmerkmal, das in dem folgenden Satze enthalten ist.

Wenn in einer alternierenden Reihe die absoluten Beträge der Glieder beständig abnehmen und schließlich gegen die Grenze Null konvergieren, so ist die Reihe konvergent.

Es sei für jedes i $a_i > 0$ und

$$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots \tag{22}$$

die gegebene Reihe; ferner $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ und $\lim_{n=+\infty} a_n = 0$.

Aus der Darstellung

$$s_{2p-1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2p-2} - a_{2p-1})$$

folgt, daß s_{2p-1} als Summe positiver Zahlen mit p wächst, daß also die Partialsummen

$$s_1, \; s_3, \; s_5 \ldots \tag{23}$$

eine steigende Zahlenreihe bilden.

Aus den beiden Darstellungen

$$\begin{aligned} s_{2p} &= a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \cdots - (a_{2p-1} - a_{2p}) \\ &= (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2p-2} - a_{2p-1}) + a_{2p} \end{aligned}$$

folgt, und zwar aus der ersten, daß s_{2p} mit p beständig abnimmt, aus der zweiten, daß es immer positiv ist, daß also die Partialsummen

$$s_0, \; s_2, \; s_4, \ldots \tag{24}$$

sämtlich positiv sind und eine fallende Zahlenreihe bilden;

diese muß daher notwendig einen Grenzwert besitzen, der s'' heißen möge.

Da aber
$$s_{2p} = s_{2p-1} + a_{2p},$$
so ist
$$s_{2p-1} = s_{2p} - a_{2p} < s_{2p} < s_0 = a_0,$$
es bleiben also die Zahlen der steigenden Zahlenfolge (23) unter einer festen Zahl, somit besitzt auch sie einen Grenzwert, er heiße s'.

Weil jedoch
$$s_{2p} - s_{2p-1} = a_{2p},$$
so ist für $\lim p = \infty$
$$\lim (s_{2p} - s_{2p-1}) = \lim a_{2p} = 0,$$
also $s'' = s'$, d. h. die beiden Zahlenfolgen (23) und (24) konvergieren gegen denselben Grenzwert s, die erste wachsend, die zweite abnehmend, so daß
$$s_{2p-1} < s < s_{2p}.$$
Aus $r_n = (-1)^{n+1}\{a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots\}$ folgt, daß $|r_n| < |a_{n+1}|$ und daß r_n das Vorzeichen von a_{n+1} hat. Bricht man also bei einem Gliede ab, so ist der zugehörige Rest vom Vorzeichen des nächsten Gliedes und numerisch kleiner als dieses.

77. Beispiele. 1) Die Bedingungen des obigen Satzes erfüllt die Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots. \tag{25}$$

sie ist daher konvergent, jedoch nicht absolut konvergent, weil die aus den absoluten Werten der Glieder gebildete Reihe, die harmonische, divergent ist (73, 1)). Bei *dieser* Anordnung der Glieder hat die Reihe einen Grenzwert, welcher liegt zwischen 1 und $\frac{1}{2}$, ebenso zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{6}$, zwischen $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{12}$ usw., Grenzen, welche immer näher zusammenrücken.

Bei *anderer* Anordnung der Glieder, z. B. bei der Anordnung

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots, \tag{26}$$

bleibt sie zwar konvergent, hat aber einen anderen Grenzwert, wie man sogleich erkennt, wenn man die positiven Gliederpaare zusammenzieht (**72**, 3)); ihr Grenzwert liegt dann zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{6}$, also über $\frac{5}{6}$, während er bei der früheren unter $\frac{5}{6}$ war. Man kann übrigens die Beziehung der beiden Grenzwerte genau feststellen; bezeichnet man den von (25) mit s, so ist (**72**, 3))

$$s = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots,$$

ferner auch (**71**, 1))

$$\frac{s}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \qquad + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) \qquad + \cdots;$$

addiert man beide Gleichungen, so ergibt sich (**71**, 2)):

$$\frac{3}{2} s = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

und rechts steht nun die Reihe (26) bei erlaubter Zusammenfassung der Glieder in Gruppen; heißt also s' der Grenzwert dieser Reihe, so ist $s' = \frac{3}{2} s$.

2) Die Reihe

$$\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots \tag{27}$$

erfüllt die Bedingungen der Konvergenz für jedes $p > 0$; absolut konvergent ist sie aber nur, wenn $p > 1$, dagegen nur bedingt konvergent, wenn $p < 1$ (**73**, 3), 4)). Wir behalten den letzteren Fall im Auge und ordnen die Glieder wie folgt um:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots. \tag{28}$$

In der Reihe (27) ist die Partialsumme der $2n$ ersten Glieder

$$s_{2n} = \sum_0^{n-1} {}_i \frac{1}{(2i+1)^p} - \sum_1^n {}_i \frac{1}{(2i)^p},$$

in der Reihe (28) die Partialsumme aus den $3n$ ersten Gliedern

$$s'_{3n} = \sum_0^{2n-1} {}_i \frac{1}{(2i+1)^p} - \sum_1^n {}_i \frac{1}{(2i)^p},$$

infolgedessen

$$s'_{3n} - s_{2n} = \sum_{n}^{2n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} = \frac{1}{(2n+1)^p} + \frac{1}{(2n+3)^p} + \cdots + \frac{1}{(4n-1)^p};$$

ersetzt man in der rechtsstehenden Summe sämtliche Glieder, n an der Zahl, durch $\frac{1}{(4n)^p}$, so wird sie verkleinert, daher ist

$$s'_{3n} - s_{2n} > \frac{n}{(4n)^p} = \frac{n^{1-p}}{4^p}.$$

Mit beständig wachsendem n wird die rechte Seite wegen $1 - p > 0$ schließlich größer als jeder positive Betrag, s_{2n} konvergiert gegen den Grenzwert von (27), mithin ist

$$\lim_{n=+\infty} s'_{3n} = +\infty$$

und gleiches gilt für s'_{3n+1} und s'_{3n+2}, weil $s'_{3n} < s'_{3n+1} < s'_{3n+2}$. Die Reihe (27) hat also durch die Umstellung (28) ihre Konvergenz verloren und den Grenzwert $+\infty$ erlangt. Man überzeugt sich durch ganz analoge Schlüsse, daß sie bei der Anordnung

$$-\frac{1}{2^p} - \frac{1}{4^p} + \frac{1}{1^p} - \frac{1}{6^p} - \frac{1}{8^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

den Grenzwert $-\infty$ hat.

78. Unendliche Produkte. Die Untersuchung *unendlicher Produkte* führt auf die Betrachtung unendlicher Reihen zurück.

Ist

$$a_0, a_1, a_2 \ldots \tag{29}$$

eine unbegrenzt fortsetzbare Folge reeller Zahlen, deren keine Null ist, und bildet man aus ihr die neue Folge

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, \tag{30}$$

indem man

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_0 a_1, \quad p_2 = a_0 a_1 a_2, \ldots$$

nimmt, so ist auch kein Glied dieser neuen Folge gleich Null; man sagt dann, das *unendliche Produkt*

$$a_0 a_1 a_2 \cdots = \prod_{0}^{\infty} {}^{i}\, a_i \tag{31}$$

sei *konvergent*, wenn p_n mit beständig wachsendem n einer bestimmten *von Null verschiedenen Grenze* sich nähert; diese Grenze

$$\lim_{n=+\infty} p_n = p$$

nennt man den *Grenzwert des unendlichen Produktes.* In jedem anderen Falle heißt das Produkt (31) divergent*). Die Produkte (30) von [1], 2, 3, ... Faktoren belegt man mit dem Namen Partialprodukte.

Da das Vorzeichen des Produktes aus der (endlich vorausgesetzten) Anzahl der negativen Faktoren im voraus bestimmt werden kann, so darf man sich bloß mit dem absoluten Werte des Produktes befassen und daher alle Faktoren (29) als positiv voraussetzen. Dann folgt aus

$$l\,p_n = l\,a_0 + l\,a_1 + \cdots + l\,a_n$$

sofort, daß die hinreichende und notwendige Bedingung zur Konvergenz des Produktes (31) in der Konvergenz der Reihe

$$l\,a_0 + l\,a_1 + l\,a_2 + \cdots$$

gelegen ist; denn ist diese Reihe konvergent und s ihr Grenzwert, so ist es auch das Produkt und e^s sein Grenzwert; ist die Reihe divergent, so ist es auch das Produkt.

Zur Konvergenz der letztangeschriebenen Reihe ist es aber notwendig, daß $\lim\limits_{n=+\infty} l\,a_n = 0$ sei; zur Konvergenz des Produktes (31) ist es also *notwendig, daß* $\lim\limits_{n=+\infty} a_n = 1$ *sei.*

Aus diesem Grunde werden die Faktoren des Produktes in der Form

$$a_i = 1 + \alpha_i$$

dargestellt, und es ist dann

$$\lim_{n=+\infty} \alpha_n = 0 \tag{32}$$

eine zur Konvergenz notwendige Bedingung. Im übrigen können die Zahlen α_i entweder durchwegs positiv, oder durchwegs negativ oder teils positiv, teils negativ (beides in einer

*) Man zählt Produkte mit dem Grenzwert Null zu den divergenten, weil ihnen die singuläre Eigenschaft zukommt, den Wert Null zu haben, ohne daß einer der Faktoren Null ist.

unbeschränkten Anzahl von malen), die Faktoren des Produktes also sämtlich unechte, sämtlich echte oder teilweise unechte, teilweise echte Brüche sein. In dem Falle, wo die a_i durchgehends oder zum Teil negativ sind, darf man annehmen, daß sie dem Betrage nach unter der Einheit liegen. Denn vermöge (32) muß dies, wenn es nicht schon vom Anfang an der Fall ist, von einem Werte $n+1$ des Zeigers angefangen notwendig anhalten; dann denke man sich die Faktoren $a_0, a_1, \ldots, a_n$ abgeschieden und erstrecke die Untersuchung blos auf das unendliche Produkt $\prod\limits_{n+1}^{\infty} a_i$; ist dieses konvergent und p sein Grenzwert, so ist es auch das ursprüngliche mit dem Grenzwerte $p_n p$; ist es divergent, so gilt dies auch von $\prod\limits_{0}^{\infty} a_i$.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz eines unendlichen Produktes $\prod\limits_{0}^{\infty}(1+a_i)$ läßt sich dahin aussprechen, daß p_n sich der Null nicht beliebig nähern dürfe und daß zu einem beliebig klein festgesetzten η sich n derart bestimmen lasse, daß

$$|p_{n+r} - p_n| < \eta$$

sei *für jedes* r; mit Rücksicht auf die über p_n gemachte Voraussetzung kann man dafür auch schreiben:

$$\left|\frac{p_{n+r}}{p_n} - 1\right| < \frac{\eta}{p_n}$$

und die Bedingung nun dahin formulieren, es müsse sich zu beliebig klein festgesetztem ε ein n derart bestimmen lassen, daß für jedes r

$$\left|\prod_{n+1}^{n+r}(1+a_i) - 1\right| < \varepsilon \tag{33}$$

sei. $\prod\limits_{n+1}^{n+r}(1+a_i)$ heiße das zu p_n gehörige *Restprodukt.*

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wenden wir uns dazu, die folgenden Sätze über unendliche Produkte nachzuweisen.

1) *Ist* $\alpha_i > 0$ *für alle Zeigerwerte, so ist das Produkt* $\prod\limits_0^\infty (1 + \alpha_i)$ *konvergent, wenn die Reihe* $\sum\limits_0^\infty \alpha_i$ *konvergiert, und divergent mit dem Grenzwerte* $+\infty$, *wenn die Reihe divergent ist.*

Das Restprodukt in seiner Entwicklung

$$\begin{aligned}\prod_{n+1}^{n+r}(1 + \alpha_i) &= (1 + \alpha_{n+1})(1 + \alpha_{n+2}) \cdots (1 + \alpha_{n+r}) \\ &= 1 + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+r} + S,\end{aligned}$$

worin S die Summe der durchwegs positiven Produkte der α zu zweien, dreien, ... bedeutet, läßt unmittelbar erkennen, daß

$$(34) \qquad \prod_{n+1}^{n+r}(1 + \alpha_i) - 1 = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+r} + S$$

für den Fall der Divergenz von $\sum\limits_0^\infty \alpha_i$ über jede Grenze wächst, die Bedingung der Konvergenz von $\prod\limits_0^\infty (1 + \alpha_i)$ also nicht erfüllt ist. Da p_n in dem vorliegenden Falle mit n beständig wächst, so ist $\lim p_n = +\infty$.

Im Falle der Konvergenz von $\sum\limits_0^\infty \alpha_i$ kann n so gewählt werden, daß bei jedem r

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+r} < q < 1$$

sei; löst man S in die Summen $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_r$ der Produkte von je $2, 3, \ldots r$ Faktoren auf und beachtet, daß

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &< (\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+r})^2 < q^2 \\ \Sigma_3 &< (\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+r})^3 < q^3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma_r &< (\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+r})^r < q^r\end{aligned}$$

ist, so folgt, daß

$$\prod_{n+1}^{n+r}(1 + \alpha_i) - 1 < q + q^2 + \cdots + q^r = q\,\frac{1 - q^r}{1 - q} < \frac{q}{1 - q};$$

wählt man q derart, daß $\frac{q}{1-q} < \varepsilon$ wird, wozu nur $q < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$

genommen zu werden braucht, so ist die Bedingung (33) der Konvergenz erfüllt.

Aus

$$l\prod_0^\infty (1+\alpha_i) = \sum_0^\infty l\,(1+\alpha_i)$$

schließt man, weil die Reihe rechter Hand aus lauter positiven Gliedern besteht und der Grenzwert einer solchen von der Anordnung der Glieder unabhängig ist (72, 2)), daß der Grenzwert eines konvergenten Produktes von der hier betrachteten Art auch unabhängig ist von der Anordnung der Faktoren.

2) *Ist* $\alpha_i > 0$ *für alle Werte des Zeigers, so ist das Produkt* $\prod\limits_0^\infty (1-\alpha_i)$ *konvergent, wenn die Reihe* $\sum\limits_0^\infty \alpha_i$ *konvergent ist, und divergent mit dem Grenzwerte Null, wenn die Reihe divergent ist.*

Da $1-\alpha_i = \frac{1-\alpha_i^2}{1+\alpha_i} < \frac{1}{1+\alpha_i}$ ist, so folgert man, daß

$$\prod_0^n (1-\alpha_i) < \frac{1}{\prod\limits_0^n (1+\alpha_i)}\cdot$$

Ist nun $\sum\limits_0^\infty \alpha_i$ divergent, so ist nach dem vorigen Satze $\lim\limits_{n=\infty} \prod\limits_0^n (1+\alpha_i) = \infty$, daher

$$\prod_0^\infty (1-\alpha_i) = 0.$$

Aus der jetzt geltenden Entwicklung des Restproduktes:

$$\prod_{n+1}^{n+r} (1-\alpha_i) = 1 - (\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+r}) + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \cdots \\ + (-1)^r \Sigma_r$$

ergibt sich, wenn $\sum\limits_0^\infty \alpha_i$ konvergiert, mit den vorhin benutzten Bezeichnungen:

$$1 - \prod_{n+1}^{n+r}(1 - \alpha_i) < (\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+r}) + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \cdots + \Sigma_r < \frac{q}{1-q},$$

und wenn q so gewählt wird wie unter 1), so wird

$$1 - \prod_{n+1}^{n+r}(1 - \alpha_i) < \varepsilon,$$

womit die Konvergenzbedingung (33) erfüllt ist.

Die Unabhängigkeit des $\prod\limits_0^\infty (1 - \alpha_i)$ von der Anordnung der Faktoren ergibt sich durch einen ähnlichen Schluß wie vorhin.

3) *Sind die* α_i *verschieden bezeichnet und positive wie negative in unbegrenzter Anzahl vorhanden, so ist das Produkt* $\prod\limits_0^\infty (1 + \alpha_i)$ *konvergent und seinem Grenzwerte nach unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren, wenn die Reihe* $\sum\limits_0^\infty \alpha_i$ *absolut konvergent ist, d. h. wenn auch* $\sum\limits_0^\infty |\alpha_i|$ *konvergiert.*

Das Partialprodukt p_n von $\prod\limits_0^\infty (1 + \alpha_i)$ enthalte n' Faktoren mit positiven α_i — ihr Produkt heiße $\Pi'_{n'}$ — und n'' Faktoren mit negativen α_i — ihr Produkt heiße $\Pi''_{n''}$; dann ist $n' + n'' = n$ und

$$p_n = \Pi'_{n'}\, \Pi''_{n''};$$

mit n wachsen zugleich n', n'' über jede natürliche Zahl hinaus. Ist nun, wie vorausgesetzt wurde, $\sum\limits_0^\infty \alpha_i$ absolut konvergent, so konvergiert (74) die Reihe aus den positiven α_i und mit ihr dem Falle 1) zufolge auch das Produkt $\Pi'_{n'}$ nach einem von der Ordnung der Faktoren unabhängigen Grenzwerte Π'; es konvergiert aber auch die Reihe aus den negativen α_i und mit ihr dem Falle 2) zufolge das Produkt $\Pi''_{n''}$ nach einem von der

Ordnung der Faktoren unabhängigen Grenzwerte Π''. Demzufolge hat auch das Produkt $\prod\limits_0^\infty (1 + \alpha_i)$ bei jeder Anordnung seiner Faktoren einen und denselben Grenzwert

$$p = \Pi' \, \Pi''.$$

Den absolut konvergenten Produkten stehen bedingt konvergente gegenüber; es sind dies solche, deren zugehörige aus positiven und negativen Gliedern in unbegrenzter Anzahl zusammengesetzte Reihe $\sum\limits_0^\infty \alpha_i$ bedingt konvergent ist (74). Hier kann nur von einem Grenzwerte *bei bestimmter Anordnung der Faktoren* die Rede sein; doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden.

79. Beispiele. 1) Das Produkt

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \cdots$$

ist nur dann konvergent, wenn es die Reihe $x + x^2 + x^4 + \cdots$ ist, d. h. für $x^2 < 1$.*) Dies zeigt auch das Partialprodukt

$$p_n = (1 + x)(1 + x^2) \cdots (1 + x^{2^n})$$
$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^{n+1}-1} = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$$

an; denn für $\lim n = +\infty$ konvergiert dasselbe nur dann gegen eine bestimmte Grenze, wenn $|x| < 1$, und zwar gegen die Grenze

$$p = \frac{1}{1 - x}.$$

2) Die Produkte

$$\left(1 + \frac{k}{1}\right)\left(1 + \frac{k}{2}\right)\left(1 + \frac{k}{3}\right) \cdots$$
$$\left(1 - \frac{k}{1}\right)\left(1 - \frac{k}{2}\right)\left(1 - \frac{k}{3}\right) \cdots \qquad (k > 0)$$

sind divergent — wegen der Divergenz der Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots$, — und zwar divergiert das erste gegen $+\infty$, das zweite gegen Null.

---

*) Nach Weglassung des ersten Gliedes bleibt nämlich eine geometrische Reihe mit dem Quotienten x^2 übrig.

3) Das Produkt

$$\left(1+\frac{k}{1}\right)\left(1-\frac{k}{2}\right)\left(1+\frac{k}{3}\right)\left(1-\frac{k}{4}\right)\cdots$$

ist konvergent; es hat bei dieser Anordnung der Faktoren einen bestimmten Grenzwert, einen anderen aber, wenn man die Reihenfolge der Faktoren abändert.

4) Das Produkt

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots,$$

auf die normale Form gebracht, lautet:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots;$$

und nun erkennt man seine Konvergenz, weil die Reihe

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots$$

konvergent ist (**76**); aber auch hier ist die Konvergenz eine bedingte, weil die Reihe $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\cdots$ oder $\frac{1}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\cdots$ divergent ist*).

5) Um das Produkt

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a+1}{b+1}\cdot\frac{a+2}{b+2}\cdots,$$

in welchem a, b positive Zahlen bedeuten, zu beurteilen, bringe man es auf die Form

$$\left(1+\frac{a-b}{b}\right)\left(1+\frac{a-b}{b+1}\right)\left(1+\frac{a-b}{b+2}\right)\cdots;$$

nun erkennt man sogleich seine Divergenz aus der Divergenz der Reihe

*) Da $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdots$ divergent ist (**73**, 1) und **71**, 1)), so ist es auch

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$$

(**73**, 1)), umsomehr also

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\cdots.$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} + \cdots$$

(73, 3)); und zwar ist der Grenzwert des Produktes $+\infty$ für $a > b$ und 0 für $a < b$.

80. Reihen mit komplexen Gliedern. Die Untersuchung *unendlicher Reihen mit komplexen Gliedern* führt auf Reihen mit reellen Gliedern zurück. Man definiert eine Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots, \tag{35}$$

deren Glieder komplexe Zahlen sind, als konvergent, wenn es eine komplexe Zahl s gibt derart, daß die Partialsumme s_n aus den $n+1$ ersten Gliedern von (35) sich ihr bei unbegrenzt wachsendem n als Grenze nähert, so daß $\lim\limits_{n=+\infty} s_n = s$; die Zahl s bezeichnet man als Grenzwert der Reihe (35). Es läßt sich nun der folgende Satz erweisen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{0}^{\infty} a_\nu$ *besteht in der Konvergenz der Reihe aus den reellen Bestandteilen und der Reihe der Koeffizienten von i in den aufeinanderfolgenden Gliedern* $a_0, a_1, a_2 \ldots$

Ist nämlich $a_n = \alpha_n + \beta_n i$, $s = \sigma + \tau i$, sind ferner σ_n, τ_n die Partialsummen aus den $n+1$ ersten Gliedern der reellen Reihen

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots, \tag{36}$$

$$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots, \tag{36*}$$

so ist

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sigma_n + \tau_n i;$$

soll nun s der Grenzwert von s_n für $\lim n = +\infty$ sein, so muß sich zu einem positiven beliebig kleinen ε eine natürliche Zahl m derart bestimmen lassen, daß

$$|s_n - s| = |(\sigma_n - \sigma) + (\tau_n - \tau) i| < \varepsilon \tag{37}$$

ist für jedes $n \geqq m$, wobei der absolute Wert einer komplexen Größe im Sinne von 6, d. i. als *Modul* derselben zu verstehen ist; denn eine veränderliche komplexe Zahl kann nicht anders der Grenze Null sich nähern, als daß dies der reelle Teil und der Koeffizient der imaginären Einheit, jeder für sich, tut;

dann aber nähert sich auch der Modul der Grenze Null, da er die positive Quadratwurzel aus der Quadratsumme der beiden genannten Zahlen ist. Statt also zu verlangen, die komplexe Zahl $s_n - s$ selbst konvergiere gegen die Grenze Null, kann man diese Forderung in bezug auf ihren absoluten Wert oder Modul stellen; dies ist aber der wesentliche Inhalt der Relation (37).

Da nun

$$|(\sigma_n - \sigma) + (\tau_n - \tau) i| = \sqrt{(\sigma_n - \sigma)^2 + (\tau_n - \tau)^2}$$

und

$$|\sigma_n - \sigma| \leqq \sqrt{(\sigma_n - \sigma)^2 + (\tau_n - \tau)^2}$$
$$|\tau_n - \tau| \leqq \sqrt{(\sigma_n - \sigma)^2 + (\tau_n - \tau)^2}$$

so finden mit (37) gleichzeitig die Beziehungen

$$(38) \qquad |\sigma_n - \sigma| < \varepsilon, \quad |\tau_n - \tau| < \varepsilon$$

statt für jedes $n \gtreqless m$; hiermit aber ist gesagt, daß die Reihen (36) und (36*) konvergent sind und die Grenzwerte σ, bzw. τ besitzen (70).

Es reichen aber auch umgekehrt die Beziehungen (38) zur Konvergenz von (35) hin; denn aus ihnen folgt:

$$\left|\sqrt{(\sigma_n - \sigma)^2 + (\tau_n - \tau)^2}\right| < \varepsilon\sqrt{2},$$

d. i.

$$|(\sigma_n - \sigma) + (\tau_n - \tau) i| = |s_n - s| < \varepsilon\sqrt{2}$$

für jedes $n \gtreqless m$.

Aus der für eine konvergente Reihe hiermit gewonnenen Beziehung

$$\sum_0^\infty a_n = \sum_0^\infty \alpha_n + i \sum_0^\infty \beta_n$$

folgt unmittelbar, daß die linksstehende Reihe nur dann einen von der Anordnung ihrer Glieder unabhängigen Grenzwert besitzt, wenn die Reihen

$$\sum_0^\infty \alpha_n, \qquad \sum_0^\infty \beta_n$$

absolut konvergieren, d. h. wenn auch die Reihen

$$\sum_0^\infty |\alpha_n|, \quad \sum_0^\infty |\beta_n|$$

konvergent sind. Wenn aber dies stattfindet, so konvergiert (**71**, 2)) auch die Reihe

$$\sum_0^\infty (|\alpha_n| + |\beta_n|),$$

und weil

$$|a_n| = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \leqq |\alpha_n| + |\beta_n|,$$

so konvergiert (**73**, 1)) auch die Reihe aus den absoluten Werten oder *Moduln* der einzelnen Glieder von $\sum_0^\infty a_n$, d. i. die Reihe

$$\sum_0^\infty |a_n|.$$

Da man, von dieser letzten Annahme ausgehend, auf Grund der Ungleichungen

$$|\alpha_n| \leqq \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = |a_n|$$
$$|\beta_n| \leqq \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = |a_n|$$

wieder zur Konvergenz der Reihen $\sum_0^\infty |\alpha_n|$ und $\sum_0^\infty |\beta_n|$ gegeführt wird, so gilt der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ bei jeder Anordnung ihrer Glieder konvergiere und einen von der Anordnung unabhängigen Grenzwert besitze, besteht in der Konvergenz der Reihe $\sum_0^\infty |a_n|$ aus den absoluten Werten oder Moduln der Glieder, oder, wie man dies ausdrückt, in der absoluten Konvergenz der Reihe.

Im Wesen kommt also, wie dies schon eingangs angedeutet worden, die Untersuchung von Reihen mit komplexen Gliedern auf die Untersuchung einer oder zweier Reihen mit reellen Gliedern zurück.

§ 2. Reihen mit variablen Gliedern.

81. Gleichmäßige Konvergenz einer Reihe mit variablen Gliedern. Für einen Bereich der stetigen Variablen x sei eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von eindeutigen reellen Funktionen

$$u_0 = f_0(x), \quad u_1 = f_1(x), \quad u_2 = f_2(x), \ldots \tag{1}$$

definiert; die aus diesen Funktionen gebildete unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{2}$$

sei nicht blos für einen einzelnen Wert von x, sondern für alle Werte eines Kontinuums (α, β), das jenem Bereiche angehört, konvergent; dann konstituieren die zu diesen Werten des x gehörigen Grenzwerte der Reihe (2) eine Funktion von x, von welcher man sagt, sie sei durch die unendliche Reihe (2) definiert. Bezeichnet man diese Funktion mit $f(x)$, so gilt für alle Werte x aus dem Intervall (α, β):

$$f(x) = \sum_0^\infty u_n = \sum_0^\infty f_n(x). \tag{3}$$

Hiermit ist dem Begriffe nach folgendes ausgesagt: Ist x ein Wert aus (α, β), so läßt sich zu einem beliebig klein festgesetzten positiven ε eine natürliche Zahl m bestimmen derart, daß

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon \tag{4}$$

für $n \geqq m$ und jeden Wert von p aus der natürlichen Zahlenreihe, daß also auch insbesondere der zu der Partialsumme

$$s_n(x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \tag{5}$$

gehörige Rest

$$r_n(x) = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \tag{6}$$

für $n > m$ seinem Betrage nach kleiner ist als ε. Die Partialsumme $s_n(x)$ stellt dann für den betrachteten Wert x die Funktion $f(x)$ mit einem Fehler dar, dessen absoluter Wert unter ε liegt. Man kann den Inhalt der Gleichung (3) auch in der Form

$$f(x) = \lim_{n=+\infty} s_n(x) \tag{7}$$

darstellen; gleichzeitig findet die Beziehung

$$\lim_{n=+\infty} r_n(x) = 0 \tag{8}$$

statt.

Die natürliche Zahl m, welche zu einem gegebenen x gehört derart, daß

$$| r_n(x) | < \varepsilon$$

für *jedes* $n > m$, wird — das liegt in der Natur der Sache — für verschiedene Werte von x auch verschiedene Werte aufweisen; das heißt mit anderen Worten so viel als, daß man, um einen festgesetzten Grad der Annäherung an den Grenzwert $f(x)$ zu erreichen, in der Folge der Partialsummen bei verschiedenen Werten von x verschieden weit vorschreiten müsse.

Gibt es aber unter den m, welche zu verschiedenen Werten des x aus dem Intervalle (α, β) gehören, ein größtes, M, so wird dieses für alle Werte von x die Bedingung erfüllen, daß

$$| r_n(x) | < \varepsilon$$

für jedes $n > M$. In diesem Falle bezeichnet man die unendliche Reihe (2) als gleichmäßig konvergent in dem Intervalle (α, β).

Wenn dagegen kein größtes m bezeichnet werden kann, wenn also zu einer beliebig großen natürlichen Zahl $\varkappa$ ein x aus (α, β) angegeben werden kann, für welches das zur Relation $| r_n(x) | < \varepsilon$ gehörige m größer ist als $\varkappa$, dann heißt die Reihe in dem Intervalle (α, β) ungleichmäßig konvergent.

Hiernach hat man folgende Definition: *Die Reihe* (2) *heißt in dem Intervalle* (α, β) *gleichmäßig konvergent, wenn zu einem beliebig kleinen positiven* ε *eine natürliche Zahl* m *sich so bestimmen läßt, daß für jeden Wert von* x *aus dem genannten Intervalle*

$$| r_n(x) | < \varepsilon,$$

sobald $n \geqq m$ *ist.*

Die Reihe (2) kann für einen Wert x aus (α, β) entweder absolut oder bedingt konvergent sein; ersteres findet statt, wenn alle ihre Glieder gleich bezeichnet sind, oder, falls sie ungleich bezeichnet sind, wenn auch

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$$

konvergent ist; nur in diesem Falle hat $f(x)$ die Eigenschaften einer Summe von (2). Bei bedingter Konvergenz ist der Wert von $f(x)$ mit der Anordnung der Glieder untrennbar verbunden.

Ist die Reihe (2) für jeden Wert von x aus (α, β) absolut konvergent, so nennt man sie *absolut konvergent in dem Intervalle* (α, β).

Was die Stetigkeit des Grenzwertes $f(x)$ in dem Intervalle (α, β) anlangt, so möge vorerst nur folgendes bemerkt werden. Nach einer am Schlusse von **18** gemachten Bemerkung ist eine endliche Summe von stetigen Funktionen selbst wieder eine stetige Funktion. Wie die Beispiele der nächsten Nummer zeigen werden, gilt dies für den Grenzwert einer unendlichen Reihe aus stetigen Funktionen nicht immer; zugleich wird die Wahrnehmung gemacht werden, daß das Unstetigwerden des Grenzwertes und ungleichmäßige Konvergenz der Reihe nebeneinander hergehende Erscheinungen sind.

82. Beispiele. 1) Die Reihe

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \cdots$$

ist für alle Werte von x absolut und gleichmäßig konvergent. Denn es ist die Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

konvergent (**73**, 4)), infolgedessen auch die Reihe

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2x}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3x}{3^2}\right| + \cdots,$$

weil ihre Glieder im allgemeinen kleiner, in keinem Falle größer sind als die korrespondierenden Glieder der vorangehenden (**73**, 1)). Dadurch ist die absolute Konvergenz erwiesen.

Aus der Konvergenz der Vergleichsreihe folgt, daß sich eine natürliche Zahl m bestimmen läßt derart, daß

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots < \varepsilon$$

für jedes $n \gtreqless m$; da nun für jedes x

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2}+\cdots\right|<\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right|,$$

so ist auch für jedes x

$$\left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^2}+\cdots\right|<\varepsilon,$$

sobald $n>m$; damit ist die gleichmäßige Konvergenz dargetan.

2) Aus den Funktionen

$$v_0=1,\quad v_1=x,\quad v_2=x^2,\ldots$$

bilde man nach Vorschrift von 69, 2) die Reihe:

$$(v_0-v_1)+(v_1-v_2)+(v_2-v_3)+\cdots,$$

d. i.

$$(1-x)+(1-x)x+(1-x)x^2+\cdots,$$

welche nach den dortigen Ausführungen konvergent ist, wenn $\lim\limits_{n=+\infty} v_n$ eine bestimmte Zahl v entspricht, und zwar ist dann v_0-v ihr Grenzwert. Nun aber hat $v_n=x^n$ nur dann einen bestimmten Grenzwert, wenn $|x|<1$ oder wenn $x=1$, und zwar ist im ersten Falle dieser Grenzwert $v=0$, im zweiten Falle $v=1$; sonach hat die vorliegende Reihe für alle Werte x aus dem Intervalle $(-1,+1)$, mit Ausschluß der unteren Grenze -1, einen bestimmten Grenzwert, nämlich für alle Werte *zwischen* -1 und $+1$ den Grenzwert 1, für $x=+1$ selbst den Grenzwert 0; die Reihe definiert also eine im allgemeinen stetige (weil konstante) Funktion, welche jedoch an der Stelle $x=+1$ unstetig wird.

Um die Art der Konvergenz näher zu prüfen, bilden wir den Rest

$$r_n(x)=(v_{n+1}-v_{n+2})+(v_{n+2}-v_{n+3})+\cdots;$$

dieser hat für $|x|<1$ den Grenzwert $v_{n+1}=x^{n+1}$, so daß

$$r_n(x)=x^{n+1};$$

verlangt man nun zu einem gegebenen $1>\varepsilon>0$ die zugehörige Zahl m, so ist die Relation

$$|x^{n+1}|<\varepsilon$$

nach n zu lösen und dies gibt, wenn man beachtet, daß im natürlichen Logarithmensystem (wie in jedem System, dessen

Basis größer ist als 1) zu dem kleineren von zwei echten Brüchen der dem Betrage nach größere Logarithmus gehört,

$$n > \frac{l\,\varepsilon}{l\,|x|} - 1,$$

so daß m die nächste über dem Wert der rechten Seite liegende ganze Zahl ist.

Indem sich nun $|x|$ der Grenze 1 nähert, wächst die Zahl m über jeden Betrag hinaus; in der Nähe der Stellen -1 und $+1$ hört die Reihe auf gleichmäßig konvergent zu sein, sie ist es aber in jedem Intervalle, dessen Grenzen dem absoluten Werte nach kleiner sind als 1.

3) Aus der unbegrenzten Folge von Funktionen

$$v_0 = \frac{1}{1}, \quad v_1 = \frac{1}{x+1}, \quad v_2 = \frac{1}{2x+1}, \ldots$$

entsteht nach der in 2) befolgten Vorschrift die Reihe

$$\frac{x}{1(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \cdots;$$

für $x > 0$ sind alle v endlich und stetig, ebenso alle Glieder der Reihe, und weil unter dieser Voraussetzung

$$\lim_{n=+\infty} v_n = \frac{1}{nx+1} = 0$$

ist, so hat die Reihe den von x unabhängigen Grenzwert $v_0 = 1$. Für $x = 0$ ist $\lim\limits_{n=+\infty} v_n = 1$, der Grenzwert der Reihe also 0. Die Reihe definiert demnach in dem Intervalle $(0, +\infty)$ eine im allgemeinen stetige (weil konstante) Funktion, die jedoch an der Stelle $x = 0$ unstetig wird*).

Um die Art der Konvergenz kennen zu lernen, bilde man den Rest

$$r_n(x) = (v_{n+1} - v_{n+2}) + (v_{n+2} - v_{n+3}) + \cdots,$$

dieser hat für $x > 0$ den Grenzwert $v_{n+1} = \frac{1}{(n+1)x+1}$; aus der Relation

*) In dem Intervalle $(-\infty, 0)$ müßten die Werte

$$x = -\frac{1}{1}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \ldots$$

die gegen Null hin immer dichter zusammenrücken, ausgeschlossen werden, weil für jeden solchen Wert eine der Funktionen v und daher zwei Glieder der Reihe nicht definiert sind.

$$\frac{1}{(n+1)x+1} < \varepsilon$$

folgt $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x} - 1$. Die zu ε gehörige Zahl m wächst also, indem x sich der Grenze 0 nähert, über jeden Betrag hinaus; in der Nähe dieser Stelle hört die Reihe auf gleichmäßig zu konvergieren, ist es aber in jedem Intervalle $(\theta, +\infty)$, dessen untere Grenze $\theta > 0$ ist.

83. Stetigkeit des Grenzwertes einer gleichmäßig konvergenten Reihe. Aus der Stetigkeit der Glieder einer konvergenten Reihe von Funktionen der Variablen x kann also auf die Stetigkeit der durch die Reihe definierten Funktion im allgemeinen nicht geschlossen werden; wenn jedoch die Konvergenz als eine gleichmäßige erwiesen ist, dann tritt der folgende Satz in Kraft:

Wenn eine unendliche Reihe, deren Glieder stetige Funktionen von x sind, in dem Intervalle (α, β) gleichmäßig konvergent ist, so ist ihr Grenzwert eine in diesem Intervalle stetige Funktion von x.

Zwischen dem Grenzwerte $f(x)$, der Partialsumme $s_n(x)$ und dem zugeordneten Reste $r_n(x)$ besteht die Beziehung:

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x);$$

der Behauptung des Satzes zufolge muß sich zu einem beliebig festgesetzten positiven ε ein positives δ so bestimmen lassen, daß (17, 2))

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

für jedes Wertepaar x, x' aus (α, β), für welches $|x - x'| < \delta$.

In der Tat, vermöge der gleichmäßigen Stetigkeit kann n so groß gewählt werden, daß für jedes x aus (α, β)

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

also auch

$$|r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3};$$

da ferner $s_n(x)$ als endliche Summe stetiger Funktionen selbst stetig ist, so läßt sich ein positives δ so festsetzen, daß

$$|s_n(x) - s_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

wenn nur $|x - x'| < \delta$. Hieraus folgt, was zu beweisen war, nämlich:

$$|f(x) - f(x')|$$
$$= |s_n(x) - s_n(x') + r_n(x) - r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

84. Potenzreihen. Unter den Reihen mit variablen Gliedern sind am wichtigsten die *Potenzreihen.* Man versteht unter einer Potenzreihe eine Reihe, deren jedes Glied das Produkt aus einer Konstanten — dem Koeffizienten — und aus einer ganzen positiven Potenz der Variablen x ist; ihre allgemeine Form lautet demnach:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots; \tag{9}$$

unter $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sollen, wenn nichts anderes bemerkt wird, reelle Zahlen verstanden werden.

Aus den allgemeinen Sätzen über die Konvergenz unendlicher Reihen kann zunächst der folgende Satz abgeleitet werden.

Konvergiert der Quotient $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *mit beständig wachsendem n gegen eine bestimmte Grenze* λ *(welche auch 0 oder* $+\infty$ *sein kann), so ist die Reihe (9) absolut konvergent für alle Werte von x, für welche* $|x| < \lambda$; *über ihr Verhalten an den Grenzen des Konvergenzintervalls* $(-\lambda, +\lambda)$ *selbst läßt sich zunächst keine bestimmte Aussage machen.*

Bezeichnet man nämlich die aus den absoluten Werten der Glieder von (9) gebildete Reihe

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots$$

allgemein mit $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$, so ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x|.$$

Hat nun für $\lim n = +\infty$ $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ den Grenzwert λ, so besitzt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ den Grenzwert $\frac{1}{\lambda}$ und ist

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{\lambda};$$

somit ist die Reihe (9) absolut konvergent, wenn $|x| < \lambda$ (**73**, 2); **74**); für $|x| = \lambda$ ist aber kein allgemeines Urteil möglich, weil dann $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$ ist.

Hat $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ den Grenzwert $+\infty$, so besitzt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ den Grenzwert 0, und welches auch der Wert von $|x|$ sein mag, es ist immer $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$, die Reihe (9) daher absolut konvergent für jeden endlichen Wert von x.

Konvergiert $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ gegen die Grenze Null, so hat $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ den Grenzwert $+\infty$ und denselben Grenzwert besitzt $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ für jedes $|x| > 0$: die Reihe ist für keinen Wert von x konvergent außer für $x = 0$ (im uneigentlichen Sinne), weil sie sich dann auf ihr Anfangsglied a_0 reduziert.

Man hat daher niemals konvergente, durchwegs konvergente und in einem endlichen Intervalle konvergente Potenzreihen zu unterscheiden. Ein Beispiel der ersten Art bildet die Reihe

$$1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2 x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 x^3 + \cdots,$$

weil $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$; ein Beispiel der zweiten Art die Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

weil $\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim (n+1) = +\infty$; ein Beispiel der dritten Art die Reihe

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

weil $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{n+1}{n} = 1$, so daß $(-1, +1)$ das Konvergenzintervall ist; an den Grenzen dieses Intervalls zeigt die Reihe ein verschiedenes Verhalten: sie ist für $x = +1$ bedingt konvergent (**77**, 1)), für $x = -1$ divergent (**73**, 1)).

85. Erster Abelscher Satz über Potenzreihen. In die Natur der Konvergenz der Potenzreihen führen die von Abel hierüber angestellten Untersuchungen ein, deren Ergebnis in zwei Sätzen zusammengefaßt werden kann. Der erste dieser Säze lautet:

Wenn die absoluten Werte der Glieder einer Potenzreihe (9) für einen Wert $x = X$ der Variablen insgesamt unter einer Grenze $\varkappa$ bleiben, so ist die Reihe absolut konvergent für jeden Wert von x, für welchen $|x| < |X|$.

Nach Voraussetzung ist für jede natürliche Zahl n

$$|a_n X^n| < \varkappa,$$

folglich

$$|a_n x^n| = \left|a_n X^n \left(\frac{x}{X}\right)^n\right| < \varkappa \left|\frac{x}{X}\right|^n,$$

d. h. die Glieder der Reihe

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots \tag{10}$$

sind kleiner als die korrespondierenden Glieder der geometrischen Reihe

$$\varkappa + \varkappa \left|\frac{x}{X}\right| + \varkappa \left|\frac{x}{X}\right|^2 + \cdots;$$

diese ist konvergent, wenn $\left|\frac{x}{X}\right| < 1$, also wenn $|x| < |X|$; dann ist auch die Reihe (10) konvergent (73, 1)) und somit die Reihe (9) absolut konvergent (75).

Aus dieser Vergleichung kann überdies bei bekanntem $\varkappa$ eine obere Grenze für den Fehler abgeleitet werden, welcher begangen wird, wenn man sich bei der Reihe (9) auf die Summe der ersten $n + 1$ Glieder beschränkt; es ist nämlich

$$|r_n(x)| = |a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots| < |a_{n+1}x^{n+1}| + |a_{n+2}x^{n+2}| + \cdots$$

$$< \varkappa \left|\frac{x}{X}\right|^{n+1} + \varkappa \left|\frac{x}{X}\right|^{n+2} + \cdots = \frac{\varkappa \left|\frac{x}{X}\right|^{n+1}}{1 - \left|\frac{x}{X}\right|},$$

der absolute Betrag dieses Fehlers also kleiner als die zuletzt angeschriebene Größe.

Aus diesem Satze können die nachstehenden Folgerungen gezogen werden.

1) Ist die Reihe (9) für $x = X$ konvergent, so ist sie auch für jeden Wert von x, dessen absoluter Betrag kleiner ist als $|X|$, konvergent.

Denn da sie für $x = X$ konvergiert, so sind für diesen Wert alle ihre Glieder endlich, liegen also insgesamt unter einer Grenze $\varkappa$.

2) Ist die Reihe (9) für $x = X$ divergent, so ist sie es auch für jeden Wert von x, der dem Betrage nach größer ist als $|X|$.

Wäre sie nämlich für einen solchen Wert — gegen die Behauptung — konvergent, so müßte sie für den Wert X zufolge 1) auch konvergent sein — gegen die Voraussetzung.

3) Gilt bezüglich X die in dem obigen Satze getroffene Voraussetzung, so ist die Reihe (9) in jedem Intervall (α, β), dessen Grenzen dem Betrage nach kleiner sind als $|X|$, *gleichmäßig konvergent* und definiert daher in einem solchen Intervalle eine *stetige Funktion* von x (83).

Man kann nämlich einen Wert x' annehmen, dessen Betrag $|x'|$ größer ist als $|\alpha|$ und $|\beta|$ (also auch größer als die Beträge aller Werte aus (α, β)) und doch kleiner ist als $|X|$; dem Satze zufolge ist die Reihe für diesen Wert absolut konvergent, daher kann die natürliche Zahl m so bestimmt werden, daß

$$|a_{n+1}x'^{n+1}| + |a_{n+2}x'^{n+2}| + \cdots < \varepsilon$$

für jedes $n \overline{\gtrless} m$, wobei ε eine beliebig klein festgesetzte positive Zahl bedeutet. Ist nun x ein Wert aus dem Intervall (α, β) [mit Einschluß der Grenzen], so ist wegen $|x| < |x'|$ um so mehr

$$|a_{n+1}x^{n+1}| + |a_{n+2}x^{n+2}| + \cdots < \varepsilon;$$

und da endlich

$$|r_n(x)| = |a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots| < |a_{n+1}x^{n+1}| + |a_{n+2}x^{n+2}| + \cdots,$$

so ist auch, und zwar für jeden Wert aus (α, β) [mit Einschluß der Grenzen]

$$|r_n(x)| < \varepsilon;$$

dadurch ist aber die gleichmäßige Konvergenz erwiesen (81).

Aus der Stetigkeit der durch die Reihe definierten Funktion ergibt sich der folgende Schluß: Ist x_0 ein Wert von x, dessen Betrag kleiner ist als $|X|$, und konvergiert x gegen die Grenze x_0, so konvergiert $f(x)$ gegen die Grenze $f(x_0)$, d. h. es ist

$$f(x_0) = \lim_{x=x_0} f(x) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots$$

Insbesondere folgt daraus

$$f(0) = a_0,$$

so daß eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion für $x = 0$ nur dann verschwindet, wenn die Reihe kein von x freies Glied enthält. Wenn allgemein

$$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

und wenn die Reihe konvergiert für alle Werte von x, die absolut genommen kleiner sind als $|X|$, so konvergiert für dieselben Werte auch die Reihe

$$a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \cdots = \varphi(x)$$

und es ist

$$f(x) = x^n \varphi(x),$$

und da $\varphi(x)$ für $x = 0$ nicht verschwindet, so hat die Gleichung

$$f(x) = 0$$

$x = 0$ zur n-fachen Wurzel.

86. Zweiter Abelscher Satz über Potenzreihen. Durch die letzte Folgerung ist die gleichmäßige Konvergenz einer Potenzreihe und die Stetigkeit der durch sie definierten Funktion für jedes Intervall erwiesen, das *innerhalb* des Konvergenzintervalls liegt. An den Grenzen dieses Intervalls selbst kann die Reihe verschiedenes Verhalten zeigen; sie kann unbedingt oder bedingt konvergent, sie kann aber auch divergent sein (s. letztes Beispiel in 84). Für die Einbeziehung der Grenzen des Konvergenzintervalles ist nun der folgende Abelsche Satz von Wichtigkeit:

Ist die Potenzreihe (9) für $x = \beta$ konvergent, so ist sie in jedem Intervalle (α, β), dessen untere Grenze dem absoluten Werte nach kleiner ist als $|\beta|$, mit Einschluß der Grenzen gleichmäßig

konvergent und stellt somit eine in dem Intervall (α, β) *stetige Funktion von* x *dar.*

Es genügt, den Beweis blos für das Intervall $(0, \beta)$ bzw. $(\beta, 0)$ zu führen, je nachdem $\beta > 0$ oder $\beta < 0$; denn für $(\alpha, 0)$, bzw. $(0, \alpha)$, wo $|\alpha| < |\beta|$, besteht die gleichmäßige Konvergenz schon auf Grund von **85**, 3), 1).

Setzt man

$$r_n(\beta) = a_{n+1}\beta^{n+1} + a_{n+2}\beta^{n+2} + \cdots, \tag{11}$$

so läßt sich der Voraussetzung und dem Begriff der Konvergenz gemäß (**70**) zu einem beliebig klein festgesetzten positiven ε eine natürliche Zahl m so feststellen, daß alle Partialsummen von (11), welche mit

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$$

bezeichnet werden mögen, dem Betrage nach kleiner sind als ε, sobald nur $n \geqq m$. Nun ist

$$a_{n+1}\beta^{n+1} + a_{n+2}\beta^{n+2} + \cdots + a_{n+p}\beta^{n+p}$$
$$= \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1) + \cdots (\sigma_p - \sigma_{p-1});$$

multipliziert man die aufeinanderfolgenden Glieder dieser p Glieder umfassenden Summe mit positiven, dem Betrage nach abnehmenden Zahlen

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p, \tag{12}$$

so entsteht die Gleichung:

$$a_{n+1}\beta^{n+1}\theta_1 + a_{n+2}\beta^{n+2}\theta_2 + \cdots + a_{n+p}\beta^{n+p}\theta_p$$
$$= \sigma_1\theta_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)\theta_2 + \cdots + (\sigma_p - \sigma_{p-1})\theta_p$$
$$= \sigma_1(\theta_1 - \theta_2) + \sigma_2(\theta_2 - \theta_3) + \cdots + \sigma_{p-1}(\theta_{p-1} - \theta_p) + \sigma_p\theta_p;$$

aus der zweiten Form der rechten Seite, in welcher der Voraussetzung gemäß $\theta_1 - \theta_2, \theta_2 - \theta_3, \ldots \theta_{p-1} - \theta_p, \theta_p$ positive Zahlen sind, geht folgendes hervor. Da alle $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_p$ dem absoluten Betrage nach kleiner sind als ε, so wird diese rechte Seite dem Betrage nach vergrößert, wenn man statt der σ_1, $\sigma_2, \ldots \sigma_p$ durchwegs ε setzt; daher ist

$$|a_{n+1}\beta^{n+1}\theta_1 + a_{n+2}\beta^{n+2}\theta_2 + \cdots + a_{n+p}\beta^{n+p}\theta_p| < \varepsilon\theta_1;$$

sind nun überdies die Beträge der Zahlen θ unter der Einheit gelegen, so daß auch das größte $\theta_1 < 1$, so gilt umsomehr

$$(13) \qquad |a_{n+1}\beta^{n+1}\theta_1 + a_{n+2}\beta^{n+2}\theta_2 + \cdots + a_{n+p}\beta^{n+p}\theta_p| < \varepsilon.$$

Eine Zahlenreihe von den Eigenschaften der Reihe (12) ist

$$\left(\frac{x}{\beta}\right)^{n+1}, \quad \left(\frac{x}{\beta}\right)^{n+2}, \ldots \left(\frac{x}{\beta}\right)^{n+p},$$

wenn nur $|x| < |\beta|$ und x, β gleich bezeichnet sind; führt man sie in (13) ein, so entsteht

$$|a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| < \varepsilon.$$

Diese Relation, giltig für jedes p aus der Reihe $1, 2, 3 \ldots$ und für jedes x, das mit β gleichbezeichnet dem absoluten Betrage nach kleiner ist als $|\beta|$, nach der Voraussetzung aber auch giltig für $x = \beta$ selbst, beweist in der Tat die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (9) in dem Intervall $(0, \beta)$ bzw. $(\beta, 0)$ mit Einschluß der Grenzen, und mit Berücksichtigung der an die Spitze des Beweises gestellten Bemerkung findet nun die gleichmäßige Konvergenz in dem ganzen Intervall (α, β) statt, wenn nur $|\alpha| < |\beta|$.

Aus diesem Satze ergibt sich folgende wichtige Folgerung: *Ist $f(x)$ der Grenzwert der Reihe (9) auf ihrem Konvergenzgebiete (α, β) mit Einschluß der Grenzen, und nähert sich x der Grenze β durch Werte, welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als β, so nähert sich $f(x)$ vermöge seiner Stetigkeit der Grenze $f(\beta)$, so daß*

$$f(\beta) = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 \cdots.$$

Dieser Schluß dürfte nicht gemacht werden, wenn die Reihe (9) für $x = \beta$ nicht konvergent wäre, selbst wenn $f(x)$ an der Stelle $x = \beta$ stetig wäre.

Zwei Beispiele mögen dies erläutern. Die Reihe

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

ist konvergent in dem Intervalle $(-1, +1)$ und auch an der oberen Grenze desselben (**84**); daher ist, wenn $f(x)$ den Grenzwert dieser Reihe bezeichnet, soweit sie konvergiert, auch

$$f(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots.$$

Die Reihe

$$1 + x + x^2 + \cdots$$

hat, solange sie konvergiert, d. i. für $|x| < 1$, den Grenzwert $f(x) = \frac{1}{1-x}$; derselbe ist auch für $x = -1$ stetig und doch darf nicht

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - \cdots$$

gesetzt werden, weil die definierende Reihe an der Grenze $x = -1$ nicht mehr konvergiert.

Die Reihe des ersten Beispiels ist zugleich ein Beleg dafür, daß man bei einer Potenzreihe, welche gerade und ungerade Potenzen von x enthält, aus der Konvergenz für $x = \beta$ nicht auch auf die Konvergenz für $x = -\beta$ schließen darf; bei einer Reihe, welche nur gerade oder nur ungerade Potenzen enthält, ist dieser Schluß immer zutreffend.

87. Abgeleitete Reihen. *Für jeden Wert von x, für welchen die Potenzreihe* (9):

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

konvergent ist, ist auch die aus den Differentialquotienten der einzelnen Glieder gebildete Reihe

$$1\, a_1 + 2\, a_2 x + 3\, a_3 x^2 + \cdots \tag{14}$$

konvergent.

Existiert nämlich für die Reihe (9) der Grenzwert $\lim\limits_{n=+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ und heißt er λ, so ist diese Reihe konvergent für alle Werte *innerhalb* des Intervalles $(-\lambda, +\lambda)$ (84). Bezeichnet man aber die Koeffizienten der Reihe (14) mit A_1, $A_2, A_3, \ldots$, so ist $\left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right| = \frac{n}{n+1} \cdot \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, es hat demnach $\left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right|$ denselben Grenzwert wie $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ und die Reihe (14) ist demselben Satze zufolge absolut konvergent für die nämlichen Werte von x wie (9).

Hiernach ist also beispielsweise mit der Reihe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

gleichzeitig die Reihe

$$1 + 2\,x + 3\,x^2 + \cdots$$

absolut konvergent, solange $|x| < 1$.

Unabhängig von der Existenz des Grenzwertes für $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ kann die obige Behauptung auch so erwiesen werden. Angenommen, für den Wert $x = X$ seien die Glieder von (9) dem absoluten Betrage nach unter der positiven Zahl k gelegen, also

$$|a_n X^n| < k$$

für jedes n; dann ist dem ersten Abelschen Satze gemäß (9) absolut konvergent für jedes x, wofür $|x| < |X|$. Nun aber ist für das allgemeine Glied von (14)

$$|n a_n x^{n-1}| = \left|\frac{n}{X} a_n X^n \left(\frac{x}{X}\right)^{n-1}\right|$$
$$= \frac{n}{|X|} \left|\frac{x}{X}\right|^{n-1} |a_n X^n| < \frac{k}{|X|} n \left|\frac{x}{X}\right|^{n-1},$$

infolgedessen, wenn man

$$\left|\frac{x}{X}\right| = q$$

setzt,

$$|1 a_1| + |2 a_2 x| + |3 a_3 x^2| + \cdots < \frac{k}{|X|}(1 + 2q + 3q^2 + \cdots);$$

die in der Kammer rechts eingeschlossene Reihe ist aber nach der vorausgeschickten Bemerkung konvergent, wenn $q < 1$, daher ist auch die Reihe

$$|1 a_1| + |2 a_2 x| + |3 a_3 x^2| + \cdots$$

konvergent und infolgedessen die Reihe (14) absolut konvergent für alle x, welche dem absoluten Betrage nach kleiner sind als $|X|$.

Auf Grund von 85, 3) ist die Konvergenz von (14) in jedem Intervalle, dessen Grenzen dem Betrage nach kleiner sind als $|X|$, eine gleichmäßige und ist der Grenzwert von (14) ebenso wie der von (9) eine stetige Funktion von x.

An den Grenzen des Konvergenzintervalls darf, selbst wenn für diese die Reihe (9) konvergent ist, auf die Konvergenz der Reihe (14) nicht geschlossen werden. So ist die Reihe

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots$$

auch an den Grenzen $-1, +1$ ihres Konvergenzintervalls und

zwar absolut konvergent, die aus ihr nach Vorschrift von (14) gebildete Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots$$

ist an der unteren Grenze bedingt konvergent, an der oberen aber divergent.

Durch wiederholte Anwendung des an die Spitze dieses Artikels gestellten Satzes ergibt sich die folgende Tatsache:

Die aus einer Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{9}$$

durch wiederholte gliedweise Differentiation abgeleiteten Potenzreihen:

$$\left\{\begin{array}{c} 1\,a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots \\ 2\cdot 1\,a_2 + 3\cdot 2\,a_3 x + 4\cdot 3\,a_4 x^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n(n-1)\cdots 1 a_n + (n+1)n\cdots 2\,a_{n+1}x + (n+2)(n+1)\cdots 3\,a_{n+2}x^2 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{15}$$

sind innerhalb desselben Intervalls konvergent, innerhalb dessen die ursprüngliche Reihe konvergiert, und definieren eine unbegrenzte Folge in diesem Intervalle stetiger Funktionen.

88. Differentialquotienten einer konvergenten Potenzreihe. Taylorsche Reihe. Die Bedeutung der vorstehenden Funktionen wird sich auf Grund des folgenden, für die Analysis wichtigen Satzes ergeben:

Ist $f(x)$ eine durch eine konvergente Potenzreihe definierte Funktion, so läßt sich $f(x+h)$, sofern auch $x+h$ dem Konvergenzintervall angehört, durch eine nach h fortschreitende Potenzreihe darstellen.

Es sei also

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{16}$$

und die Reihe konvergiere für alle Werte von x, welche dem Betrage nach kleiner sind als $|X|$; sei x ein solcher Wert und h so bestimmt, daß

$$|h| < |X| - |x|, \tag{17}$$

so daß also $|x| + |h|$ und somit auch $x + h$ dem Konvergenzintervall angehört; dann gilt auch

(18) $f(x+h)=a_0+a_1(x+h)+a_2(x+h)^2+\cdots+a_n(x+h)^n+\cdots.$

In dieser Gleichung werde x als ein fester Wert und h als Variable angesehen; dann ist die absolute Konvergenz der Reihe (18) für alle Werte von h, welche der Bedingung (17) genügen, feststehend; man darf daher die einzelnen Glieder durch die Gliedergruppen, welche sich nach Ausführung der Potenzen von $x+h$ ergeben, ersetzen und die Glieder beliebig umstellen und zusammenfassen, insbesondere diejenigen mit gleichen Potenzen von h vereinigen: denn alle diese Operationen sind vermöge **72**, 3) und 2) an der aus (18) abgeleiteten Reihe

$$|a_0|+|a_1|(|x|+|h|)+|a_2|(|x|+|h|)^2+\cdots$$

gestattet, folglich auch an (18) selbst. Nach Ausführung derselben ist

(18*) $$f(x+h)=u_0+u_1h+u_2h^2+\cdots+u_nh^n+\cdots$$

und zwar ist

$$u_0=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$u_1=\binom{1}{1}a_1+\binom{2}{1}a_2x+\binom{3}{1}a_3x^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{1}[1\,a_1+2\,a_2x+3\,a_3x^2+\cdots]$$

$$u_2=\binom{2}{2}a_2+\binom{3}{2}a_3x+\binom{4}{2}a_4x^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}[2\cdot 1\,a_2+3\cdot 2\,a_3x+4\cdot 3\,a_4x^2+\cdots]$$

. . . .

$$u_n=\binom{n}{n}a_n+\binom{n+1}{n}a_{n+1}x+\binom{n+2}{n}a_{n+2}x^2+\cdots$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}[n(n-1)\ldots 1\,a_n+(n+1)n\ldots 2\,a_{n+1}x$$
$$+(n+2)(n+1)\ldots 3\,a_{n+2}x^2+\cdots].$$

Es ist also $u_0=f(x)$ und $u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ sind die durch die Faktoriellen von $1, 2, \ldots n, \ldots$ bzw. dividierten Grenzwerte der Reihen (15), welche als gleichzeitig konvergierend mit der Reihe (9) erwiesen worden sind.

Aus (18*) folgt hiernach zunächst:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=u_1+u_2h+\cdots+u_nh^{n-1}+\cdots,$$

wobei die Reihe rechts für dieselben Werte von h absolut und gleichmäßig konvergent ist wie (18), d. i. für Werte, welche der Bedingung (17) genügen. Läßt man nun h gegen die Grenze Null konvergieren, so konvergiert die rechte Seite gegen den Wert u_1 (85, 3)), die linke aber hat zum Grenzwert den Differentialquotienten der Funktion $f(x)$; mithin ist

$$f'(x) = u_1 = 1\,a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots$$

Dadurch ist aber auch die Bedeutung aller übrigen Reihen in (15) gegeben, da jede folgende aus der vorangehenden ebenso abgeleitet ist, wie die erste aus der Reihe (9); es ist also:

$$f''(x) = 2 \cdot 1\,a_2 + 3 \cdot 2\,a_3 x + 4 \cdot 3\,a_4 x^2 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 1\,a_n + (n+1)n \ldots 2\,a_{n+1} x \\ + (n+2)(n+1)\ldots 3\,a_{n+2} x^2 + \cdots.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dieses Ergebnis fassen wir in dem Satze zusammen: *Die durch n-malige gliedweise Differentiation einer konvergenten Potenzreihe entstandene Potenzreihe hat für alle Werte von x innerhalb des gemeinsamen Konvergenzintervalls beider Reihen zum Grenzwerte den n-ten Differentialquotienten des Grenzwertes der ursprünglichen Reihe.* Man spricht es kurz dahin aus, eine konvergente Potenzreihe werde differentiiert, indem man sie gliedweise differentiiert, also wie eine endliche Summe von Funktionen behandelt.

Hiernach ist nun

$$u_0 = f(x), \quad u_1 = \frac{f'(x)}{1}, \quad u_2 = \frac{f''(x)}{1 \cdot 2}, \ldots u_n = \frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

und die endgültige Form von (18*) lautet:

$$(19) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots n} h^n + \cdots,$$

gültig, solange

$$|x| < |X|, \quad |h| < |X| - |x|.$$

Die Entwicklung (19) führt den Namen der *Taylorschen Reihe* für die Funktion $f(x+h)$; ihre Ableitung erfolgte unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ der Grenzwert einer konvergenten Potenzreihe sei.

Als konvergente Potenzreihe kann auch jede rationale ganze Funktion von x angesehen werden; ihr Konvergenzintervall erstreckt sich über das ganze Gebiet der reellen Zahlen; ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

so ist

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 1 \cdot a_n$$

und jeder höhere Differentialquotient gleich Null: für eine solche Funktion bricht also die Taylorsche Reihe ebenfalls mit dem $(n+1)$-ten Gliede ab und lautet:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)} x}{1 \cdot 2 \cdots n} h^n, \tag{20}$$

sie ist hier gültig für jeden endlichen Wert von x und von h.

89. Identische Gleichheit zweier Potenzreihen. Um die Bedingungen festzustellen, unter welchen *zwei Potenzreihen eine und dieselbe Funktion* darstellen, weisen wir zunächst den folgenden Satz nach:

Wenn die durch die konvergente Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

definierte Funktion $f(x)$ für alle Werte von x aus einem beliebig engen Intervall $(-\delta, +\delta)$ Null ist, so ist sie für alle Werte von x gleich Null, weil dann die Koeffizienten der Potenzreihe sämtlich verschwinden müssen.

Weil der Wert $x = 0$ dem Intervall angehört, so ist

$$f(0) = a_0 = 0;$$

daher ist

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = x(a_1 + a_2 x + \cdots),$$

und soll dies letzte Produkt an jeder Stelle von $(-\delta, +\delta)$ gleich Null sein, so muß

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$$

für alle diese Werte von x verschwinden, wofür wieder

$$a_1 = 0$$

notwendige Bedingung ist; dann aber ist

$$f(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = x^2(a_2 + a_3 x + \cdots),$$

und damit das Produkt rechter Hand an allen Stellen des Intervalls $(-\delta, +\delta)$ verschwinde, muß dies seitens des Faktors

$$a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \cdots$$

geschehen, und dafür besteht die notwendige Bedingung

$$a_2 = 0$$

usw. Es muß also tatsächlich $a_n = 0$ sein für jedes n aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots$; dann aber ist für jeden Wert von x

$$f(x) = 0.$$

Der Satz gilt auch für eine rationale ganze Funktion, weil eine solche als besonderer Fall einer konvergenten Potenzreihe zu gelten hat.

Die Beweisführung hat hier an den Umstand angeknüpft, daß dem Intervall $(-\delta, +\delta)$ auch die Stelle Null angehört. Man kann aber ganz allgemein beweisen:

Wenn die Funktion $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ für alle Werte von x aus einem beliebigen die Null nicht enthaltenden Intervalle (α, β) ihres Konvergenzgebietes Null ist, so ist sie identisch Null.

Wählt man nämlich innerhalb (α, β) einen Wert x, so lassen sich für h Grenzen $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ feststellen derart*), daß auch $x + h$ innerhalb (α, β) verbleibt; dann ist nach Voraussetzung

$$f(x + h) = u_0 + u_1 h + u_2 h^2 + \cdots$$

für alle Werte von h aus $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ gleich Null, daher notwendig

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \ldots \tag{21}$$

für alle Werte von x innerhalb (α, β). Von dem der Null näherliegenden Werte $x = \alpha$ ausgehend kann man nun ein Intervall konstruieren, das bis an die ihm näherliegende Grenze des Konvergenzgebietes reicht, dessen Mitte α ist und in welchem vermöge (21) und (18) $f(x)$ beständig Null ist. Von dem der Null zunächstliegenden Punkte dieses Intervalls ausgehend konstruiere man ebenso ein erweitertes Intervall, in welchem wieder

*) Man braucht nur ε kleiner zu nehmen als den kleineren von den beiden Abschnitten, in welche (α, β) durch das gewählte x zerfällt.

$f(x)$ beständig gleich Null ist. Auf diese Weise fortfahrend muß man notwendig zu einem Intervall kommen, das die Null einschließt; dann aber befindet man sich im Falle des vorigen Satzes und schließt, daß

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \ldots$$

Auf Grund dieser beiden Sätze kann nun die Richtigkeit der folgenden Behauptung erwiesen werden:

Besitzen zwei konvergente Potenzreihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

für jedes x aus einem beliebigen Intervall (α, β) übereinstimmende Grenzwerte $f(x)$, $g(x)$, so sind die Koeffizienten gleichhoher Potenzen von x einander gleich und die Grenzwerte im ganzen Konvergenzintervall übereinstimmend.

Da nämlich

$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots$$

Null ist für alle x aus (α, β), so ist

$$a_0 - b_0 = 0, \quad a_1 - b_1 = 0, \quad a_2 - b_2 = 0, \ldots,$$

also

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \ldots$$

und die Gleichung $f(x) - g(x) = 0$ oder $f(x) = g(x)$ besteht für alle Werte von x, für welche die Reihen konvergieren.

Daraus ergibt sich die Tatsache, daß eine Funktion, wenn sie als Grenzwert einer Potenzreihe darstellbar ist, es nur auf eine einzige Art sein kann.

Der obige Satz führt den Namen des *Satzes der unbestimmten Koeffizienten* und gilt ebensowohl *für Potenzreihen* wie *für ganze Funktionen.*

90. Komplexe Potenzreihen. Die über Potenzreihen unter Voraussetzung reeller Koeffizienten und reeller Werte der Variablen abgeleiteten Sätze behalten ihre Geltung auch dann, wenn die Koeffizienten komplexe Zahlen sind, oder wenn der Variablen auch komplexe Werte erteilt werden, oder wenn beides zusammentrifft, sofern man den absoluten Wert einer komplexen Zahl so versteht, wie es in 6 erklärt worden ist, nämlich als ihren Modul.

Die Konvergenzbedingung erhält hier eine veränderte Deutung. Sind nämlich die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ komplexe Zahlen,

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i$$

und existiert für

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \sqrt{\frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{\alpha_{n+1}^2 + \beta_{n+1}^2}}$$

bei $\lim n = +\infty$ ein bestimmter Grenzwert λ, der eine positive reelle Zahl sein wird, so drückt die Konvergenzbedingung (84)

$$|x| < \lambda$$

bei Zulassung komplexer Werte von x aus, daß der Modul von $x = \xi + \eta i$,

$$\left|\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right| < \lambda$$

sein müsse; der die Zahl x in der Zahlenebene darstellende Punkt (6) hat also für den Fall der Konvergenz innerhalb eines Kreises zu liegen, welcher mit dem Halbmesser λ um den Ursprung O beschrieben wird. Diesen Kreis, welcher an die Stelle des Konvergenzintervalls bei reellen Reihen getreten ist, bezeichnet man als den *Konvergenzkreis* der Potenzreihe. Ist die Reihe beständig konvergent, so erweitert sich der Kreis zur unbegrenzten Ebene, welche das *Konvergenzgebiet* darstellt.

§ 3. Die Formeln und Reihen von Taylor und Maclaurin.

91. Die Taylorsche Formel. Es ist gezeigt worden (88), daß eine Funktion $f(x)$, welche als Grenzwert einer konvergenten Potenzreihe definiert ist, für das Argument $x + h$, sofern x sowohl als $x + h$ dem Konvergenzintervalle angehören, in eine nach positiven ganzen Potenzen von h fortschreitende Reihe entwickelt werden kann; die bezügliche Entwicklung erhielt dort den Namen *Taylorsche Reihe.*

Nun sei $f(x)$ eine *beliebige* Funktion von x, von der wir voraussetzen, daß sie in einem Intervalle (α, β) eindeutig und stetig sei und Differentialquotienten bis zur $(n-1)$-ten Ordnung einschließlich zulasse; übrigens hat die Existenz eines bestimmten vollständigen Differentialquotienten $n-1$-ter Ord-

nung die Stetigkeit aller vorausgehenden und auch der Funktion selbst zur Folge. Wir stellen uns die Aufgabe, den Fehler zu bestimmen, welcher begangen wird, wenn man für $f(x+h)$ die auf die ersten n Glieder erstreckte Partialsumme der Taylorschen Reihe (88, (19)), d. i.

$$f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} h^{n-1}$$

nimmt; dieser Fehler werde mit R_n bezeichnet.

Behufs Erledigung dieser Frage führen wir zunächst eine neue Bezeichnung ein, indem wir

$$x = a, \quad x + h = b$$

setzen, woraus

$$h = b - a$$

folgt; das Intervall (a, b) muß eingeschlossen sein von jenem (α, β). Es ist dann

$$(1) \quad \begin{cases} R_n = f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1}(b-a) - \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(b-a)^2 - \cdots \\ \qquad - \frac{f^{(n-1)}(a)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}(b-a)^{n-1}; \end{cases}$$

dies aber läßt sich als Differenz zweier besonderen Werte der folgenden Funktion darstellen:

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi(z) = f(z) + \frac{f'(z)}{1}(b-z) + \frac{f''(z)}{1 \cdot 2}(b-z)^2 + \cdots \\ \qquad + \frac{f^{(n-1)}(z)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}(b-z)^{n-1}, \end{cases}$$

indem nämlich

$$\varphi(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(b-a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}(b-a)^{n-1}$$

$$\varphi(b) = f(b);$$

mithin ist tatsächlich

$$(3) \qquad R_n = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Auf Grund dieser Bemerkung ist eine Schätzung von R_n durchführbar, in allgemeinster Form mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes (39). Hat nämlich die Funktion $\varphi(z)$ an jeder Stelle zwischen a und b einen vollständigen Differentialquotienten — ihre Stetigkeit in dem Intervalle (a, b) ist durch die Voraussetzungen gewährleistet, wenn man sie für

$f^{(n-1)}(z)$ annimmt — und gilt dasselbe von der *beliebigen* Funktion $\psi(z)$ mit der weiteren Maßgabe, daß $\psi'(z)$ an keiner Stelle zwischen a und b Null ist, so gilt der Ansatz:

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \tag{4}$$

mindestens für *einen* Wert ξ zwischen a und b. Nun folgt aus (2):

$$\begin{aligned}\varphi'(z) = f'(z) + \frac{f''(z)}{1}(b-z) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(z)}{1\cdot 2\cdots(n-2)}(b-z)^{n-2} \\ + \frac{f^{(n)}(z)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}(b-z)^{n-1} \\ - f'(z) - \frac{f''(z)}{1}(b-z) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(z)}{1\cdot 2\cdots(n-2)}(b-z)^{n-2},\end{aligned}$$

also ist

$$\varphi'(z) = \frac{f^{(n)}(z)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}(b-z)^{n-1}$$

und die Existenz dieses Differentialquotienten innerhalb (a, b) hängt von der Existenz auch des n-ten Differentialquotienten von $f(x)$ in dem genannten Intervalle ab, was wir den bisher gemachten Voraussetzungen als neue hinzufügen. Damit ist aber zufolge (4) und (3)

$$R_n = \frac{\psi(b)-\psi(a)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}(b-\xi)^{n-1}.$$

Das Willkürliche in dieser Formel kann durch bestimmte Wahl von $\psi(z)$ beseitigt werden: setzt man

$$\psi(z) = (b-z)^p,$$

worin p eine *positive ganze Zahl* bedeutet, so ist den Bedingungen entsprochen und

$$\psi'(z) = -p(b-z)^{p-1}.$$

Bei dieser Wahl ist also

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{1\cdot 2\cdots(n-1)p}(b-a)^p(b-\xi)^{n-p};$$

kehrt man zu der ursprünglichen Bezeichnung zurück, so kann ξ als ein zwischen x und $x+h$ liegender Wert in der Form

$$\xi = x + \theta h \qquad (0<\theta<1)$$

dargestellt werden; weiter ist $b-\xi = x+h-x-\theta h = h(1-\theta)$; mithin

$$R_n = \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{1\cdot 2\cdots(n-1)p}(1-\theta)^{n-p}h^n. \tag{5}$$

Dadurch erscheint die Aufgabe in dem Sinne gelöst, daß sich für R_n ein Spielraum bestimmen läßt: R_n liegt nämlich notwendig zwischen dem kleinsten und dem größten der Werte, welche die rechte Seite von (5) annimmt, indem θ das vorgeschriebene Intervall (0, 1) durchläuft.

Vermöge der Bedeutung, welche dem R_n zukommt, ist also

$$(6) \quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots \\ \qquad + \frac{f^{(n-1)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} h^{n-1} + R_n. \end{cases}$$

Diese Gleichung in Verbindung mit (5) gibt die *Taylorsche Formel* in derjenigen Gestalt, welche ihr in Ansehung des *Restgliedes* R_n Schlömilch und Roche*) erteilt haben. Die älteren Formen des Restgliedes nach Lagrange und Cauchy erhält man aus (5) durch Spezialisierung von p, erstere für $p = n$:

$$(7) \qquad R_n = \frac{f^{(n)}(x + \theta h)}{1 \cdot 2 \cdots n} h^n,$$

letztere für $p = 1$:

$$(8) \qquad R_n = \frac{f^{(n)}(x + \theta h)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} (1 - \theta)^{n-1} h^n;$$

die Form (7) ist dadurch bemerkenswert, daß sie sich bis auf das Argument bei $f^{(n)}$ dem Bau der übrigen Glieder von (6) völlig anschließt.

Für die späteren, überaus zahlreichen Anwendungen der Taylorschen Formel sind die folgenden Bemerkungen im Auge zu behalten.

1) Die Formel darf für alle Werte von x und h angesetzt werden, welche so beschaffen sind, daß x sowohl als $x + h$ in dem Intervall (α, β) liegen, in welchem $f(x)$ endlich ist und vollständige Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung einschließlich besitzt. Betrachtet man x als fest, so sagt man, die Formel gelte für die Stelle x; h darf dann innerhalb gewisser Grenzen variabel sein.

2) Die Formel darf für jedes n angesetzt werden, wenn nur die eben ausgesprochenen Bedingungen bis zu diesem Ord-

*) Liouville, Journ. de Mathém., Série II, t. III.

nungsexponenten erfüllt sind. Für $n = 1$ reduziert sich die Taylorsche Formel auf

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x+\theta h)}{1} h,$$

woraus

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h),$$

und dies ist der Ausdruck für den Mittelwertsatz (38, (2)).

3) Bei den meisten Anwendungen ist h eine Größe von sehr kleinem Betrage, ein nahe an Null liegender echter Bruch, dessen steigende Potenzen rasch abnehmend der Null sich nähern; zur näherungsweisen Berechnung von $f(x+h)$ aus $f(x)$ und den Differentialquotienten genügen dann wenige Glieder von (6). Insbesondere läßt sich erweisen, daß h dem Betrage nach derart eingeschränkt werden kann, daß das Verhältnis des Gliedes, bei welchem die Formel abbricht, zu dem darauffolgenden Restgliede dem absoluten Betrage nach eine beliebig große vorgeschriebene positive Zahl K überschreitet. In der Tat, soll

$$\left| \frac{\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} h^{n-1}}{\dfrac{f^{(n)}(x+\theta h)}{1 \cdot 2 \cdots n} h^n} \right| > K$$

sein, so braucht h nur so gewählt zu werden, daß

$$|h| < \frac{n}{K} \left| \frac{f^{(n-1)}(x)}{f^{(n)}(x+\theta h)} \right|$$

und dies ist sicher erreicht, wenn man

$$|h| < \frac{n}{GK} |f^{(n-1)}(x)|$$

nimmt, wobei G den größten Wert bezeichnet, welchen $|f^{(n)}(x+\theta h)|$ in dem Intervalle (α, β) erlangt.

92. Die Taylorsche Reihe. Die Funktion $f(x)$ sei nun solcher Art, daß sie in dem Intervalle (α, β) endlich bleibend vollständige Differentialquotienten *aller* Ordnungen besitzt. Die unendliche Reihe

$$f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots$$

hat dann vermöge der Gleichung (6) den Grenzwert

$$f(x+h) - \lim_{n \to +\infty} R_n,$$

d. h. sie hat nur dann einen bestimmten Grenzwert und ist somit konvergent, wenn $\lim\limits_{n=+\infty} R_n$ eine bestimmte Größe A bedeutet, und zwar ist ihr Grenzwert dann $f(x+h)-A$; er ist insbesondere $f(x+h)$ selbst, wenn $A=0$, d. h. wenn

$$\lim_{n=+\infty} R_n = 0. \tag{9}$$

Dann also ist

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1} h + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots, \tag{10}$$

die Function $f(x)$ also ebenso wie der Grenzwert einer nach x fortschreitenden Potenzreihe in die *Taylorsche Reihe* entwickelbar.

Die eindeutige Funktion $f(x+h)$ ist durch die Taylorsche Reihe

$$f(x+h) = \sum_0^\infty {}_n \frac{f^{(n)}(x)}{1 \cdot 2 \cdots n} h^n$$

darstellbar, wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(x, x+h)$ endlich bleibt, vollständige bestimmte Differentialquotienten jeder beliebigen Ordnung daselbst besitzt und wenn das Restglied R_n, in einer der unter (5), (7), (8) *angegebenen Formen geschrieben, für* lim $n=\infty$ *gegen die Grenze Null konvergiert.**)

Die Untersuchung des Restgliedes gestaltet sich am einfachsten bei Funktionen, für welche $f^{(n)}(z)$ bei *jedem n* eine endliche Größe, wenigstens in dem Intervalle $(x, x+h)$, bedeutet; denn alsdann hängt es laut (7) nur von dem Ausdruck

$$\frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

ab, ob R_n für lim $n=+\infty$ den Grenzwert Null hat; dieser Ausdruck konvergiert aber für *jedes endliche h* gegen die Grenze Null, somit auch R_n. Schreibt man nämlich das unendliche Produkt, in welches der Ausdruck bei dem Grenzübergange sich verwandelt, in der Form $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\ldots$, d. i.

$$\left(1-\frac{1-h}{1}\right)\left(1-\frac{2-h}{2}\right)\left(1-\frac{3-h}{3}\right)\cdots$$

---

*) Die angeführten Bedingungen reichen zur Gültigkeit des Ansatzes hin. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die also den ganzen Umfang der Funktionen kennzeichnen, welche eine solche Entwicklung gestatten, hat A. Pringsheim festgestellt. Vgl. Mathem. Annalen, Bd. 44 (1894).

so ist $a_n > 0$, sobald $n > h$, und die Reihe

$$\frac{n-h}{n} + \frac{n+1-h}{n+1} + \frac{n+2-h}{n+2} + \cdots$$

divergiert, weil

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots$$

divergent ist (73, 1)) und die Zähler überdies beständig wachsen infolgedessen divergiert auch das unendliche Produkt gegen die Grenze Null (78, 2)).

Die Gleichung (10) gestattet, die Änderung $f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$, welche die Funktion bei dem Übergange von der Stelle x zu der Stelle $x + h$ erfährt, in Form einer konvergenten Potenzreihe nach h auszudrücken:

$$\Delta f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} h^2 + \frac{f'''(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 + \cdots$$

und daher mit jedem gewünschten Grade der Annäherung zu berechnen; dieses Ziel wird um so rascher erreicht werden, je kleiner der Betrag von h ist. Unter der Voraussetzung eines sehr kleinen h sind die Produkte

$$f'(x)h, \qquad f''(x)h^2, \qquad f'''(x)h^3, \ldots$$

unter dem Namen des ersten, zweiten, dritten,... Differentials eingeführt und mit

$$df(x), \qquad d^2f(x), \qquad d^3f(x), \ldots$$

bezeichnet worden (42); für $\Delta f(x)$ ergibt sich dann die Darstellung:

$$\Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2f(x)}{1 \cdot 2} + \frac{d^3f(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots, \tag{11}$$

welche den Zusammenhang zwischen der wirklichen Änderung der Funktion und ihren mit h gebildeten Differentialen der verschiedenen Ordnungen nachweist; sie gibt auch den analytischen Ausdruck für den Fehler, der begangen wird, wenn man $\Delta f(x)$ durch $df(x)$ ersetzt.

Wenn $f(a+h)$ die Taylorsche Entwicklung zuläßt, so vertritt das Restglied

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

die Reihe

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(a) + \cdots;$$

entwickelt man $f^{(n)}(a + \theta h)$ wieder in die Taylorsche Reihe, wofür die hinreichenden Bedingungen vorhanden sind, und setzt beide Entwicklungen einander gleich, so entsteht die Gleichung:

$$\theta f^{(n+1)}(a) + \frac{\theta^2}{2!} f^{(n+2)}(a) h + \frac{\theta^3}{3!} f^{(n+3)}(a) h^2 + \cdots$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+1)(n+2)} h + \frac{f^{(n+3)}(a)}{(n+1)(n+2)(n+3)} h^2 + \cdots$$

welche zur Bestimmung von θ zu dienen hätte. Nimmt man θ, das von h (und a) abhängt, in der Form

$$\theta = \alpha + \beta h + \gamma h^2 + \cdots$$

an, so gibt die Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzen von h zu beiden Seiten der Gleichung:

$$\alpha = \frac{1}{n+1};$$

$$\beta f^{(n+1)}(a) + \frac{\alpha^2}{2} f^{(n+2)}(a) = \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+1)(n+2)},$$

woraus

$$\beta = \frac{n}{2(n+1)^2(n+2)} \frac{f^{(n+2)}(a)}{f^{(n+1)}(a)};$$

$$\gamma f^{(n+1)}(a) + \alpha\beta f^{(n+2)}(a) + \frac{\alpha^3}{6} f^{(n+3)}(a) = \frac{f^{(n+3)}(a)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

woraus

$$\gamma = \frac{n(5n+7) f^{(n+1)}(a) f^{(n+3)}(a) - 3n(n+3)\{f^{(n+2)}(a)\}^2}{6(n+1)^3(n+2)(n+3)\{f^{(n+1)}(a)\}^2}.$$

Hiernach ergibt sich für das θ des Mittelwertsatzes 38, d. i.

$$f(a+h) = f(a) + f'(a + \theta h) h,$$

da hier $n = 1$ ist, der Näherungswert

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{f'''(a)}{f''(a)} \frac{h}{24} + \frac{f''(a) f^{IV}(a) - \{f'''(a)\}^2}{\{f''(a)\}^2} \frac{h^2}{48}$$

also beispielweise für $f(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{3}$:

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{h}{24\sqrt{3}} - \frac{h^2}{36}.$$

93. Die Maclaurinsche Formel. Wenn das Intervall (α, β), in welchem die Funktion $f(x)$ die für die Taylorsche Formel (6) zureichenden Bedingungen erfüllt, auch den Wert $x = 0$ einschließt, so kann auch dieser zum Ausgangspunkte der Entwicklung gemacht werden; h als Variable betrachtet ist dann durch das Intervall (α, β) beschränkt und soll mit x bezeichnet werden. Mit diesen Veränderungen [$x = 0$ gesetzt und x für h geschrieben] nimmt die Formel (6) die Gestalt an:

$$(12)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}x^{n-1} + R_n,$$

während gleichzeitig aus (7) und (8)

$$(13)\qquad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{1\cdot 2\cdots n}x^n$$

$$(14)\qquad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}x^n$$

folgt. Die Gleichung (12) in Verbindung mit einer oder der andern der beiden letzten Gleichungen bezeichnet man als *Maclaurinsche Formel.* Ihr analytischer Inhalt fällt im Wesen mit jenem der Taylorschen überein.

Die Bedingungen des Ansatzes (12) fließen unmittelbar aus **91**, 1) und lauten dahin, daß 0 und x in jenem Intervall (α, β) gelegen sein müssen, in welchem $f(x)$ endlich bleibt und vollständige bestimmte Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung einschließlich besitzt.

94. Die Maclaurinsche Reihe. Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $(0, x)$ endlich ist und daselbst vollständige bestimmte Differentialquotienten aller Ordnungen besitzt, und wenn überdies das Restglied R_n mit wachsendem n der Grenze Null sich nähert, so gilt der Ansatz:

$$(15)\qquad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots,$$

welchen man als *Maclaurinsche Reihe* bezeichnet.

Im Hinblick auf die **89** festgestellte Tatsache kann der Satz ausgesprochen werden: *Wenn eine Funktion $f(x)$ in eine nach x fortschreitende Potenzreihe entwickelbar ist, so ist sie es nur auf eine Art und diese Entwicklung ist die Maclaurinsche.*

Dem Wesen nach lösen die Taylorsche und die Maclaurinsche Reihe die nämliche Aufgabe*): die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe; die erstere leistet dies an einer beliebigen Stelle des Intervalls (α, β), die letztere nimmt die Null zum Ausgangspunkte.

In den folgenden Artikeln werden wir uns mit der Entwicklung einiger elementaren Funktionen in Potenzreihen nach der Variablen x befassen und in diesen Reihen zunächst ein Hilfsmittel erhalten, die Werte dieser Funktionen für jeden zulässigen Wert der Variablen mit jedem gewünschten Grade der Genauigkeit zu berechnen.

95. Exponentialreihen. Die natürliche Potenz e^x ist eine Funktion, deren n-ter Differentialquotient für jedes $n = 1, 2, \cdots$ ihr selbst gleichkommt (41, 3)), mit ihr zugleich stetig bleibt für jeden endlichen Wert von x, und für $x = 0$ den Wert 1 annimmt. Da ferner das Restglied

$$(16) \qquad R_n = \frac{e^{\theta x}}{1 \cdot 2 \cdots n} x^n$$

bei jedem endlichen Werte von x mit wachsendem n gegen Null konvergiert (92), so gilt für jedes x der Ansatz:

$$(17) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots.$$

Setzt man $x = 1$, so ergibt sich eine unendliche Reihe zur Berechnung der Zahl e selbst (30), nämlich

$$(18) \qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots$$

Aus dieser Darstellung von e läßt sich die Stellung dieser Zahl im Bereiche der reellen Zahlen näher kennzeichnen. Zunächst ist e keine rationale Zahl; bricht man nämlich bei dem $(n + 1)$-ten Glied ab, so ist der Rest

---

*) Die nachmals zu einem Fundamentalsatz der Differentialrechnung gewordene Taylorsche Reihe findet sich zum erstenmal in Brook Taylor's *Methodus incrementorum directa et inversa*, London 1715. Der Fall $x = 0$ ist zuerst von Colin Maclaurin in dem Werke *Treatise of fluxions*, Edinburgh 1742 benutzt und später nach ihm benannt worden.

$$r_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n+2)} + \cdots$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right)$$
$$< \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot n},$$

also jedenfalls

$$r_n = \frac{\theta}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot n}; \qquad (0 < \theta < 1)$$

wäre nun $e = \frac{p}{q}$ ein irreduzibler rationaler Bruch, so folgte aus

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots q} + \frac{\theta}{1 \cdot 2 \cdots q \cdot q}$$

die weitere Gleichung

$$\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2} - \cdots - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots q} = \frac{\theta}{1 \cdot 2 \cdots q \cdot q},$$

deren linke Seite sich nach Multiplikation mit $1 \cdot 2 \cdots q$ in eine ganze Zahl verwandelte, während die in gleicher Weise abgeänderte rechte Seite $\frac{\theta}{q}$ weder Null, noch eine ganze Zahl sein kann. Dieser Widerspruch bezeugt die Unzulässigkeit der Annahme $e = \frac{p}{q}$. Es ist aber von Hermite auch gezeigt worden, daß es keine algebraische Gleichung irgend welchen Grades mit rationalen (also, wie man immer annehmen kann, ganzen) Koeffizienten gibt, welche durch die Zahl e befriedigt würde*); man nennt Zahlen dieser Eigenschaft *transzendente Zahlen*, zum Unterschiede von den *algebraischen Zahlen*, denen die eben der Zahl e abgesprochene Eigenschaft zukommt.

---

*) Früher schon hatte Liouville den Beweis hierfür in bezug auf eine quadratische Gleichung geführt wie folgt: gäbe es ganze Zahlen α, β, γ, für die

$$\alpha e^2 + \beta e + \gamma = 0,$$

also auch

$$\alpha e + \gamma e^{-1} + \beta = 0$$

wäre, so hätte man nach Einsetzung der für e und e^{-1} aus (17) und (16) gebildeten Werte:

$$\alpha\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} + \frac{e^{\theta}}{1 \cdot 2 \cdots n}\right)$$
$$+ \gamma\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} + \frac{(-1)^n e^{-\theta'}}{1 \cdot 2 \cdots n}\right) + \beta = 0;$$

Bringt man in der Gleichung (17) $x\,l\,a$ an die Stelle von x, unter a eine positive Zahl verstanden, so ergibt sich wegen $e^{x\,l\,a} = a^x$ die Entwickelung für die allgemeine Exponentialfunktion:

$$a^x = 1 + \frac{x\,l\,a}{1} + \frac{(x\,l\,a)^2}{1 \cdot 2} + \cdots, \tag{19}$$

welche ebenfalls für jeden Wert von x Geltung hat. Aus diesem Ansatze folgt

$$\frac{a^x - 1}{x} = l\,a + \frac{x(l\,a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^2(l\,a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots;$$

vermöge der Stetigkeit konvergiert die rechtsstehende Potenzreihe bei $\lim x = 0$ gegen den Grenzwert $l\,a$, somit ist

$$\lim_{x=0} \frac{a^x - 1}{x} = l\,a; \tag{20}$$

aus dieser Formel folgt mit der Substitution $x = \frac{1}{z}$:

$$\lim_{z=\infty} z\left(\sqrt[z]{a} - 1\right) = l\,a. \tag{21}$$

96. Trigonometrische Reihen. Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind ebenso wie ihre n-ten Differentialquotienten $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (41, (7), (8)) auf dem ganzen Gebiete der reellen Zahlen stetige Funktionen, deren Werte in dem Intervalle $(-1, +1)$ liegen; infolgedessen lassen sie sich (92) in Potenzreihen entwickeln, welche für jeden Wert von x Geltung haben.

$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ geht für $x = 0$ in $\sin n\frac{\pi}{2}$ über, und dies ist nur dreier verschiedenen Werte fähig, nämlich:

θ, θ' bedeuten positive echte Brüche. Multipliziert man diese Gleichung mit $1 \cdot 2 \cdots (n-1)$, so nimmt sie im wesentlichen die Gestalt

$$\frac{\alpha e^{\theta} + (-1)^n \gamma e^{-\theta'}}{n} = \mu$$

an, wobei μ eine *ganze Zahl* darstellt; α kann immer als positiv vorausgesetzt und n so gewählt werden, daß auch $(-1)^n\gamma$ positiv und die linke Seite ein beliebig kleiner positiver *echter Bruch* ist. Hierin liegt ein Widerspruch, der seinen Grund in der Annahme hat, es könnte $\alpha e^2 + \beta e + \gamma = 0$ sein.

$$\begin{array}{llll} \text{für} & n = 2p & \text{ist} & \sin n\frac{\pi}{2} = 0 \\ \text{„} & n = 4q+1 & \text{„} & \sin n\frac{\pi}{2} = +1 \\ \text{„} & n = 4q+3 & \text{„} & \sin n\frac{\pi}{2} = -1; \end{array}$$

infolgedessen ist

(22) $$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots.$$

Die Reihe ist für positive wie für negative Werte von x alternierend, daher (76)

$$|\sin x| < |x|, \quad |\sin x| > \left|x - \frac{x^3}{6}\right|, \quad |\sin x| < \left|x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right|, \ldots$$

Bricht man sie bei dem Gliede

$$(-1)^{p-1}\frac{x^{2p-1}}{1\cdot 2\cdots(2p-1)}$$

ab, so kann dem Restgliede die Form

$$R_{2p+1} = \frac{\sin\left[\theta x + (2p+1)\frac{\pi}{2}\right]}{1\cdot 2\cdots(2p+1)} x^{2p+1} = (-1)^p \frac{\cos\theta x}{1\cdot 2\cdots(2p+1)} x^{2p+1}$$

gegeben werden, weil $\sin\left(\alpha + \overline{2p+1}\,\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p\cos\alpha$.

$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ geht für $x = 0$ in $\cos n\frac{\pi}{2}$ über und dies ist wieder dreier verschiedenen Werte fähig, indem

$$\begin{array}{lll} \text{für} & n = 2p+1 & \cos n\frac{\pi}{2} = 0 \\ \text{„} & n = 4q & \cos n\frac{\pi}{2} = +1 \\ \text{„} & n = 4q+2 & \cos n\frac{\pi}{2} = -1 \end{array}$$

ist; demnach gilt

(23) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots.$$

Diese stets alternierende Reihe zeigt, daß

$$|\cos x| < 1, \quad |\cos x| > \left|1 - \frac{x^2}{2}\right|, \quad |\cos x| < \left|1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right|, \ldots;$$

bleibt man bei dem Gliede

$$(-1)^p \frac{x^{2p}}{1 \cdot 2 \cdots (2p)}$$

stehen, so kann das Restglied in der Form

$$R_{2p+2} = \frac{\cos[\theta x + (p+1)\pi]}{1 \cdot 2 \cdots (2p+2)} x^{2p+2} = (-1)^{p+1} \frac{\cos \theta x}{1 \cdot 2 \cdots (2p+2)} x^{2p+2}$$

geschrieben werden, weil $\cos(\alpha + \varkappa\pi) = (-1)^\varkappa \cos \alpha$.

97. Logarithmische Reihen. Die Funktion $l\,x$ selbst ist in eine nach x fortschreitende Potenzreihe nicht entwickelbar, weil sie für $x = 0$ unstetig wird. Wir legen uns daher die Funktion $f(x) = l(1+x)$ vor, welche für alle -1 überschreitenden Werte von x stetig bleibt wie auch ihr n-ter Differentialquotient, der sich aus **41**, (4) ergibt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(1+x)^n}.$$

Da $f(0) = 0$ und $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdots (n-1)$, so hat man

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{24}$$

für alle Werte von x, für welche das Restglied der bei $(-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ abgebrochenen Reihe, d. i.

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+\theta x)^n} \quad \text{oder} \quad = \frac{(-1)^{n-1}(1-\theta)^{n-1} x^n}{(1+\theta x)^n},$$

je nachdem man sich an die Form (13) oder (14) in **93** hält, mit wachsendem n gegen Null konvergiert.

Das Konvergenzintervall der Reihe (24) ist aus **84** bekannt; es ist durch -1 einerseits und $+1$ andererseits begrenzt und an seiner oberen Grenze findet noch bedingte Konvergenz statt; nur auf dieses Intervall braucht also die Untersuchung des Restgliedes erstreckt zu werden. Für $0 < x \leqq 1$ zeigt die erste Form

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n,$$

in welcher $\frac{x}{1+\theta x}$ sicher ein echter Bruch ist*), daß

*) Denn θ kann weder 0 noch 1 sein.

$\lim\limits_{n=+\infty} R_n = 0$. Bei negativem x, sobald dessen absoluter Wert $\frac{1}{1+\theta}$ überschreitet, versagt die Formel. Schreibt man dann die zweite Formel, $-|x|$ für x setzend, in der Gestalt

$$-\frac{|x|}{1-\theta}\left(\frac{|x|-\theta |x|}{1-\theta |x|}\right)^n,$$

so zeigt sich, da für $|x|<1$ der eingeklammerte Bruch wieder echt ist, daß auch jetzt $\lim\limits_{n=+\infty} R_n = 0$.

Die Gleichung (24) besteht also zurecht, solange

$$-1 < x \leqq +1$$

und gibt auch an der oberen Grenze den entsprechenden Wert der Funktion (86), nämlich

$$l\,2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots.$$

Für positive x ist die Reihe in (24) alternierend und hat für negative Werte durchwegs negative Glieder; vermöge ihres Geltungsbereiches läßt sie die Berechnung der natürlichen Logarithmen aller Zahlen aus dem Intervall $(0, 2)$ zu.

Um zu einer Reihe zu gelangen, welche die Berechnung der Logarithmen aller Zahlen gestattet, verbinde man die beiden Gleichungen

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots$$

durch Subtraktion; dadurch entsteht (71, 2)):

$$l\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right],$$

und hier kann $\frac{1+x}{1-x}$ bei $0 < x < 1$ jede noch so große die Einheit übertreffende Zahl, bei $-1 < x < 0$ jeden positiven echten Bruch vorstellen. Setzt man

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{a+z}{a} \qquad (a > 0),$$

so wird

$$x = \frac{z}{2a+z}$$

und die letzte Gleichung gibt

$$(25)\quad l(a+z)=l\,a+2\left[\frac{z}{2a+z}+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{z}{2a+z}\right)^5+\cdots\right],$$

insbesondere für $z=1$

$$(26)\quad l(a+1)=l\,a+2\left[\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{3(2a+1)^3}+\frac{1}{5(2a+1)^5}+\cdots\right].$$

Formel (25) gestattet mit Hilfe von $l\,a$ den Logarithmus jeder anderen Zahl zu berechnen; (26) ist geeignet, die natürlichen Logarithmen der aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen zu bestimmen; insbesondere gibt sie für $a=1$

$$l\,2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\right),$$

eine Reihe, die viel rascher konvergiert als die oben für $l\,2$ angegebene alternierende Reihe. Bei wirklicher Ausrechnung einer Logarithmentafel würde man selbstverständlich nur die Logarithmen der Primzahlen direkt bestimmen und aus ihnen durch Addition die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen ableiten.

Um aus den natürlichen Logarithmen die gemeinen zu gewinnen, bedarf es der Multiplikation der ersteren mit dem Modul $M=\frac{1}{l\,10}$ (30). Für $l\,10$ ergibt sich auf folgende Weise eine Bestimmung durch unendliche Reihen. Setzt man in (25)

$$a=2^{10}=1024,\quad z=-24,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf die für $l\,2$ soeben gefundene Reihe die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} l\,10=\frac{20}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\right) \\ \quad -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{253}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{253}\right)^5+\cdots\right)\end{array}\right\}=\frac{20}{3}A-\frac{2}{3}B,$$

in welcher die zweite Reihe so rasch konvergiert, daß verhältnismäßig nur sehr wenige Glieder zur Erzielung einer vorgegebenen Annäherung erforderlich sind. Bei einer auf 6 Dezimalen angelegten Rechnung hätte man:

$$\frac{1}{3} \quad = 0{,}333\,333\,333$$
$$\frac{1}{3\cdot 3^3} = 0{,}012\,345\,679$$
$$\frac{1}{5\cdot 3^5} = 0{,}000\,823\,045$$
$$\frac{1}{7\cdot 3^7} = 0{,}000\,065\,321$$
$$\frac{1}{9\cdot 3^9} = 0{,}000\,005\,645$$
$$\frac{1}{11\cdot 3^{11}} = 0{,}000\,000\,513$$
$$\frac{1}{13\cdot 3^{13}} = 0{,}000\,000\,048$$
$$\frac{1}{15\cdot 3^{15}} = 0{,}000\,000\,004$$
$$A = 0{,}346\,573\,588$$
$$\frac{20}{3}A = 2{,}310\,490\,586$$

$$\frac{3}{253} \quad = 0{,}011\,857\,707$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3 = 0{,}000\,000\,555$$
$$B = 0{,}011\,858\,262$$
$$\frac{2}{3}B = 0{,}007\,905\,508$$

Da A um weniger als 8 Einheiten der neunten Stelle zu klein*), so ist $\frac{20}{3}A$ um weniger als 54 Einheiten der neunten Stelle zu klein; B ist um weniger als 2 Einheiten der neunten Stelle zu klein, daher auch $\frac{2}{3}B$; folglich ist

$$\frac{20}{3}A - \frac{2}{3}B = 2{,}302\,585\,078$$

dem strengen Betrage gegenüber um weniger als 52 Einheiten der niedrigsten Stelle zu klein, der strenge Wert kann also nicht größer sein als

$$2{,}302\,585\,130,$$

aber auch nicht kleiner als die erstgefundene Zahl, so daß mit Sicherheit

$$l\,10 = 2{,}302\,585\ldots$$

98. Die Binomialreihe. Schließt man in der Funktion

$$F(z) = (a + z)^m$$

*) Als Summe von 8 bei der neunten Stelle *abgebrochenen* Dezimalbrüchen.

den Fall, daß m eine *positive ganze Zahl* sei, aus und setzt a sowohl als $a + z$ positiv voraus, so ist $F(z)$ bei jedem reellen Werte von m reell und läßt sich als Produkt der reellen Faktoren

$$a^m \cdot \left(1 + \frac{z}{a}\right)^m$$

darstellen, wovon nur der zweite veränderlich ist. Wird $\frac{z}{a} = x$ gesetzt, so handelt es sich also um die Entwicklung von

$$f(x) = (1 + x)^m.$$

Laut **41**, (2) ist

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

daher

$$f(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1);$$

hiermit liefert die Maclaurinsche Reihe die Entwicklung:

$$(27) \quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots,$$

welche man als *Binomialreihe* bezeichnet. Es erübrigt noch, den Geltungsbereich dieses Ansatzes festzustellen.

Zunächst ist das Konvergenzintervall der Reihe zu bestimmen; schreibt man sie in der allgemeinen Form $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, so ist

$$a_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}, \qquad a_{n+1} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots(n+1)},$$

infolgedessen

$$\lim_{n=+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n=+\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = 1,$$

daher $(-1, +1)$ das Konvergenzintervall (**84**). Nur auf dieses braucht die Untersuchung des Restgliedes beschränkt zu werden, das sich in den Formen:

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}(1+\theta x)^{m-n}x^n,$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}x^n$$

darstellen läßt.

I. Ist $|x| < 1$, so zerlege man das Restglied in seiner zweiten Form in die Faktoren

$$(1+\theta x)^{m-1}, \quad \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}, \quad p_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}x^n;$$

der erste hängt von n nicht ab und hat einen endlichen Wert; der zweite konvergiert gegen die Grenze Null, weil, gleichgültig, ob x positiv oder negativ, $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ ein echter Bruch ist; es bleibt also noch zu untersuchen, wie sich der Faktor p_n bei beständig wachsendem n verhält. Erhöht man in diesem Faktor n um eine Einheit, so wird

$$p_{n+1} = \frac{m-n}{n} x p_n,$$

also ist

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{m-n}{n} x;$$

mit wachsendem n nähert sich die rechte Seite der Grenze $-x$; folglich muß sich zu einer positiven Zahl q, welche der Bedingung $|x| < q < 1$ genügt, ein Zeigerwert ν bestimmen lassen derart, daß $\left|\frac{p_{n+1}}{p_n}\right| < q$, solange $n > \nu$; infolgedessen ist also

$$\begin{aligned}
|p_{\nu+1}| &< |p_\nu| q\\
|p_{\nu+2}| &< |p_{\nu+1}| q < |p_\nu| q^2\\
|p_{\nu+3}| &< |p_{\nu+2}| q < |p_\nu| q^3,\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

die Reihe

$$|p_{\nu+1}| + |p_{\nu+2}| + |p_{\nu+3}| + \cdots$$

daher konvergent, weil ihre Glieder kleiner sind als die aufeinanderfolgenden Glieder einer konvergenten geometrischen Reihe; daraus folgt

$$\lim_{n=+\infty} p_n = 0.$$

Daher ist auch $\lim\limits_{n=+\infty} R_n = 0$ und der Ansatz (27) bei jedem m gültig, solange $|x| < 1$.

II. Für $x = +1$ zerlege man das Restglied in seiner ersten Form in die Faktoren

$$(1+\theta)^m, \quad \frac{1}{(1+\theta)^n} \quad \Pi_n = (-1)^n \cdot \frac{-m}{1} \cdot \frac{-m+1}{2} \cdots \frac{-m+n-1}{n};$$

der erste hängt von n nicht ab und hat einen endlichen Wert; der zweite konvergiert mit wachsendem n gegen die Grenze Null; der dritte verwandelt sich, von dem das Vorzeichen bestimmenden Faktor $(-1)^n$ abgesehen, für $\lim n = +\infty$ in das unendliche Produkt

$$\left(1 - \frac{m+1}{1}\right)\left(1 - \frac{m+1}{2}\right)\left(1 - \frac{m+1}{3}\right)\cdots,$$

welches (79, 2)) gegen die Grenze Null divergiert, wenn

(28) $$m + 1 > 0, \quad \text{also} \quad m > -1$$

ist, während es gegen die Grenze $+\infty$ divergieren würde, sobald $m + 1$ negativ wäre; *nur in dem ersteren Falle* ist

$$\lim_{n=+\infty} R_n = 0$$

und die Reihe

(29) $$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

nicht allein als konvergent, sondern auch 2^m als ihr Grenzwert erwiesen.

III. Für $x = -1$ zerfällt das Restglied in seiner zweiten Form in die Faktoren

$$m(1-\theta)^{m-1}, \quad \Pi'_{n-1} = (-1)^{2n-1} \frac{-m+1}{1} \cdot \frac{-m+2}{2} \cdots \frac{-m+n-1}{n-1};$$

der erste hat einen endlichen Wert, der zweite geht, vom Vorzeichen abgesehen, für $\lim n = +\infty$ in das unendliche Produkt

$$\left(1 - \frac{m}{1}\right)\left(1 - \frac{m}{2}\right)\left(1 - \frac{m}{3}\right)\cdots$$

über, das gegen die Grenze Null divergiert, wenn

(30) $$m > 0,$$

hingegen $+\infty$ wird, wenn m negativ ist; *nur in dem ersten Falle* ist

$$\lim_{n=+\infty} R_n = 0$$

und die Reihe

(31) $$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

nicht allein als konvergent, sondern auch 0 als ihr Grenzwert erwiesen.

Das Gesamtergebnis der Untersuchung läßt sich in folgendem zusammenfassen: *Die Binomialreihe*

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots$$

ist für $|x| < 1$ *bei jedem* m *konvergent und* $(1+x)^m$ *ihr Grenzwert; für* $x = 1$ *konvergiert sie nur, wenn* m *dem Intervall* $(-1, +\infty)$ *angehört, und* 2^m *ist ihr Grenzwert; für* $x = -1$ *konvergiert sie nur, wenn* m *dem Intervall* $(0, +\infty)$ *entnommen ist und hat den Grenzwert* 0.

Von der Binomialreihe wird im praktischen Rechnen bei der Ausziehung von Wurzeln Gebrauch gemacht. Um $\sqrt[p]{A}$ zu berechnen, bestimme man die der Zahl A zunächstliegende p-te Potenz a^p, so daß $A = a^p \pm \alpha$ und $\alpha < a^p$; dann ist

$$\sqrt[p]{A} = a\sqrt[p]{1 \pm \frac{\alpha}{a^p}}$$

$$= a\left[1 \pm \frac{1}{p}\frac{\alpha}{a^p} - \frac{p-1}{1 \cdot 2p^2}\left(\frac{\alpha}{a^p}\right)^2 \pm \frac{(p-1)(2p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3p^3}\left(\frac{\alpha}{a^p}\right)^3 - \cdots\right];$$

je kleiner $\frac{\alpha}{a^p}$, um so rascher konvergiert die Reihe. Um die Konvergenz zu verstärken, kann man $\sqrt[p]{A}$ in $\frac{1}{k}\sqrt[p]{k^p A}$ umgestalten und dann die Entwicklung für $\sqrt[p]{k^p A}$ vornehmen.

Für $\sqrt{2}$ ergäbe sich aus (29), wenn man $m = \frac{1}{2}$ setzt, unmittelbar die Reihe

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \cdots,$$

welche jedoch wegen ihrer langsamen Konvergenz zur wirklichen Ausrechnung nicht gut geeignet ist; dagegen ist

$$\sqrt{2} = \frac{1}{5}\sqrt{50} = \frac{1}{5}\sqrt{7^2 + 1}$$

$$= \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49} - \frac{1}{2 \cdot 4}\,\frac{1}{49^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{1}{49^3} - \cdots\right)$$

$$1 = 1{,}000\,000\,000$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49} = 0{,}010\,204\,080$$
$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{1}{49^3} = 0{,}000\,000\,531$$
$$1{,}010\,204\,611$$

$$\frac{1}{2 \cdot 4}\,\frac{1}{49^2} = 0{,}000\,052\,061$$
$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\,\frac{1}{49^4} = 0{,}000\,000\,006$$
$$0{,}000\,052\,067$$

Die Differenz der beiden Summen mit $\frac{7}{5}$ multipliziert gibt die Zahl 1,414 213 556, deren letzte Stelle um weniger als zwei Einheiten zu klein ist, so daß $\sqrt{2}$ notwendig zwischen 1,414 213 556 und 1,414 213 558 liegt; auf acht Stellen *abgekürzt* ist also

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,56.$$

99. Zyklometrische Reihen. 1) Die Funktion

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$

und ihr n-ter Differentialquotient (**41**, (10))

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right)$$

sind auf dem ganzen Gebiete der reellen Zahlen stetig und insbesondere ist (**33**; 3))

$$f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \ldots (n-1)}{2i} \left(\frac{1}{(-i)^n} - \frac{1}{i^n}\right),$$

daher

$$f^{(2p)}(0) = 0,$$

$$f^{(4q+1)}(0) = \frac{1 \cdot 2 \ldots (4q)}{2i} \cdot \frac{-2}{i} = 1 \cdot 2 \ldots (4q)$$

$$f^{(4q+3)}(0) = \frac{1 \cdot 2 \ldots (4q+2)}{2i} \cdot \frac{2}{i} = -1 \cdot 2 \ldots (4q+2).$$

Setzt man die aus diesen allgemeinen Formeln für $f'(0)$, $f''(0), \ldots$ sich ergebenden Werte in die Maclaurinsche Reihe ein, so ergibt sich:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \tag{32}$$

vorbehaltlich der erst zu erweisenden Konvergenz des Restgliedes gegen die Grenze Null. Dieses Restglied hat zufolge **93**, (13) den allgemeinen Ausdruck:

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{2ni} \left(\frac{1}{(\theta x - i)^n} - \frac{1}{(\theta x + i)^n}\right);$$

trennt man in $\frac{1}{(\theta x - i)^n}$ das Reelle von dem Imaginären, so sei

$$\frac{1}{(\theta x - i)^n} = u + vi,$$

dann ist notwendig

$$\frac{1}{(\theta x + i)^n} = u - v i$$

und hiermit

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} v;$$

der gemeinsame absolute Wert von $\theta x - i$ und $\theta x + i$ ist $\left|\sqrt{\theta^2 x^2 + 1}\right|$, daher der gemeinsame absolute Wert von $u + vi$ und $u - vi$ einerseits gleich $\frac{1}{\left(\left|\sqrt{\theta^2 x^2 + 1}\right|\right)^n}$, andererseits gleich $\left|\sqrt{u^2 + v^2}\right|$, woraus folgt, daß

$$|v| < \frac{1}{\left(\left|\sqrt{\theta^2 x^2 + 1}\right|\right)^n}$$

und

$$|R_n| \leqq \frac{1}{n}\left(\left|\sqrt{\frac{x^2}{\theta^2 x^2 + 1}}\right|\right)^n.$$

Ist nun $x^2 < 1$, so ist der Bruch $\frac{x^2}{\theta^2 x^2 + 1}$ echt und konvergiert die rechtsstehende Größe mit beständig wachsendem n gegen den Grenzwert Null; daher ist auch

$$\lim_{n = +\infty} R_n = 0.$$

Für $x^2 > 1$ ist die Untersuchung überflüssig, weil dann die Reihe in (32) aufhört konvergent zu sein.

Der Bereich, auf welchem der Ansatz (32) Geltung hat, ist also durch

$$-1 \leqq x \leqq +1 \tag{33}$$

gekennzeichnet.

Für $x = 1$ ergibt sich die von Leibniz gefundene Reihe*)

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots, \tag{34}$$

welche jedoch zur wirklichen Berechnung eines genaueren Näherungswertes von π wegen ihrer außerordentlich langsamen Konvergenz nicht geeignet ist. Für diesen Zweck empfiehlt

*) 1673 gefunden und in den *Acta eruditorum* für 1682 veröffentlicht.

sich das folgende von John Machin angegebene Verfahren.*) Es sei α ein Bogen, dessen Tangens ein kleiner rationaler echter Bruch a ist; dann ergeben sich für

$$\operatorname{tg} 2\alpha, \quad \operatorname{tg} 3\alpha, \ldots \operatorname{tg} n\alpha$$

nach bekannten trigonometrischen Formeln ebenfalls rationale Brüche; man schreite in der Bildung derselben so weit vor, bis man der Einheit von der einen oder anderen Seite möglichst nahe kommt; sei beispielsweise

$$\operatorname{tg} n\alpha = b > 1,$$

dann ist $n\alpha > \frac{\pi}{4}$,

$$\operatorname{tg}\left(n\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} n\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} n\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{b-1}{1+b} = c$$

ebenfalls eine rationale Zahl und

$$\frac{\pi}{4} = n\alpha - \operatorname{arc\,tg} c = n \operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} c,$$

d. h. auf Grund von (32)

$$\frac{\pi}{4} = n\left(\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \cdots\right) - \left(\frac{c}{1} - \frac{c^3}{3} + \frac{c^5}{5} - \cdots\right).$$

Mit $a = \frac{1}{5}$ erhält man

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119} = b > 1,$$

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \cdots\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right);$$

*) 1706 in Jone's *Synopsis palmariorum mathescos* mit einem auf 100 Dezimalen berechneten Näherungswert von π mitgeteilt; der Buchstabe π findet hier zum erstenmal Anwendung in diesem Sinne; allgemeinen Eingang verschaffte ihm erst Euler. Die Berechnung von π ist später bis zu 707 Dezimalen geführt worden.

die erste Reihe kann mittels folgender Bemerkung durch rascher konvergierende Reihen ersetzt werden; aus

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{10}$$

folgt

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{20}{99} > a,$$

daher ist

$$\operatorname{tg}(2\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{20}{99} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{20}{99} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{515}$$

$$\alpha = 2\alpha' - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{515} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{10} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{515},$$

so daß also

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = 8\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3 \cdot 10^3} + \frac{1}{5 \cdot 10^5} - \cdots\right) & \\ - 4\left(\frac{1}{515} - \frac{1}{3 \cdot 515^3} + \frac{1}{5 \cdot 515^5} - \cdots\right) & \\ - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right) & \\ = 8A - 4B - C. & \end{aligned}$$

Diese Formel gibt schon bei geringer Rechnung eine Bestimmung für π, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

$\frac{1}{10} =$	0,100 000 000	$\frac{1}{515} =$	0,001 941 747
$\frac{1}{5 \cdot 10^5} =$	0,000 002 000	$-\frac{1}{3 \cdot 515^3} =$	− 0,000 000 002
$-\frac{1}{3 \cdot 10^3} =$	− 0,000 333 333	$B =$	0,001 941 745
$-\frac{1}{7 \cdot 10^7} =$	− 0,000 000 014	$\frac{1}{239} =$	0,004 184 100
$A =$	0,099 668 653	$-\frac{1}{3 \cdot 239^3} =$	− 0,000 000 024
		$C =$	0,004 184 076

$$8A - 4B - C = 0{,}785\,398\,160.$$

A ist um weniger als 2 Einheiten der niedrigsten Stelle zu groß, B und ebenso C um weniger als eine Einheit zu groß

oder zu klein; daher $8A - 4B - C$ um weniger als 21 Einheiten und das 4fache davon um weniger als 84 Einheiten zu groß, so daß π zwischen 3,141592672 und ...588 liegt; auf 6 Stellen ist daher

$$\pi = 3{,}141\,592.$$

Der Beweis, daß die Zahl π ebenso wie die Zahl e eine transzendente Zahl ist (95), gelang erst in jüngster Zeit (Lindemann).*) Damit war auch dargetan, daß die Aufgabe der Verwandlung eines Kreises in ein gleich großes Quadrat, *die Quadratur des Zirkels*, mit Lineal und Zirkel nicht gelöst werden könne.

2) Zur Entwicklung der Funktion

$$f(x) = \arcsin x$$

bedienen wir uns eines Verfahrens, von welchem auch in andern Fällen mit Erfolg Gebrauch gemacht werden kann.

Wenn eine Entwicklung existiert, so hat sie die Form:

$$\arcsin x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

weil $\arcsin 0 = 0$ ist (33, 1)), und weiter gilt (88):

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1\,a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots;$$

beide Reihen haben denselben Konvergenzbereich; andererseits ist auf Grund von 98 für $x^2 < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 1\cdot 6}x^6 + \cdots;$$

die beiden letzten Gleichungen haben zur notwendigen Folge (89):

$$a_{2n} = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$1\,a_1 = 1,\; 3\,a_3 = \frac{1}{2},\; 5\,a_5 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \cdots (2n+1)\,a_{2n+1} = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)},$$

woraus

$$a_1 = \frac{1}{1},\; a_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},\; a_5 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}, \ldots a_{2n+1} = \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\,\frac{1}{2n+1}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die supponierte Reihe ergibt sich die Gleichung:

$$(35) \qquad \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots,$$

*) Mathematische Annalen, 20. Bd. (1882).

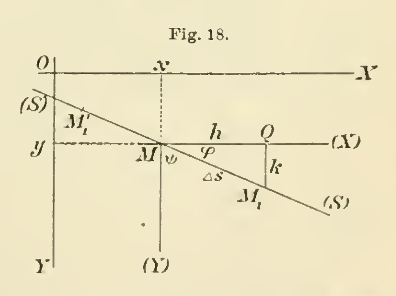
welche gleichfalls Geltung hat, solange $-1 < x < +1$; sie gilt auch noch für $x = -1$ und $x = +1$, weil sie auch für diese Werte konvergiert. Auch sie kann zur Berechnung von π verwendet werden (mit $x = \frac{1}{2}$ z. B. gibt sie für $\frac{\pi}{6}$, mit $x = 1$ für $\frac{\pi}{2}$ eine konvergente Reihe), ist aber hierzu weniger geeignet als (32).

100. Die Formeln von Taylor und Maclaurin für Funktionen mehrerer Variablen. Zum Schlusse dieses Paragraphen möge die Aufgabe, welche die Taylorsche Formel für Funktionen einer Variablen löst, für Funktionen mehrerer Variablen gestellt und gelöst werden: Ist nämlich $f(x, y, \ldots)$ eine Funktion mehrerer unabhängigen Variablen, so soll $f(x+h, y+k, \ldots)$ in eine nach positiven Potenzen und Produkten solcher Potenzen von $h, k, \ldots$ fortschreitende Reihe entwickelt werden, falls eine solche Entwicklung überhaupt möglich ist.

Es genügt, die Untersuchung für eine Funktion zweier Variablen, $f(x, y)$, zu führen, weil die Ausdehnung auf mehr als zwei Variable aus dem Gange derselben unmittelbar sich ergibt.

Der Wertverbindung x/y, von welcher ausgegangen wird und die dem Gebiete P angehören muß, auf welchem die Funktion gegeben ist, entspreche der Punkt M (Fig. 18), der Wertverbindung $x+h/y+k$ der Punkt M_1; verfolgt man die Funktion längs der Geraden $M(S)$, welche M und M_1 verbindet, so verhält sie sich wie eine Funktion einer Variablen. Sind nämlich φ, ψ die Richtungswinkel von $M(S)$ (47); s der von einem festen Punkte

Fig. 18.



M_1' mit den Koordinaten x_0/y_0 gemessene Abstand $M_1'M$, welcher positiv oder negativ gezählt wird, je nachdem $M_1'M$ die Richtung $M_1'(S)$ oder die entgegengesetzte Richtung hat; $\Delta s = MM_1$; so ist

$$(36) \qquad \begin{cases} x = x_0 + s \cos \varphi & h = \varDelta s \cos \varphi \\ y = y_0 + s \cos \psi & k = \varDelta s \cos \psi \end{cases}$$

und

$$(37) \qquad \begin{cases} f(x, y) = f(x_0 + s \cos \varphi, y_0 + s \cos \psi) = F(s) \\ f(x+h, y+k) = f(x_0 + (s + \varDelta s) \cos \varphi, y_0 + (s + \varDelta s) \cos \psi) \\ \qquad = F(s + \varDelta s). \end{cases}$$

Ist nun $F(s)$ in einem Intervalle, das die Werte s und $s + \varDelta s$ einschließt, eindeutig und endlich, und besitzt es daselbst vollständige bestimmte Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung einschließlich, so gilt nach **91**, (6) und (7), der Ansatz:

$$(38) \qquad \begin{cases} F(s + \varDelta s) = F(s) + \frac{F'(s)}{1} \varDelta s + \frac{F''(s)}{1 \cdot 2} \varDelta s^2 + \cdots \\ \quad + \frac{F^{(n-1)}(s)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \varDelta s^{n-1} + \frac{F^{(n)}(s + \theta \varDelta s)}{1 \cdot 2 \ldots n} \varDelta s^n \\ \qquad 0 < \theta < 1. \end{cases}$$

$F'(s), F''(s), \ldots$ sind aber die aufeinanderfolgenden totalen Differentialquotienten der Funktion $f(x, y)$ in der Richtung (S); für dieselben wurden in **47**, **54** in einer dort erklärten symbolischen Schreibweise die Ausdrücke gefunden:

$$F'(s) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \cos \psi\right) f(x, y)$$

$$F''(s) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \cos \psi\right)^2 f(x, y)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n-1)}(s) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \cos \psi\right)^{n-1} f(x, y);$$

daraus folgt nach Multiplikation mit $\varDelta s, \varDelta s^2, \ldots \varDelta s^{n-1}$ unter Rücksichtnahme auf (36):

$$(39) \qquad \begin{cases} F'(s) \varDelta s = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right) f(x, y) \\ F''(s) \varDelta s^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^2 f(x, y) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{(n-1)}(s) \varDelta s^{n-1} = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{n-1} f(x, y); \end{cases}$$

da schließlich vermöge (37) und (36)

$$F(s + \theta \varDelta s) = f[x_0 + (s + \theta \varDelta s) \cos \varphi, \; y_0 + (s + \theta \varDelta s) \cos \psi]$$
$$= f(x + \theta h, \; y + \theta k),$$

so ist

$$F^{(n)}(s + \theta \varDelta s) \varDelta s^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^n f(x + \theta h, y + \theta k). \tag{40}$$

Trägt man die Werte aus (37), (39) und (40) in (38) ein, so ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \frac{1}{1}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right) f(x, y) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^2 f(x, y) + \cdots \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^{n-1} f(x, y) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^n f(x + \theta h, y + \theta k). \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Dies ist die *Taylorsche Formel* für die Funktion $f(x, y)$. Zureichende Bedingungen für ihre Gültigkeit bestehen darin, daß die Funktion $f(x, y)$ in einem Intervalle auf $M_1'(S)$, das die Wertverbindungen x/y und $x + h/y + k$ einschließt, eindeutig und endlich ist, und daß alle partiellen Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung einschließlich in dem genannten Intervall vorhanden, die der letztgenannten Ordnung auch stetig sind.

Gehört die Stelle $x = 0/y = 0$ dem Gebiete P an, auf welchem die Funktion $f(x, y)$ gegeben ist, so kann sie zum Ausgangspunkte der Entwicklung genommen werden; ersetzt man dann h, k, um sie als variable Größen zu kennzeichnen, durch x, y, so geht die Formel (41) über in:

$$\left\{\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \frac{1}{1}\left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y\right) f(0, 0) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y\right)^2 f(0, 0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}\left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y\right)^{n-1} f(0, 0) \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}\left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y\right)^n f(\theta x, \theta y), \end{aligned}\right. \tag{42}$$

die *Maclaurinsche Formel* für $f(x, y)$.

Um keinen Zweifel über die Bedeutung der Glieder in (41) und (42) zu lassen, sei bemerkt, daß beispielsweise

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right)^2 f(x, y)$$

den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

vorstellt, die Differentialquotienten sämtlich an der Stelle x/y genommen,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y\right)^2 f(0, 0)$$

den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2,$$

die Differentialquotienten sämtlich an der Stelle $0/0$ genommen, usw.

Die Bedingungen für die Ausdehnung der Formeln (41) und (42) zu unendlichen Reihen brauchen nach den Ausführungen in **92** und **94** nicht besonders angeführt zu werden.

§ 4. Die elementaren Funktionen einer komplexen Variablen.

101. Begriff der Funktion einer komplexen Variablen. Unter der komplexen Variablen z versteht man das Aggregat $x + yi$, worin x und y reelle stetige Variablen bedeuten. Da beide als voneinander unabhängig aufgefaßt werden, so ist die Menge der Werte von z durch ∞^2 zu bezeichnen. Zum Nullwerden von z ist $x = 0$, $y = 0$ erforderlich; dagegen wird z unendlich, auch wenn nur eine der Variablen x, y unendlich wird.

Stellt man die Wertverbindung x/y durch einen Punkt im rechtwinkligen Koordinatensystem $O(XY)$ dar, so kann dieser auch als Darstellung der komplexen Variablen z angesehen werden; in diesem Sinne soll die Ebene $O(XY)$ als z-Ebene bezeichnet werden. Der Bereich P, welcher der Verbindung x/y zugewiesen wird, ist zugleich der Bereich von z.

Führt man mit z und etwaigen, reellen oder komplexen, Konstanten einen bestimmten (algebraischen) Rechnungsprozeß aus, so ist das Resultat w desselben, eine Funktion von z, darstellbar in der Form einer komplexen Größe $u + vi$, worin u, v *reelle* Funktionen von x, y bedeuten; wir schreiben dies in der Form an:

$$w = f(z) = u + vi.$$

Aber nicht jeder aus zwei Funktionen u, v von x, y gebildete Ausdruck $u + vi$ soll als Funktion von $x + yi$ gelten;

vielmehr soll dies nur unter einer sogleich zu entwickelnden Bedingung stattfinden. Vorher sei noch bemerkt, daß die Stetigkeit von $f(z)$ in derselben Weise erklärt wird wie bei einer Funktion einer rellen Variablen, wobei man den absoluten Wert einer komplexen Zahl in dem in 6 angegebenen Sinne zu verstehen hat. Insbesondere ist leicht zu zeigen, daß $f(z)$ stetig ist, sobald es u und v sind, was wir für den ganzen Bereich P voraussetzen wollen. Überdies nehmen wir an, daß u, v daselbst auch stetige partielle Differentialquotienten nach x und y besitzen.

Als Funktion von x, y aufgefaßt, hat $f(z) = u + vi$ unter den gemachten Voraussetzungen in der durch die Winkel φ, ψ gekennzeichneten Richtung den totalen Differentialquotienten (47):

$$\frac{dw}{ds} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\psi;$$

in bezug auf z also, weil $dz = ds\,(\cos\varphi + i\cos\psi)$, den Differentialquotienten:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\psi}{\cos\varphi + i\cos\psi};$$

soll dieser *unabhängig* sein *von der Richtung*, nach welcher man sich in der z-Ebene von dem Punkte x/y aus bewegt, mit andern Worten: soll $f(z)$ als Funktion von z an der betrachteten Stelle geradeso wie eine Funktion einer reellen Variablen nur *einen* bestimmten Differentialquotienten haben, so muß:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}}{i}$$

sein; denn alsdann ist

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \text{ oder } = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

frei von φ, ψ; die obige Bedingung führt aber zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Eine stetige Funktion $w = u + vi$, in welcher u, v den Bedingungen (2) entsprechen, heißt eine *analytische Funktion*, und nur eine solche wird als *eine Funktion der komplexen Variablen* $x + yi$ betrachtet. Die Gleichungen (2) heißen die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.*

Besitzen die Funktionen u, v auch stetige Differentialquotienten zweiter Ordnung*), so folgt aus (2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

und hieraus nach **52**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

und eine analoge Gleichung ergibt sich für v. Diese Gleichung, die *Laplacesche Differentialgleichung* genannt, ist grundlegend für die Theorie der analytischen Funktionen. Man nennt Funktionen, die ihr genügen, *harmonische* Funktionen, und ein Funktionenpaar, das den Gleichungen (2) genügt, bezeichnet man als ein Paar *konjugierter* Funktionen; ein solches ist also zur Bildung einer analytischen Funktion geeignet.

Wie aus (1) zu ersehen, ist der absolute Wert von $\frac{dw}{dz}$ durch die positive Wurzel aus $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ oder aus $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ ausdrückbar, daher ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

eine Beziehung, die auch unmittelbar aus (2) zu erschließen ist.

102. Konforme Abbildung. Faßt man auch u/v als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes in einer zweiten Ebene, der „w-Ebene" auf, so ist durch

$$w = f(x + yi) = u + vi$$

*) Eine weitere Ausführung dieser Theorie zeigt, daß dies eine notwendige Folge der Existenz und Stetigkeit der ersten Differentialquotienten ist.

eine Zuordnung der Punkte der beiden Ebenen, der z-Ebene und der w-Ebene, vermittelt oder eine *Abbildung* der z-Ebene auf die w-Ebene bestimmt. Beschreibt der Punkt x/y im Gebiete P eine Linie, so beschreibt infolge der Stetigkeit von f auch der Punkt u/v eine Linie in seiner Ebene. Es soll nun untersucht werden, von welcher Art diese Abbildung bei einer analytischen Funktion ist.

Zu diesem Zwecke gehen wir von dem Differential der Funktion $f(z)$ aus, das den Ausdruck hat:

$$dw = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)(dx + i\,dy).$$

Bewegt man den Punkt $M(x/y)$ bei festbleibendem y um die sehr kleine Strecke dx parallel der x-Achse nach $M_1(x + dx/y)$, so ist $dy = 0$ und die zugehörige Bewegung des Bildes also durch

$$d_x w = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx$$

bestimmt; daraus liest man den Richtungskoeffizienten dieser Bewegung ab:

$$\frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4}$$

Bewegt man $M(x/y)$ sodann bei festbleibendem x nach $M_2(x/y + dy)$, so ist $dx = 0$ und die zugehörige Bewegung des Bildes ist durch

$$d_y w = \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy$$

bestimmt, woraus man ihren Richtungskoeffizienten

$$-\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial v}{\partial x} \tag{5}$$

abliest.

Aus (4) und (5) erkennt man, daß die Bilder von MM_1 und MM_2 ebenso aufeinander senkrecht sind wie MM_1 und MM_2 selbst; und da das Längenverhältnis dieser Bilder:

$$|d_x w| : |d_y w| \tag{6}$$

$$= \left|\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}\, dx\right| : \left|\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}\, dy\right| = |dx| : |dy|,$$

gleich dem Längenverhältnis der Originale ist, so bildet sich das infinitesimale rechtwinklige Dreieck MM_1M_2 der z-Ebene

in ein *ähnliches* infinitesimales Dreieck der w-Ebene ab. Es ist leicht zu erkennen, wie sich dieser Sachverhalt auf beliebige infinitesimale Dreiecke und infinitesimale Figuren überhaupt überträgt, und da in ähnlichen Dreiecken einander entsprechende Winkel gleich sind, so kann man sagen:

Die durch eine analytische Funktion vermittelte Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene ist in den kleinsten Teilen ähnlich, oder winkeltreu, oder, nach einer von Gauß eingeführten Benennung, konform.

Das Größenverhältnis der kleinsten Figuren in Bild und Original ist nicht in allen Teilen dasselbe; aus (6) ergibt sich das Längenverhältnis sehr kleiner Strecken, das lineare *Verzerrungsverhältnis*, das bestimmt ist durch den Quotienten $\frac{|d_x w|}{|dx|}$, gleich $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$, also gleich dem absoluten Wert des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ an der betreffenden Stelle.

Die konforme Abbildung hat für die Kartographie große Bedeutung.

Zur Illustration der vorgeführten Begriffe diene die Funktion

$$w = f(z) = (x^2 - y^2) + 2\,xy\,i;$$

daß sie analytisch ist, folgt daraus, daß $x^2 - y^2 = u$, $2\,xy = v$ konjugierte Funktionen sind, weil

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\,2\,y = -\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ihr Differentialquotient ist

$$\frac{dw}{dz} = 2\,x + 2\,y\,i,$$

sein absoluter Wert $2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Eliminiert man y zwischen den Gleichungen $x^2 - y^2 = u$, $2\,xy = v$, so ergibt sich

$$u = x^2 - \frac{v^2}{4\,x^2}$$

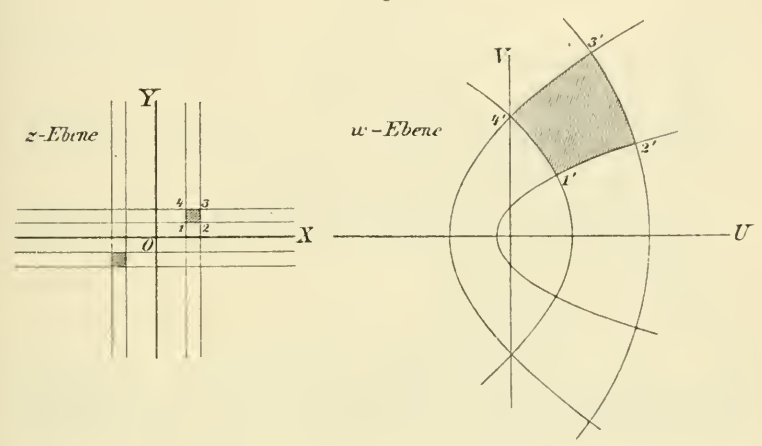
als Gleichung jener Kurven in der w-Ebene, in welcher sich

das System der Parallelen zur y-Achse abbildet; es sind Parabeln. Durch Elimination von x entsteht

$$u = \frac{v^2}{4\,y^2} - y^2$$

als Gleichung jener Kurven der w-Ebene, in welche sich die Parallelen zur x-Achse abbilden; auch diese sind Parabeln. Beide Arten von Parabeln, durch entgegengesetzte Lage von-

Fig. 19.



einander unterschieden, haben den Ursprung der w-Ebene zum gemeinsamen Brennpunkt (Fig. 19). Sie zerlegen diese Ebene in rechtwinklig krummlinige Vierecke, speziell in infinitesimale Quadrate, wenn die z-Ebene in infinitesimale Quadrate zerlegt worden war.

Da u, v und somit auch w sich nicht ändern, wenn man bei x und y zugleich das Zeichen wechselt, so bilden sich je zwei in bezug auf 0 symmetrische Quadrate der z-Ebene in *ein* Viereck der w-Ebene ab.

Man erörtere jene Zerlegung der z-Ebene, die einer Zerlegung der w-Ebene in Quadrate durch Parallele zu den Achsen entspricht.

Im folgenden werden die *elementaren* Funktionen einer komplexen Variablen einer kurzen Erörterung unterzogen.

103. Die Potenz. Moivres Binomialformel für ganze Exponenten. Es gelte als Grundsatz, daß die *Potenz* einer

komplexen Zahl begrifflich ebenso aufzufassen sei wie die Potenz einer reellen Zahl; wenn also n eine natürliche Zahl bedeutet, so sei auch bei komplexem z

$$z^n = z \cdot z \ldots (n\text{-mal}), \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}, \quad z^0 = 1.$$

Es sei nun

$$(1) \qquad z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

dann ist

$$\begin{aligned} z^2 &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r^2[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi] \\ &= r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi), \\ z^3 &= r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\, r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r^3[\cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi + i(\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi)] \\ &= r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi); \end{aligned}$$

die Allgemeingültigkeit von

$$(2) \qquad z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

ergibt sich daraus, daß die Hinzufügung eines weiteren Faktors $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ für z^{n+1} dasselbe Bildungsgesetz liefert.

Aus der Beziehung

$$\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$$

ergibt sich

$$(3) \qquad \begin{cases} z^{-n} = r^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) \\ \qquad\; = r^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi). \end{cases}$$

Da r^{-n}, $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ einwertige Größen darstellen, *so sind die positive und die negative ganze Potenz einer komplexen Variablen eindeutige Funktionen derselben.*

Vergleicht man die Formeln (2), (3) mit den aus (1) unmittelbar hervorgehenden

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n, \quad z^{-n} = r^{-n}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n},$$

so ergibt sich

$$(4) \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\pm n} = \cos(\pm n\varphi) + i\sin(\pm n\varphi),$$

die Moivresche *Binomialformel**), zunächst gültig für jedes ganze n.

104. Die Wurzel. Moivresche Binomialformel für rationale Exponenten. Die n-te *Wurzel* aus einer komplexen Zahl werde begrifflich ebenso aufgefaßt wie die Wurzel aus einer reellen Zahl; es sei also auch bei komplexem z und ganzem positiven n

$$\sqrt[n]{z} = w$$

nur dann, wenn

$$w^n = z.$$

Setzt man $w = u + iv = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$, so führt dies vermöge des vorigen Artikels zu der Beziehung:

$$R^n(\cos n\Phi + i\sin n\Phi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

welcher nur auf die eine Weise genügt werden kann, daß

$$R^n = r,$$

$$n\Phi = \varphi + 2\varkappa\pi$$

gesetzt wird, wobei $\varkappa$ jede positive wie negative ganze Zahl einschließlich der Null bedeuten darf. Hieraus ergibt sich

$$R = \left|\sqrt[n]{r}\right|, \qquad \Phi = \frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{n};$$

daher ist

$$\text{(5)}\quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \left|\sqrt[n]{r}\right|\left(\cos\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{n}\right).$$

Der anscheinend unendlich vieldeutige Ausdruck auf der rechten Seite nimmt in Wirklichkeit nur n verschiedene Werte an, welche man erhält, wenn man der Reihe nach

$$\text{(6)}\qquad \varkappa = 0,\ 1,\ 2, \ldots (n-1)$$

setzt. Die Verschiedenheit der aus diesen Substitutionen hervorgehenden Werte folgt daraus, daß die zugehörigen Werte von $\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{n}$ sämtlich in dem Intervalle $(0,\ 2\pi)$ liegen und voneinander verschieden sind. Bezeichnet man ferner irgend eine Zahl der Reihe (6) mit α, so kann jede ganze Zahl außerhalb dieser Reihe durch

$$pn + \alpha$$

---

*) Abraham de Moivre, Miscellanea analytica, London 1730.

ausgedrückt werden, wobei p eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet; setzte man nun $\varkappa = pn + \alpha$, so wäre

$$\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(pn + \alpha)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2\alpha\pi}{n} + 2p\pi,$$

und da $2p\pi$ auf den Wert der trigonometrischen Funktionen in (5) keinen Einfluß hat, so liefert die Substitution $\varkappa = np + \alpha$ dasselbe, wie die Substitution $\varkappa = \alpha$.

Hieraus folgt, daß die n-te Wurzel aus einer komplexen Variablen eine n-deutige Funktion dieser Variablen ist. Da übrigens die komplexe Variable auch die reelle und die rein imaginäre Variable in sich begreift, so gilt der Satz auch für diese.

Setzt man in der Formel (5) $r = 1$ und läßt auch für ein komplexes z den Ansatz

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

zurecht bestehen, so ergibt sich

$$(7) \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{n}.$$

Gilt ferner auch für complexe z

$$\sqrt[p]{z^q} = z^{\frac{q}{p}} = (z^q)^{\frac{1}{p}},$$

wo unter $\frac{q}{p}$ ein irreduzibler Bruch verstanden werden soll, so ergibt sich durch Verbindung von (4) und (5):

$$(8) \qquad \begin{cases} \sqrt[p]{z^q} = \sqrt[p]{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^q} \\ \qquad\quad = \sqrt[p]{r^q(\cos q\varphi + i\sin q\varphi)} \\ \qquad\quad = r^{\frac{q}{p}}\left(\cos\frac{q\varphi + 2\varkappa\pi}{p} + i\sin\frac{q\varphi + 2\varkappa\pi}{p}\right); \end{cases}$$

und hieraus für $r = 1$

$$(9) \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{q}{p}} = \cos\frac{q\varphi + 2\varkappa\pi}{p} + i\sin\frac{q\varphi + 2\varkappa\pi}{p};$$

in beiden Formeln ist nach und nach

$$\varkappa = 0, 1, \ldots (p-1)$$

zu setzen, um alle Werte zu erhalten, deren die rechte Seite fähig ist.

Hiernach gilt für jedes rationale (positive wie negative) n die Formel:

(10) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n(\varphi + 2\varkappa\pi) + i\sin n(\varphi + 2\varkappa\pi)$,

die eine Verallgemeinerung der Moivreschen Binomialformel für beliebige rationale (und irrationale) Exponenten darstellt.

105. Die natürliche Potenz. Als analytische Definition der natürlichen Potenz werde auch für einen komplexen Exponenten jene beständig und absolut konvergente Potenzreihe angenommen, welche in 95, (17) unter Voraussetzung eines reellen Exponenten gefunden worden ist; es sei also

(11) $$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \cdots.$$

Für einen anderen Wert z' der Variablen ist

$$e^{z'} = 1 + \frac{z'}{1} + \frac{z'^2}{1\cdot 2} + \cdots.$$

Wendet man auf diese zwei Reihen das in 75 entwickelte Multiplikationstheorem absolut konvergenter Reihen an, so ergibt sich für das allgemeine Glied c_n der Produktreihe der Ausdruck:

$$c_n = 1\cdot\frac{z'^n}{1\cdot 2\ldots n} + \frac{z}{1}\cdot\frac{z'^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}$$
$$+ \frac{z^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{z'^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)} + \cdots + \frac{z^n}{1\cdot 2\ldots n}\cdot 1$$
$$= \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left\{z'^n + \frac{n}{1}z'^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z'^{n-2}z^2 + \cdots + z^n\right\}$$
$$= \frac{(z+z')^n}{1\cdot 2\ldots n};$$

hiernach ist

$$e^z\cdot e^{z'} = 1 + \frac{z+z'}{1} + \frac{(z+z')^2}{1\cdot 2} + \cdots,$$

d. h.

$$e^z\cdot e^{z'} = e^{z+z'}.$$

Die natürliche Potenz erfüllt also, wenn man ihr die Definition (11) zugrunde legt, das Gesetz, welches die Arithmetik für Potenzen gleicher Basis und mit reellem Exponenten nachweist, auch für komplexe Exponenten, sie erfüllt es also ganz allgemein.

Daraus folgt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy};$$

vermöge der Definition (11) ist aber

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1} - \frac{y^2}{1 \cdot 2} - \frac{iy^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{iy^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots;$$

wegen der beständigen absoluten Konvergenz dieser Reihe sind notwendig auch die Reihen

$$1 - \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$

$$\frac{y}{1} - \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots$$

beständig und absolut konvergent; als solche sind sie bereits in 96, (22) und (23), erkannt und $\cos y$, respektive $\sin y$ als ihre Grenzwerte erwiesen worden; mithin ist

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{12}$$

und

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{13}$$

Die erste dieser beiden Formeln ist von Euler*) nach ihrer hohen Bedeutung für die Analysis gewürdigt worden. Formal gestattet sie, das Moivresche Binom $\cos\varphi + i\sin\varphi$ in Form einer natürlichen Potenz mit imaginärem Exponenten, $e^{i\varphi}$, darzustellen.

Für den besonderen Wert $y = 2\pi$ gibt Formel (12)

$$e^{2\pi i} = 1;$$

daraus ergibt sich, daß bei jedem ganzzahligen $\varkappa$

$$e^{x+iy+2\varkappa\pi i} = e^{x+iy}(e^{2\pi i})^{\varkappa} = e^{x+iy}. \tag{14}$$

Die natürliche Potenz e^z ist demnach eine eindeutige periodische Funktion von z und $2\pi i$ der Modul der Periode (32). Ist z rein imaginär $= iy$, so ist vermöge (12) der Modul von e^{iy} bei *jedem* Werte von y die Einheit; ist z komplex $= x + iy$, so ist der Modul von e^z auf Grund von (13) e^x.

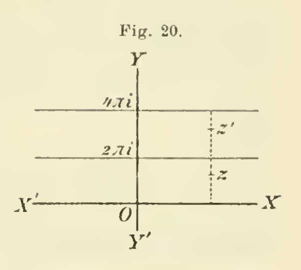
Wegen der Periodizität von e^z genügt es, um alle Werte der Funktion, deren sie fähig ist, zu erhalten, z ein Gebiet zuzuordnen, das dem x das Intervall $(-\infty, +\infty)$, dem y das Intervall $(0, 2\pi)$ zuweist, also einen Streifen der Ebene, welcher

---

*) Introductio in Analysin infinitorum, 1748; deutsch von F. Maser, Berlin 1885.

von der x-Achse und einer zu ihr parallelen Geraden im Abstande 2π begrenzt wird (Fig. 20). Zerlegt man die ganze Ebene in solche Streifen, so wiederholen sich die Werte von e^z, welche aus dem erstgenannten Streifen entspringen, in jedem anderen derart, daß $e^{z'} = e^z$, wenn $zz' \parallel YY'$, $zz' = 2\pi$ oder ein positives oder negatives Vielfaches hiervon ist. Die Ebene XOY ist daher unendlich vielfach auf die Ebene UOV abgebildet (102).

Fig. 20.



Verbindet man die Gleichung (12) oder

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

mit der aus ihr durch Zeichenänderung des x hervorgehenden

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

durch Addition und Subtraktion, so ergeben sich die ebenfalls von Euler aufgestellten Formeln:

$$(15) \qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\[2ex] \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

106. Der natürliche Logarithmus. Unter dem natürlichen Logarithmus der komplexen Variablen $z = x + iy$ soll jede komplexe Variable $w = u + iv$ verstanden werden, welche für alle Werte von x, y die Beziehung

$$e^w = z$$

erfüllt; mit anderen Worten, wie bei reellen Variablen soll der natürliche Logarithmus die Umkehrung der natürlichen Potenz sein. Er möge mit Lz bezeichnet werden zum Unterschiede gegen den bisher allein betrachteten reellen Logarithmus einer reellen positiven Variablen x, der mit lx bezeichnet worden ist.

Aus

$$e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = x + iy$$

folgt aber nach dem Grundsatze, daß zwei komplexe Größen nur dann gleich sind, wenn die reellen Bestandteile und die Koeffizienten von i beiderseits übereinstimmen, daß

$$e^u \cos v = x$$
$$e^u \sin v = y;$$

daraus ergibt sich für den Modul von e^w, d. i. für e^u, der Wert

$$e^u = \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|, \quad \text{woraus} \quad u = l\left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|;$$

ferner

$$\cos v = \frac{x}{e^u}, \qquad \sin v = \frac{y}{e^u}, \qquad \operatorname{tg} v = \frac{y}{x};$$

bezeichnet also $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ jenen einzigen Bogen aus dem Intervalle $(0, 2\pi)$, dessen Tangens den Wert $\frac{y}{x}$ hat und dessen Kosinus, Sinus beziehungsweise mit x, y dem Zeichen nach übereinstimmen, so ist

$$v = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + 2\varkappa\pi,$$

wobei $\varkappa$ jede positive und negative ganze Zahl mit Einschluß der Null bedeuten kann.

Nachdem so die Elemente von w durch jene von z dargestellt sind, hat man:

$$L(x + iy) = l\left|\sqrt{x^2 + y^2}\right| + i \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + 2\varkappa\pi i. \tag{16}$$

Der natürliche Logarithmus einer komplexen Variabeln ist demnach eine unendlich vieldeutige Funktion, und aus einem seiner Werte ergibt sich jeder andere durch additive Hinzufügung eines entsprechenden Vielfachen von $2\pi i$.

Dieses Verhalten ist die notwendige Folge der Periodizität der natürlichen Potenz, aus welcher der natürliche Logarithmus durch Umkehrung hervorgeht (**33**).

Weil die komplexe Variable auch die reelle und die rein imaginäre umfaßt, so gilt der eben ausgesprochene Satz auch für diese.

Ist $y = 0$, so ist $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ entweder $= 0$ oder $= \pi$, je nachdem $x > 0$ oder $x < 0$; man hat also:

$$\text{für } x > 0 \qquad Lx = lx + 2\varkappa\pi i$$
$$\text{für } x < 0 \qquad Lx = l|x| + (2\varkappa + 1)\pi i.$$

Die erste dieser Formeln zeigt, daß sich unter den unendlich vielen Werten des natürlichen Logarithmus einer positiven reellen Zahl ein einziger reeller Wert befindet, entsprechend $\varkappa = 0$; dieser ist es, den man mit lx bezeichnet. Aus der zweiten Formel geht hervor, daß die Werte des Logarithmus einer negativen reellen Zahl wie die einer komplexen Zahl sämtlich imaginär sind.

Es mag noch die einfache Gestalt der Formel (16) angeführt werden, welche sich bei trigonometrischer Darstellung von z ergibt. Ist $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so hat man:

$$Lz = lr + i\varphi + 2\varkappa\pi i.$$

107. Trigonometrische Funktionen. Zur Definition der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus sollen bei komplexem Argument dieselben beständig und absolut konvergenten Potenzreihen genommen werden, welche sich in **96**, (22) und (23), bei reellem Argument für diese Funktionen ergeben haben. Bezüglich der anderen Funktionen sollen die nämlichen Beziehungen gelten, wie bei reellem Argument, also $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ usw. Wir wollen zeigen, daß dies auf das nämliche hinauskommt, wie wenn man die Formeln **105**, (15) als allgemein geltende Definitionen festgestellt hätte.

In der Tat folgt aus (11):

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1} - \frac{z^2}{1\cdot 2} - \frac{iz^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{iz^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots,$$

$$e^{-iz} = 1 - \frac{iz}{1} - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{iz^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{iz^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots$$

und hieraus durch Addition und Subtraktion:

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots;$$

nimmt man also die rechtsstehenden Reihen, die mit jenen **96**, (23), (22) übereinstimmen, als Definitionen für $\cos z$ und $\sin z$, so ist auch

$$
(17) \qquad \begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\[2ex] \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{cases}
$$

Da die natürliche Potenz periodisch ist mit dem Modul $2\pi i$, so daß $e^{iz+2\varkappa\pi i} = e^{i(z+2\varkappa\pi)} = e^{iz}$, so sind die Funktionen $\cos z$, $\sin z$ periodisch mit dem Modul 2π, wie dies für ein reelles Argument schon bekannt war.

Ist z rein imaginär, $z = ix$, so geben die Formeln (17)

$$
(18) \qquad \begin{cases} \cos ix = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x, \\[2ex] \sin ix = i\,\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i \sinh x, \end{cases}
$$

so daß der Kosinus einer rein imaginären Variablen reell, der Sinus rein imaginär ist. Durch diese Formeln ist zugleich der Zusammenhang zwischen den Kreis- und den Hyperbelfunktionen (**34**) hergestellt.

Ist z komplex $= x + iy$, so hat man nach (17):

$$
\cos(x + iy)
$$

$$
= \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^{y}}{2} = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})(e^{y} + e^{-y}) - (e^{ix} - e^{-ix})(e^{y} - e^{-y})}{4}
$$

$$
\sin(x + iy)
$$

$$
= \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} - e^{-ix} \cdot e^{y}}{2i} = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})(e^{y} + e^{-y}) - (e^{ix} + e^{-ix})(e^{y} - e^{-y})}{4i};
$$

mit Beachtung der Formeln (15) und (18) gibt dies:

$$
\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy
$$

$$
\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy,
$$

Formeln, welche völlig dem für reelle Bögen geltenden Additionstheorem entsprechen; in der Form geschrieben:

$$
\cos(x + iy) = \cos x \cos hy - i \sin x \sinh y
$$

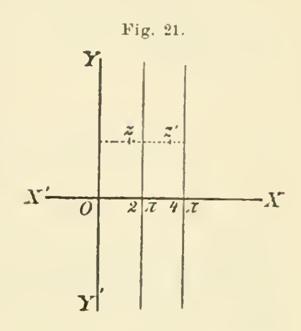
$$
\sin(x + iy) = \sin x \cos hy + i \cos x \sinh y
$$

lassen sie die linksstehenden Funktionen als komplexe Größen erscheinen.

Der Kosinus und der Sinus einer komplexen Variablen sind demnach eindeutige periodische Funktionen mit dem Modul 2π.

Wegen der Periodizität genügt es, um den ganzen Verlauf dieser Funktionen kennen zu lernen, dem z als Gebiet einen Streifen der Ebene zuzuweisen, welcher von der y-Achse und einer zu ihr parallelen Geraden im Abstande 2π begrenzt ist (Fig. 21). Teilt man die ganze Ebene in derlei Streifen, so wiederholen sich in jedem derselben die Werte aus dem erstgedachten Streifen derart, daß $\cos z' = \cos z$, $\sin z' = \sin z$, wenn $zz' \parallel XX'$ und $zz' = 2\pi$ oder einem Vielfachen davon.

Fig. 21.



108. Zyklometrische Funktionen. Als *Arcustangens* einer komplexen Variablen $z = x + iy$ werde jede komplexe Zahl $w = u + iv$ bezeichnet, die der Bedingung:

$$\operatorname{tg} w = z$$

genügt. Mit Benutzung der Gleichungen (17) führt dies zu der Gleichung

$$\frac{1}{i}\,\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = z,$$

aus welcher zunächst

$$\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = iz$$

und weiter

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

folgt, so daß sich für w die Bestimmung:

$$w = \frac{1}{2i}\, L\, \frac{1 + iz}{1 - iz} = \operatorname{Arc\,tg} z$$

ergibt; dadurch ist die Lösung der Aufgabe auf die Bestimmung des natürlichen Logarithmus einer komplexen Variablen zurückgeführt, die in 106 erledigt worden ist. Es ist

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1 - y + ix}{1 + y - ix} = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (1 + y)^2} + \frac{2x}{x^2 + (1 + y)^2}\, i,$$

der Modul hiervon die positive Quadratwurzel aus

$$\frac{(1 - x^2 - y^2)^2 + 4x^2}{\{x^2 + (1 + y)^2\}^2} = \frac{(1 + x^2 + y^2)^2 - 4y^2}{\{x^2 + (1 + y)^2\}^2} = \frac{x^2 + (1 - y)^2}{x^2 + (1 + y)^2};$$

daraus ergibt sich auf Grund von **106**, (16):

$$L\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(1+y)^2} + i\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{2x}{1-x^2-y^2} + 2\varkappa\pi i$$

und hiermit

$$(19)\quad \begin{cases} \mathrm{Arc\,tg}(x+iy) \\ = \frac{i}{4}\,l\,\frac{x^2+(1+y)^2}{x^2+(1-y)^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2-y^2} + \varkappa\pi; \end{cases}$$

dabei ist unter $\mathrm{Arc\,tg}\frac{2x}{1-x^2-y^2}$ jener Bogen aus dem Intervalle $(0, 2\pi)$ zu verstehen, dessen Tangens $\frac{2x}{1-x^2-y^2}$ ist und dessen Sinus, Kosinus im Vorzeichen mit $2x$, $1-x^2-y^2$ respektive übereinstimmen.

Der Arcustangens einer komplexen Variablen ist demnach eine unendlich vieldeutige Funktion; aus einem seiner Werte ergibt sich jeder andere durch additive Hinzufügung eines entsprechenden Vielfachen von π.

Die anderen zyklometrischen Funktionen führen ebenfalls auf den natürlichen Logarithmus zurück. Auch wenn w eine komplexe Zahl ist, gilt nämlich vermöge (17) die Gleichung:

$$e^{iw} = \cos w + i \sin w,$$

woraus

$$w = \frac{1}{i}L\,(\cos w + i \sin w);$$

setzt man nun einmal $\sin w = z$, ein zweitesmal $\cos w = z$, so ergibt sich im ersten Falle

$$\mathrm{Arc\,sin}\, z = \frac{1}{i}L\left(\sqrt{1-z^2} + iz\right);$$

im zweiten Falle

$$\mathrm{Arc\,cos}\, z = \frac{1}{i}L\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right),$$

die Wurzel beidemal als zweideutige Größe aufgefaßt. Die Ausführung dieser Formeln in den Variablen x, y soll unterbleiben. Nur einige Bemerkungen mögen noch angefügt werden. Ist z reell und dem Betrage nach kleiner als 1, so ist auch $\sqrt{1-z^2}$ reell und der Modul von $\sqrt{1-z^2}+iz$, ebenso wie der von $z+i\sqrt{1-z^2}$ gleich 1; infolgedessen entfällt vermöge **106**, (16) der logarithmische Teil und es bleibt ein reeller

Bogen bestehen. Wenn hingegen z reell und dem Betrage nach größer ist als 1, dann ist $\sqrt{1-z^2}$ imaginär und der Modul von $\sqrt{1-z^2}+iz$ gleich $|z+\sqrt{z^2-1}|$, jener von $z+i\sqrt{1-z^2}=z-\sqrt{z^2-1}$ gleich $|z-\sqrt{z^2-1}|$; man hat also auf Grund von **106**, (16):

$$\operatorname{Arc}\sin z = \frac{1}{i}\, l\, |z+\sqrt{z^2-1}| + \frac{\pi}{2} + 2\varkappa\pi$$

$$\operatorname{Arc}\cos z = \frac{1}{i}\, l\, |z-\sqrt{z^2-1}| + 2\varkappa\pi.$$

Daraus ergibt sich die für reelle z, welche absolut genommen kleiner sind als 1, aus den Elementen schon bekannte Formel:

$$\operatorname{Arc}\sin z + \operatorname{Arc}\cos z = \frac{\pi}{2} + 2\varkappa\pi.$$

Hervorgehoben seien zum Schluß die nahen Beziehungen, die sich durch Heranziehung der komplexen Variablen zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion einerseits, den zyklometrischen Funktionen und dem Logarithmus andererseits aufgetan haben und die sich durch die ganze Analysis hindurch verfolgen lassen.

§ 5. Die unbestimmten Formen.

109. Die Form $\frac{0}{0}$. Wenn eine Funktion $f(x)$ der *stetigen* Variablen x für ein Intervall (α, β) eindeutig definiert und in diesem Intervall stetig ist, mit Ausnahme einer einzigen Stelle $x=a$, welche innerhalb (α, β) liegt oder mit einer der Grenzen zusammenfällt und an welcher die Definition ihre Geltung verliert, so stellt sich die Aufgabe ein, das Verhalten der Funktion in der Umgebung dieser kritischen Stelle zu untersuchen. Diese Aufgabe erhält einen bestimmten Ausdruck in der Forderung: den Grenzwert von $f(x)$ zu suchen für einen näher bezeichneten, aber stetigen Grenzübergang $\lim x = a$ (**18**).

Die Funktion $f(x)$ erscheint an einer solchen Stelle $x=a$ in einer sogenannten *unbestimmten* Form und nach dieser Form richtet sich das einzuschlagende Verfahren. Welches diese Form aber auch sei, so bezeichnet man den Grenzwert $\lim\limits_{x=a} f(x)$,

wenn ein solcher existiert, als einen *uneigentlichen Funktionswert,* wohl auch nicht gerade zutreffend als den wahren Wert der unbestimmten Form, und ergänzt die an der Stelle $x = a$ unterbrochene Definition der Funktion dadurch, daß man diesen Grenzwert als ihren Wert an dieser Stelle festsetzt, also

$$f(a) = \lim_{x=a} f(x) \tag{1}$$

annimmt; dies geschieht auch dann, wenn der gedachte Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ ist. Die Ergänzung erfolgt also, sofern der Grenzwert ein endlicher ist, nach dem Grundsatze, daß die im Intervalle (α, β) mit Ausschluß von a herrschende Stetigkeit auch für $x = a$ fortbestehen bleibe.

Unter den unbestimmten Formen ist es eine, auf welche man die übrigen zurückzuführen sucht; sie hat folgende Entstehung.

Es sei $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ eine gebrochene Funktion, deren Zähler und Nenner in dem Intervalle (α, β) stetig sind und an der Stelle $x = a$ zugleich verschwinden; dann nimmt der Ausdruck der Funktion die *Form* $\frac{0}{0}$ an.

Da $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $\lim x = a$ unendlich klein werden, so hängt der Grenzwert ihres Quotienten von der Ordnung des Unendlichkleinwerdens jeder einzelnen ab (16).

Hierüber gibt mitunter schon eine einfache algebraische Umformung Auskunft; sind z. B. m, n natürliche Zahlen, so ist

$$f(x) = \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{(x-a)\left(x^{m-1} + a x^{m-2} + \cdots + a^{m-1}\right)}{(x-a)\left(x^{n-1} + a x^{n-2} + \cdots + a^{n-1}\right)};$$

Zähler und Nenner werden also für $\lim x = a$ von derselben Ordnung unendlich klein wie $x - a$, daher ist

$$f(a) = \lim f(x) = \left(\frac{x^{m-1} + a x^{m-2} + \cdots + a^{m-1}}{x^{n-1} + a x^{n-2} + \cdots + a^{n-1}}\right)_{x=a} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

Ist $x = 0$ die kritische Stelle und sind $\varphi(x)$, $\psi(x)$ in Potenzreihen entwickelbar, so können diese Reihen ein von x freies Glied nicht enthalten (85, Schluß); es sei daher:

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \cdots = x^m(a_0 + a_1 x + \cdots),$$
$$\psi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n+1} + b_2 x^{n+2} + \cdots = x^n(b_0 + b_1 x + \cdots);$$

für $\lim x = 0$ werden jetzt $\varphi(x)$, $\psi(x)$ in bezug auf x selbst unendlich klein von der m-ten, bzw. von der n-ten Ordnung und man hat nun drei Fälle zu unterscheiden:

a) für $m > n$ ist $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x^m}{x^n} = 0$, daher

$$f(0) = \lim_{x=0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0;$$

b) für $m < n$ ist $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x^m}{x^n} = \infty$ (bei geradem $n - m + \infty$, bei ungeradem $n - m$ links $-\infty$, rechts $+\infty$), also

$$f(0) = \lim_{x=0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty;$$

c) für $m = n$ endlich erhält man

$$f(0) = \lim_{x=0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Zur Erläuterung dieses Verfahrens mögen folgende *Beispiele* dienen:

1) Für $x = 0$ nimmt

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$$

die Form $\frac{0}{0}$ an; es ist aber

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots\right)$$
$$= \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots;$$

daher

$$f(0) = \lim_{x=0} f(x) = \frac{1}{6}.$$

2) Dieselbe Erscheinung tritt bei

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{1 - \cos x}$$

ein; die Entwicklungen von Zähler und Nenner geben

$$x - \operatorname{arc\,tg} x = x - \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots$$

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots\right) = \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots,$$

folglich ist

$$f(0) = \lim_{x=0} f(x) = 0.$$

3) Das gleiche Verhalten zeigt

$$f(x) = \frac{l\,(1+x+x^2) + l\,(1-x+x^2)}{e^x + e^{-x} - 2\cos x}$$

für $x = 0$; nun ist, sobald x genügend klein geworden,

$$l\,(1+x+x^2) + l\,(1-x+x^2)$$

$$= \frac{x+x^2}{1} - \frac{(x+x^2)^2}{2} + \frac{(x+x^2)^3}{3} - \cdots - \left(\frac{x-x^2}{1} + \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{3} + \cdots\right)$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots,$$

$$e^x + e^{-x} - 2\cos x$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \cdots - 2\left(1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots\right)$$

$$= 2x^2 + \frac{x^6}{180} - \cdots,$$

daher

$$f(0) = \lim_{x=0} f(x) = \frac{1}{2}\cdot$$

Die Entwicklung gibt zugleich ein bequemes Mittel, die betreffende Funktion für der Null naheliegende Werte von x näherungsweise zu berechnen; so kann die Funktion des 1. Beispiels für sehr kleine Werte von x durch $\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120}$, jene des 2. Beispiels durch $\dfrac{\frac{x}{3} - \frac{x^3}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}}$ und dies wieder durch $\frac{2x}{3} - \frac{31x^3}{90}$, die des 3. Beispiels durch $\dfrac{1 + \frac{x^2}{2}}{2 + \frac{x^4}{180}}$ und dies wieder durch $\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}$ näherungsweise ersetzt werden.

Zu einem allgemeinen Verfahren der Grenzwertbestimmung von Quotienten, deren Zähler und Nenner für $x = a$ gleichzeitig Null werden, führt die Differentialrechnung. Angenommen, daß die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ in einem beliebig

engen, a und $a+h$ enthaltenden Intervalle stetige Differentialquotienten m-ter, bzw. n-ter Ordnung besitzen, so können $\varphi(a+h)$ und $\psi(a+h)$ nach der Taylorschen Formel (91) wegen $\varphi(a)=0$, $\psi(a)=0$ wie folgt entwickelt werden:

$$\varphi(a+h)=\varphi'(a)h+\frac{\varphi''(a)}{1\cdot 2}h^2+\cdots+\frac{\varphi^{(m)}(a+\theta' h)}{1\cdot 2\ldots m}h^m \quad (0<\theta'<1)$$

$$\psi(a+h)=\psi'(a)h+\frac{\psi''(a)}{1\cdot 2}h^2+\cdots+\frac{\psi^{(n)}(a+\theta'' h)}{1\cdot 2\ldots n}h^n \quad (0<\theta''<1).$$

Wenn nun $\varphi'(a)\neq 0$ und $\psi'(a)\neq 0$, so werden $\varphi(a+h)$, $\psi(a+h)$ mit h zugleich unendlich klein von erster Ordnung, und man hat

$$(2) \qquad f(a)=\lim_{h=0}\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.\text{*)}$$

Ist dagegen

$\varphi'(a)=0$ und auch weiter noch $\varphi''(a)=0,\ldots\varphi^{(m-1)}(a)=0$,
dagegen $\varphi^{(m)}(a)\neq 0$,

$\psi'(a)=0$ und auch weiter noch $\psi''(a)=0,\ldots\psi^{(n-1)}(a)=0$,
dagegen $\psi^{(n)}(a)\neq 0$,

und bleiben die letzten Beziehungen auch in dem Intervalle $(a, a+h)$ bestehen, so wird

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{1\cdot 2\ldots n h^m}{1\cdot 2\ldots m h^n}\,\frac{\varphi^{(m)}(a+\theta' h)}{\psi^{(n)}(a+\theta'' h)};$$

unter diesen Voraussetzungen wird also für $\lim h=0$ $\varphi(a+h)$ in bezug auf h unendlich klein von der m-ten, $\psi(a+h)$ von der n-ten Ordnung; danach ist

$$f(a)=\lim_{h=0}\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=0, \qquad \text{wenn } m>n,$$

$$f(a)=\lim_{h=0}\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\infty, \qquad \text{wenn } m<n,$$

$$(3) \qquad f(a)=\lim_{h=0}\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}=\frac{\varphi^{(m)}(a)}{\psi^{(m)}(a)}, \quad \text{wenn } m=n.$$

Das Verfahren, zu welchem diese Betrachtung führt, läßt sich folgendermaßen charakterisieren: *Man differentiiere Zähler*

---

*) Die in diesem Ansatze enthaltene Regel hat Johann Bernoulli zuerst gefunden. Acta erudit. 1704.

und Nenner des Bruches $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *je für sich und wiederhole dies so oft, bis man im Zähler oder im Nenner zu einem Differentialquotienten kommt, der für* $x = a$ *nicht Null ist; je nachdem dies im Nenner zuerst oder im Zähler zuerst oder nach* m *Wiederholungen in beiden gleichzeitig eintritt, ist lim* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *für lim* $x = a$ *gleich Null, oder* $= \infty$ *oder* $= \frac{\varphi^{(m)}(a)}{\psi^{(m)}(a)}$.

In dem letztgedachten Falle nimmt nicht allein $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, sondern nehmen auch $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}, \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}, \ldots \frac{\varphi^{(m-1)}(x)}{\psi^{(m-1)}(x)}$ für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an und alle diese Quotienten haben denselben Grenzwert $\frac{\varphi^{(m)}(a)}{\psi^{(m)}(a)}$; denn wendet man die Taylorsche Formel auf $\varphi^{(r)}(a+h)$ und $\psi^{(r)}(a+h)$, wo $r < m$, an, so wird wegen $\varphi^{(r)}(a) = 0, \varphi^{(r+1)}(a) = 0, \ldots \varphi^{(m-1)}(a) = 0$ und $\psi^{(r)}(a) = 0$, $\psi^{(r+1)}(a) = 0, \ldots \psi^{(m-1)}(a) = 0$:

$$\varphi^{(r)}(a+h) = \frac{\varphi^{(m)}(a+\theta' h)}{1 \cdot 2 \ldots (m-r)} h^{m-r}$$

$$\psi^{(r)}(a+h) = \frac{\psi^{(m)}(a+\theta'' h)}{1 \cdot 2 \ldots (m-r)} h^{m-r}$$

und

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi^{(r)}(a+h)}{\psi^{(r)}(a+h)} = \frac{\varphi^{(m)}(a)}{\psi^{(m)}(a)},$$

so daß man schreiben kann:

$$f(a) = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \cdots \tag{4}$$

Bisher wurde die kritische Stelle als im Endlichen liegend vorausgesetzt. Wenn aber $\varphi(x)$, $\psi(x)$ mit beständig wachsendem x, z. B. für $\lim x = +\infty$, gegen Null konvergieren, so nimmt $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $\lim x = +\infty$ die Form $\frac{0}{0}$ an, das durch (4) charakterisierte Verfahren der Grenzwertbestimmung bleibt aber bestehen. Setzt man nämlich $x = \frac{1}{z}$, so nimmt $\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1}{z}\right)}$ die

unbestimmte Form für $\lim z = +0$ an und hierfür gilt der Vorgang der sukzessiven Differentiation; nun ist aber

$$D_z \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \cdot \varphi'\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$D_z \psi\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \cdot \psi'\left(\frac{1}{z}\right),$$

wobei $\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)$ den Wert von $\varphi'(x)$ für $x = \frac{1}{z}$, $\psi'\left(\frac{1}{z}\right)$ den Wert von $\psi'(x)$ für $x = \frac{1}{z}$ bedeutet; daher ist

$$\frac{D_z \varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{D_z \psi\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)} \quad \text{und} \quad \lim_{z=+0} \frac{D_z \varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{D_z \psi\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=+\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Das an erster Stelle unter Voraussetzung ganzzahliger positiver m, n behandelte Beispiel

$$f(x) = \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

erledigt sich mit Hilfe der Differentialrechnung für beliebige rationale m, n $(a > 0)$; es ist vermöge (2)

$$f(a) = \left(\frac{m x^{m-1}}{n x^{n-1}}\right)_{x=a} = \frac{m}{n} a^{m-n}.$$

Die drei späteren Beispiele führen auf diesem Wege zu folgender Rechnung:

$$\lim_{x=0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6};$$

$$\lim_{x=0} \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{1 - \cos x} = \lim_{x=0} \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\sin x} = \left(\frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\cos x}\right)_{x=0} = 0;$$

$$\lim_{x=0} \frac{l(1+x+x^2) + l(1-x+x^2)}{e^x + e^{-x} - 2\cos x}$$

$$= \lim_{x=0} \frac{\frac{2x+4x^3}{1+x^2+x^4}}{e^x - e^{-x} + 2\sin x} = \left(\frac{\frac{2+10x^2-2x^4-4x^6}{(1+x^2+x^4)^2}}{e^x + e^{-x} + 2\cos x}\right)_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Als weitere *Beispiele* mögen dienen:

$$f(x) = \frac{x^3 - 19x + 30}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18} \text{ bei } x = 2 \text{ und } x = 3, \left\{\frac{7}{5}, \frac{4}{3}\right\}.$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} ax - ax}{\operatorname{tg} bx - bx} \text{ bei } x = 0, \left\{\frac{a^3}{b^3}\right\}.$$

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin 2x - \cos 2x - 1} \text{ bei } x = \frac{\pi}{4}, \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x} \text{ bei } x = 0, \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

110. Die Form $\frac{\infty}{\infty}$. *Es habe die Funktion wieder die Form eines Bruches $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; bei der stetigen Annäherung von x an die Grenze a mögen jedoch Zähler wie Nenner, jeder mit einem bestimmten Vorzeichen, ins Unendliche wachsen. Dann nimmt $f(x)$, wie man dies kurz ausdrückt, an der Stelle $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ an*; der Grenzwert dagegen, welchem sich dabei $f(x)$ im gegebenen Falle nähert, hängt wieder von der Ordnung des Unendlichwerdens von Zähler und Nenner ab.

Einen wichtigen Fall, in welchem die Frage leicht erledigt werden kann, bildet die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{x^n},$$

wo $n > 0$ vorausgesetzt wird; für $\lim x = +\infty$ wachsen Zähler und Nenner, positiv bleibend, ins Unendliche; wie groß aber auch x und m ist, es gilt

$$e^x > 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{x^m}{1 \cdot 2 \ldots m},$$

daher auch

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{x^m}{1 \cdot 2 \ldots m}}{x^n},$$

wo immer $m > n$ vorausgesetzt werden kann, so daß der rechtsseitige Bruch mit x über jeden positiven Betrag wächst; daher ist

$$\lim_{x = +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty. \qquad (n > 0).$$

Es wird also die natürliche Potenz e^x (und jede Exponentialgröße a^x, in welcher $a > 1$) für $\lim x = +\infty$ unendlich groß

von höherer Ordnung als jede noch so hohe algebraische Potenz x^n mit positivem Exponenten. Daraus schließt man umgekehrt, daß

$$\lim_{x=+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0. \qquad (n > 0).$$

Von dieser Funktion läßt sich leicht schließen auf

$$f(x) = \frac{l\,x}{x^n}$$

für $n > 0$ und $\lim x = +\infty$; denn setzt man $l\,x = z$, so wird $x = e^z$ und mit $\lim x = +\infty$ zugleich $\lim z = +\infty$; die Funktion aber geht über in

$$\frac{z}{e^{nz}} = \frac{nz}{n \cdot e^{nz}},$$

infolgedessen ist

$$\lim_{x=+\infty} \frac{l\,x}{x^n} = \frac{1}{n} \lim_{z=+\infty} \frac{nz}{e^{nz}} = 0. \qquad (n > 0).$$

Hiernach wird der natürliche und jeder Logarithmus, dessen Basis größer ist als 1, für $\lim x = +\infty$ unendlich groß von niedrigerer Ordnung als jede positive Potenz.

Mit Hilfe der Differentialrechnung wird die Grenzwertbestimmung im vorliegenden Falle ebenso erledigt, wie bei der Form $\frac{0}{0}\cdot$ Zuerst soll dies unter der Voraussetzung gezeigt werden, daß $\lim x = +\infty$ (oder $-\infty$), und daß von einer Stelle X angefangen $\psi'(x)$ nicht mehr Null wird. Dann gilt der Satz, *daß, sofern* $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ *einen Grenzwert* A *besitzt,* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *gegen denselben Grenzwert konvergiert.*

Sind nämlich x_0, x $(x_0 < x)$ zwei Werte der Variablen, welche dem Intervalle $(X, +\infty)$ angehören, so ist nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatze (39):

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}; \qquad x_0 < x_1 < x;$$

daraus schließt man weiter:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$$

und

$$(5) \qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}} \cdot \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}.$$

Da nun $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ für $\lim x = +\infty$ den Grenzwert A hat, so kann man x_0 so groß festsetzen, daß $\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}$ von A um einen beliebig kleinen Betrag ε verschieden, also gleich $A \pm \varepsilon$ ist; nach Festsetzung von x_0 kann man ferner x so groß annehmen, daß der Bruch

$$\frac{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}$$

von der Einheit um einen beliebig kleinen Betrag sich unterscheide, also gleich $1 \pm \eta$ sei; dann aber hat man

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = (1 \pm \eta)(A \pm \varepsilon),$$

und weil ε, η dadurch, daß man x_0 und x groß genug wählt, der Null immer näher gebracht werden können, so ist tatsächlich

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = A = \lim_{x=+\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Der Satz gilt auch dann noch, wenn $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ mit x ins Unendliche wachsen sollte; denn da der erste Faktor der rechten Seite in (5) gegen 1 konvergiert, so ist mit $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \infty$ auch $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$.

Der Fall, daß $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ für $\lim x = a$ annimmt, läßt sich auf den vorigen dadurch zurückführen, daß man

$$x = a + \frac{1}{z}$$

setzt und nunmehr z der Grenze $+\infty$ (oder $-\infty$) zuführt; da aber

$$D_z \varphi\left[a + \frac{1}{z}\right] = -\frac{1}{z^2} \cdot \varphi'\left(a + \frac{1}{z}\right),$$

$$D_z \psi\left(a + \frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \cdot \psi'\left(a + \frac{1}{z}\right),$$

wobei die Differentiation rechts sich auf das x vertretende Aggregat $a + \frac{1}{z}$ bezieht, so ist

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{z=\infty} \frac{D_z \varphi\left(a + \frac{1}{z}\right)}{D_z \psi\left(a + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=\infty} \frac{\varphi'\left(a + \frac{1}{z}\right)}{\psi'\left(a + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Die über das Verhalten von $\psi'(x)$ aufgestellte Bedingung lautet jetzt dahin, daß sich eine Umgebung von a wie in (5) muß bezeichnen lassen, innerhalb welcher $\psi'(x)$ nicht Null wird.

Sollte $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ bei dem vorgeschriebenen Grenzübergange wieder die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ annehmen, so geht man zu dem Verhältnis der zweiten Differentialquotienten über, sofern auch $\psi''(x)$ die angeführten Bedingungen erfüllt, usw.

Mitunter bedarf es nur einer anderen Schreibung, um eine Funktion, die die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, so darzustellen, daß sie die Form $\frac{0}{0}$ erlangt; dies findet beispielsweise bei $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(2n+1)x}$ für $x = \frac{\pi}{2}$ statt, wenn man $\frac{\operatorname{cotg}(2n+1)x}{\operatorname{cotg} x}$ dafür schreibt; bei $\frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}$ für $x = 0$, wenn man es in $\pi \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{x}$ umsetzt.

Beispiele. 1) Die vorhin behandelten zwei Fälle erledigen sich nach dem gegenwärtigen Verfahren wie folgt: Sind $p, p+1$ zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen und $p \leqq n < p+1$, so hört die Unbestimmtheit von

$$\frac{e^x}{x^n}$$

nach p-maliger, bezw. nach $(p+1)$-maliger Wiederholung

des Verfahrens (6) auf, je nachdem $p = n$ oder $p < n$ ist; im ersten Falle ist

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^p} = \lim \frac{e^x}{p(p-1)\ldots 1} = +\infty,$$

im zweiten Falle

$$\lim_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim \frac{e^x}{n(n-1)\ldots(n-p)x^{n-p-1}}$$

$$= \lim \frac{x^{p+1-n}\,e^x}{n(n-1)\ldots(n-p)} = +\infty.$$

Was ferner

$$\frac{l\,x}{x^n} \qquad (n > 0)$$

anlangt, so ist schon nach einmaligem Differentiieren

$$\lim_{x=+\infty} \frac{l\,x}{x^n} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{n x^{n-1}} = \lim \frac{1}{n\,x^n} = 0.$$

2) Auf die Funktion

$$\frac{x + \cos x}{x - \sin x}$$

ist für $\lim x = +\infty$ (wie auch $-\infty$) das Verfahren nicht anwendbar, weil es keine Zahl X gibt, über welche hinaus der Differentialquotient des Nenners, d. i. $1 - \cos x$, nicht mehr Null wird; auch nähert sich der Quotient der Ableitungen, $\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x}$, keiner bestimmten Grenze; indessen zeigt der bloße Anblick, daß

$$\lim_{x=\infty} \frac{x + \cos x}{x - \sin x} = 1.$$

3) Die Funktion

$$\frac{l \operatorname{tg} a x}{l \operatorname{tg} x}$$

nimmt für $a > 0$ bei dem Grenzübergange $\lim x = +0$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, und es ist

$$\lim_{x=+0} \frac{l \operatorname{tg} a x}{l \operatorname{tg} x} = \lim \frac{\frac{a \cdot \sec^2 a x}{\operatorname{tg} a x}}{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}}$$

$$= \lim_{x=+0} \frac{a \sin 2x}{\sin 2 a x} = \left(\frac{2 a \cos 2 x}{2 a \cos 2 a x}\right)_{x=0} = 1,$$

wobei bemerkt wird, daß der Quotient der ersten Differentialquotienten, nämlich $\frac{a \sin 2x}{\sin 2ax}$ für $x = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ erlangt.

111. Die Form $0 \cdot \infty$. *Wenn $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ und bei einem bestimmten Grenzübergange $\lim x = a$*

$$\lim \varphi(x) = 0, \quad \lim \psi(x) = \infty$$

wird, so nimmt $f(x)$ die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ an, welche sich auf eine der Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ bringen läßt, z. B. dadurch, daß man $f(x)$ in die Gestalt

$$\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}, \text{ beziehungsweise } \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$$

bringt. Es treten dann die früheren Methoden in Kraft.

Einen Fall dieser Art bietet die Funktion

$$f(x) = x^m (l\,x)^n \qquad (m > 0,\ n > 0)$$

dar für $\lim x = +0$, wenn nur auch m, n solche Zahlen sind, daß x^m, $(l\,x)^n$ reelle Bedeutung haben. Schreibt man

$$f(x) = \frac{(l\,x)^n}{x^{-m}},$$

so kann das Verfahren von **110** angewandt werden, wonach

$$\lim_{x=+0} f(x) = \lim \frac{n\,(l\,x)^{n-1}\frac{1}{x}}{-m x^{-m-1}} = -\frac{n}{m} \lim x^m (l\,x)^{n-1};$$

ist n eine natürliche Zahl, so gibt die n-malige Wiederholung dieses Vorganges schließlich

$$\lim_{x=+0} f(x) = (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^n} \lim_{x=+0} x^m = 0,$$

und liegt n zwischen den natürlichen Zahlen p und $p+1$, so ist nach $(p+1)$-maliger Wiederholung

$$\lim_{x=+0} f(x) = (-1)^{p+1} \frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{m^{p+1}} \lim_{x=+0} x^m (l\,x)^{n-p-1} = 0,$$

weil $x^m (l\,x)^{n-p-1} = \frac{x^m}{(l\,x)^{p+1-n}}$ nun ein Bruch ist, dessen Zähler

gegen Null abnimmt, während der Nenner über jeden Betrag wächst.

Man hätte mit Berufung auf ein früher erledigtes Beispiel auch so vorgehen können: Setzt man $x = e^{-z}$, woraus $l\,x = -z$, so verwandelt sich $f(x)$ in

$$(-1)^n \frac{z^n}{e^{mz}} = \frac{(-1)^n}{m^n} \frac{(mz)^n}{e^{mz}},$$

und da $\lim x = +0$ zur Folge hat $\lim mz = +\infty$, so ist zufolge des ersten Beispiels in **110**

$$\lim_{x=+0} f(x) = \frac{(-1)^n}{m^n} \lim_{mz=+\infty} \frac{(mz)^n}{e^{mz}} = 0.$$

Die Form $\infty \cdot 0$ tritt bei der Funktion

$$f(x) = x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) \qquad (a > 0)$$

für $\lim x = +\infty$ (wie $-\infty$) ein; schreibt man dafür

$$f(x) = \frac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

und setzt $\frac{1}{x} = z$, so hat man es mit dem Quotienten

$$\frac{a^z - 1}{z}$$

für $\lim z = 0$ zu tun, der die Form $\frac{0}{0}$ annimmt; daher ist nach **109**, (2):

$$\lim_{x=\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{z=0} \frac{a^z - 1}{z} = \left(\frac{a^z\,l\,a}{1}\right)_{z=0} = l\,a.$$

Es soll gezeigt werden, daß $2^x \sin\frac{a}{2^x}$ für $x = \infty$ den Grenzwert a und $(a - x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}$ für $x = a$ den Grenzwert $\frac{2a}{\pi}$ hat.

112. Die Form $\infty - \infty$. *Wenn $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, und wenn bei einem bestimmten Grenzübergange $\lim x = a$ die beiden Teile $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zugleich gegen die Grenze $+\infty$ oder gegen die Grenze $-\infty$ konvergieren, so erscheint $f(x)$ in der unbestimmten Form $\infty - \infty$.*

Zur Ermittlung des Grenzwertes von $f(x)$ läßt sich auch hier mitunter von Reihenentwicklungen zweckmäßiger Gebrauch machen. Handelte es sich z. B. um

$$f(x) = \sqrt{(a+x)(b+x)} - \sqrt{(a-x)(b-x)}$$

für $\lim x = \infty$ — die beiden Quadratwurzeln positiv gedacht —, so bilde man mit Benutzung der Binomialreihe (98):

$$\sqrt{(a+x)(b+x)} = x\left(1 + \frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= x\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}\right)^2 + \cdots\right\},$$

$$\sqrt{(a-x)(b-x)} = x\left(1 - \frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= x\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{x} - \frac{ab}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{a+b}{x} - \frac{ab}{x^2}\right)^2 - \cdots\right\};$$

diese Entwicklungen sind zulässig, sobald nur x so groß geworden ist, daß $\frac{a+b}{x} + \frac{ab}{x^2}$ und $\frac{a+b}{x} - \frac{ab}{x^2}$ dem Betrage nach unter der Einheit liegen; es ist dann

$$f(x) = a + b - \frac{(a+b)ab}{2x^2} - \cdots$$

und hieraus

$$f(\infty) = \lim_{x=\infty} f(x) = a + b.$$

Desgleichen kann bei

$$f(x) = x - x^2\, l\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

das für $\lim x = \infty$ die Form $\infty - \infty$ annimmt*), von der Reihenentwicklung Gebrauch gemacht werden; denn sobald $x > 1$ geworden, ist

$$f(x) = x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \cdots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3x} + \cdots$$

und

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \frac{1}{2}\cdot$$

---

*) Die folgende Rechnung belehrt selbst darüber, daß der zweite Teil, der die Form $\infty \cdot 0$ annimmt, den Grenzwert ∞ hat.

Wo dieser Weg nicht eingeschlagen werden kann oder beschwerlich ist, da bringe man $f(x)$ in eine Gestalt, die für $\lim x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, indem man

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}, \qquad \psi(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)}$$

setzt derart, daß $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ für $\lim x = a$ gegen Null, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ aber weder gegen Null, noch gegen ∞ konvergieren. Dann erlangt

$$f(x) = \frac{\varphi_1(x)\,\psi_2(x) - \varphi_2(x)\,\psi_1(x)}{\varphi_2(x)\,\psi_2(x)}$$

die Form $\frac{0}{0}$, welche nach früher entwickelten Methoden zu behandeln ist. Auch eine der beiden Darstellungen:

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = l\,\frac{e^{-\psi(x)}}{e^{-\varphi(x)}} = l\,\frac{e^{\varphi(x)}}{e^{\psi(x)}}$$

kann zum Ziele führen.

Beispiele. 1) Es sei für

$$f(x) = 2\,x \operatorname{tg} x - \pi \sec x$$

der Grenzwert zu bestimmen bei $\lim x = \frac{\pi}{2}\cdot$ Man findet

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{2\,x \sin x - \pi}{\cos x} = \left(\frac{2 \sin x + 2\,x \cos x}{-\sin x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = -2.$$

2) Die Differenz $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ wird bei $\lim x = 0$ unbestimmt; es ist nun:

$$\lim_{x=0} f(x) = \lim \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim \frac{2\,x - \sin 2\,x}{2\,x \sin^2 x + x^2 \sin 2\,x}$$

$$= \lim \frac{2 - 2 \cos 2\,x}{2 \sin^2 x + 4\,x \sin 2\,x + 2\,x^2 \cos 2\,x}$$

$$= \lim \frac{4 \sin 2\,x}{6 \sin 2\,x + 12\,x \cos 2\,x - 4\,x^2 \sin 2\,x}$$

$$= \left(\frac{8 \cos 2\,x}{24 \cos 2\,x - 32\,x \sin 2\,x - 8\,x^2 \cos 2\,x}\right)_{x=0} = \frac{1}{3};$$

dreimal wiederholt sich die Form $\frac{0}{0}$ und erst der Quotient aus den vierten Differentialquotienten führt zu dem Grenzwerte.

3) Man weise nach, daß $\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x$ für $x = 0$ den Grenzwert $\frac{2}{3}$ besitzt.

113. Die Formen 0^0, ∞^0, 1^∞. *Eine Funktion von der Gestalt*

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)} \qquad (\varphi(x) > 0)$$

kann zu drei weiteren unbestimmten Formen Anlaß bieten; sie nimmt nämlich, wenn bei einem bestimmten Grenzübergange $\lim x = a$

$$\lim \varphi(x) = 0 \qquad \lim \psi(x) = 0,$$

die Form 0^0; ferner wenn

$$\lim \varphi(x) = \infty \qquad \lim \psi(x) = 0,$$

die Form ∞^0; endlich wenn

$$\lim \varphi(x) = 1 \qquad \lim \psi(x) = \infty,$$

die Form 1^∞ an. Geht man aber von der Funktion selbst zu ihrem Logarithmus über:

$$l f(x) = \psi(x)\, l\, \varphi(x),$$

so kommt man zu einem Ausdrucke, der in allen drei Fällen die bereits erledigte unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annimmt; hat man seinen Grenzwert ermittelt und heißt er A, so ist

$$\lim_{x=a} f(x) = e^A.$$

Beispiele. 1) Der Logarithmus von $f(x) = x^x$, d. i. $x\, l\, x$, hat für $\lim x = +0$ zufolge 111 den Grenzwert 0; mithin ist

$$\lim_{x=+0} x^x = 1.$$

2) Für $\lim x = \frac{\pi}{2} - 0$ tritt bei

$$f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$$

die Form ∞^0 ein; der Logarithmus hiervon, in der Gestalt

$$\frac{l \operatorname{tg} x}{\sec x}$$

geschrieben, nimmt die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, und es ist, nach zweimaliger Differentiation von Zähler und Nenner,

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0} \frac{l \operatorname{tg} x}{\sec x} = \lim \frac{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}}{\sec x \operatorname{tg} x}$$

$$= \lim \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = \lim \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x \sec^2 x} = \lim \frac{1}{2 \sec x} = 0,$$

daher

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = e^0 = 1.$$

3) Für $\lim z = \infty$ und ein beliebiges aber bestimmtes x erlangt

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{z}\right)^z$$

die Form 1^∞; der Logarithmus davon kann, sobald nur z dem absoluten Werte nach größer ist als x, entwickelt werden wie folgt:

$$z\, l\left(1 + \frac{x}{z}\right) = z\left(\frac{x}{z} - \frac{x^2}{2 z^2} + \cdots\right) = x - \frac{x^2}{2 z} + \cdots$$

und hat demnach für $\lim z = \infty$ den Grenzwert x; infolgedessen ist

$$\lim_{z=\infty} \left(1 + \frac{x}{z}\right)^z = e^x.$$

(Vgl. 30, (J), (K).)

4) Dieselbe unbestimmte Form wie in 3) stellt sich bei

$$f(x) = (\cos a x)^{\frac{b}{x^2}}$$

für $\lim x = 0$ ein; der Logarithmus hat die Form $\frac{0}{0}$ und gibt nach zweimaliger Differentiation

$$\lim_{x=0} \frac{b\, l \cos a x}{x^2}$$

$$= \lim \frac{-a b \sin a x}{2 x \cos a x} = \left(\frac{-a^2 b \cos a x}{2 \cos a x - 2 a x \sin a x}\right)_{x=0} = -\frac{a^2 b}{2};$$

daher ist

$$\lim (\cos a x)^{\frac{b}{x^2}} = e^{-\frac{a^2 b}{2}}.$$

5) Zu zeigen, daß $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{cosec}^r x}$ für $\lim x = +0$ entweder den Grenzwert 1 oder $e^{-\frac{1}{6}}$ oder 0 hat, je nachdem $r <, =$ oder > 2 ist. (Man bestimme nach einmaliger Differentiation den Grad des Zählers und Nenners.)

6) Nachzuweisen, daß $\lim\limits_{x=+0} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ und

$$\lim_{x=+0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{e}$$

ist.

Fünfter Abschnitt.

Maxima und Minima der Funktionen.

§ 1. Maxima und Minima der Funktionen einer Variablen.

114. Begriff der extremen Werte einer Funktion. In dem Verlaufe einer nicht einförmigen oder *nicht monotonen* stetigen Funktion (17) sind solche Werte der Variablen von besonderer Bedeutung, bei welchen der Übergang vom Wachsen ins Abnehmen oder das Umgekehrte stattfindet, mit anderen Worten, bei welchen die Trennung der Kontinua erfolgt, welche die Funktion in abwechselndem Sinne durchläuft. Die für solche Werte der Variablen geltenden Werte der Funktion sind es, welche in den Anwendungen der Analysis häufig vorzugsweise in Betracht kommen. Man bezeichnet sie als *extreme Werte* der Funktion oder als *Extreme* kurzweg; ihre genaue Charakteristik und Unterscheidung besteht in Folgendem.

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervalle (α, β) definierte eindeutige und stetige Funktion der Variablen x. Dieselbe hat an einer *innerhalb* (α, β) gelegenen Stelle $x = a$ einen *größten Wert* oder ein *Maximum*, wenn sich eine Umgebung von a feststellen läßt derart, daß der an der Stelle a geltende Wert $f(a)$ der Funktion größer ist als jeder andere aus dieser Umgebung; die Funktion hat an der mehrerwähnten Stelle einen *kleinsten Wert* oder ein *Minimum*, wenn sich eine Umgebung von a angeben läßt derart, daß der Funktionswert $f(a)$ kleiner ist als jeder andere aus dieser Umgebung.

Es läßt sich also dieser Definition zufolge ein positiver Betrag η so bestimmen, daß im Falle eines *Maximums*

$$f(a + h) - f(a) < 0 \tag{1}$$

und im Falle eines *Minimums*

$$(2) \qquad f(a+h) - f(a) > 0$$

für alle Werte von h, welche der Bedingung

$$|h| < \eta$$

genügen, mit alleiniger Ausnahme von $h = 0$. Es ist selbstverständlich, daß das Intervall $(a - \eta, a + \eta)$, welches die Umgebung von a ausmacht, ganz in dem Intervalle (α, β) enthalten sein muß.

Die zulässige Größe der Umgebung, also der äußerste Wert von η, wird davon abhängen, wie häufig $f(x)$ in (α, β) zwischen Wachstum und Abnahme wechselt; es darf aber für den Zweck der Untersuchung η unter diesem äußersten Werte bleiben und beliebig klein angenommen werden.

Die Begriffe des Maximums und Minimums beziehen sich also nicht auf die Gesamtheit der Werte der Funktion, sondern immer nur auf die Werte einer beliebig engen Umgebung. Eine Funktion kann in dem ihr zugewiesenen Intervalle mehrere oder selbst unbegrenzt viele Extreme erlangen und unter ihren verschiedenen Maximis kann es ein größtes, ebenso unter ihren Minimis ein kleinstes geben; das erstere stellt dann den absolut größten, das letztere den absolut kleinsten Wert dar, welchen die Funktion *innerhalb* (α, β) erreicht; mit diesen Werten wären noch diejenigen an den Grenzen des Intervalls, nämlich $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ zu vergleichen.

115. Notwendige Bedingung für ein Extrem bei stetigem Verlauf des ersten Differentialquotienten. Der Übergang vom Wachsen zum Abnehmen oder umgekehrt kann in verschiedener Weise vor sich gehen. Wir stellen den wichtigsten, die Regel bildenden Fall an die Spitze und setzen voraus, die Funktion $f(x)$ besitze an jeder Stelle innerhalb (α, β) einen Differentialquotienten im eigentlichen Sinne oder einen *vollständigen* Differentialquotienten (20). Unter dieser Voraussetzung läßt sich der Satz erweisen, *daß an einer Stelle, an welcher die Funktion ein Extrem erreicht, ihr Differentialquotient verschwindet.*

Im Falle eines Maximums ist nämlich vermöge der Relation (1)

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

für Werte von h aus dem Intervalle $(-\eta, 0)$ positiv, für Werte aus $(0, \eta)$ negativ, und der *eine* Grenzwert dieses Quotienten für $\lim h = \mp 0$ kann daher weder negativ noch positiv sein, es muß also

$$f'(a) = 0 \tag{3}$$

sein. Im Falle eines Minimums ist derselbe Quotient vermöge (2) links von a negativ, rechts davon positiv, sein als existierend vorausgesetzter Grenzwert für $\lim h = \mp 0$ kann deshalb weder positiv noch negativ, muß also notwendig gleich Null sein.

Daraus aber ist der folgende Schluß zu ziehen: *Wenn die Funktion $f(x)$ an jeder Stelle zwischen α und β einen eigentlichen Differentialquotienten besitzt, so sind die Werte von x, für welche sie ein Extrem erlangen kann, unter den Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ zu suchen.*

Wäre $x = a$ eine dieser Wurzeln, so bestünde die unmittelbarste Entscheidung der Frage, ob hier ein Extrem und welches von beiden stattfindet, in der Untersuchung des Vorzeichens von $f'(a+h)$ für entsprechend kleine, entgegengesetzt bezeichnete Werte von h; ist nämlich $f'(a+h)$ in einer entsprechend klein festgestellten Umgebung von a links von a positiv, rechts davon negativ, so ist $f(x)$ in dieser Umgebung links von a wachsend, rechts von a abnehmend und erlangt in a selbst ein Maximum, bei dem umgekehrten Verhalten ein Minimum.

Die Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + b$ beispielsweise besitzt für alle Werte von x einen eigentlichen Differentialquotienten:

$$f'(x) = 6x(x-1),$$

und die Gleichung $f'(x) = 0$ hat die beiden Wurzeln $x = 0$ und $x = 1$. Bedeutet δ eine positive Zahl < 1, so ist

$$f'(-\delta) = \quad 6\delta(1+\delta) > 0$$
$$f'(\delta) = -6\delta(1-\delta) < 0;$$

demnach hat die Funktion an der Stelle $x = 0$ ein Maximum, und dieses ist $f(0) = b$. Ferner ist unter der gleichen Voraussetzung über δ

$$f'(1-\delta) = -6\delta(1-\delta) < 0$$
$$f'(1+\delta) = \quad 6\delta(1+\delta) > 0,$$

an der Stelle $x = 1$ tritt also ein Minimum ein, und dasselbe ist $f(1) = b - 1$.

116. Unterscheidung zwischen Maximum und Minimum. Die Entscheidung kann einfacher getroffen werden, wenn die Funktion $f(x)$ an jeder Stelle innerhalb (α, β) auch einen eigentlichen zweiten Differentialquotienten $f''(x)$ besitzt und wenn dieser an der Stelle $x = a$ nicht Null ist. Es gilt dann der Satz: *Wenn $f''(a) < 0$, so ist $f(a)$ ein Maximum, und wenn $f''(a) > 0$, so ist $f(a)$ ein Minimum.*

Ist nämlich $f''(a) < 0$, so muß es eine Umgebung von a geben, in welcher auch

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

wovon ja $f''(a)$ der Grenzwert für $\lim h = \mp 0$ ist, negativ ist; wegen $f'(a) = 0$ bleibt in dieser Umgebung auch

$$\frac{f'(a+h)}{h}$$

negativ; daher ist $f'(a+h)$ links von a positiv, rechts davon negativ, $f(a)$ also in der Tat ein Maximum.

Ist $f''(a) > 0$, so muß sich eine Umgebung von a begrenzen lassen, in welcher auch

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

oder das diesem gleichkommende

$$\frac{f'(a+h)}{h}$$

positiv bleibt; infolgedessen ist $f'(a+h)$ links von a negativ, rechts davon positiv, $f(a)$ also tatsächlich ein Minimum.

Wenn jedoch $f''(a) = 0$ ist, dann gilt zunächst der folgende Satz: *Ist $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$, so ist $f(a)$ kein Extrem; ist aber auch $f'''(a) = 0$, dagegen $f^{IV}(a) \neq 0$, so ist $f(a)$ ein Extrem und entscheidet das Vorzeichen von $f^{IV}(a)$ über die Art des Extrems nach derselben Regel, wie vorhin $f''(a)$ entschieden hat.*

Wenn nämlich $f''(a) = 0$ und $f'''(a) < 0$, so sind die Kriterien dafür vorhanden, daß $f'(a)$ ein Maximum ist; da aber $f'(a) = 0$ ist, so muß $f'(a+h)$ in gehöriger Nähe und zu beiden Seiten von a negativ sein; dann aber ist $f(a)$ kein Extrem.

In gleicher Weise schließt man aus $f''(a) = 0$ und $f'''(a) > 0$, daß $f'(a) = 0$ ein Minimum ist, daß also $f'(a+h)$ in gehöriger Nähe und beiderseits von a positiv sein müsse, woraus folgt, daß $f(a)$ kein Extrem ist.

Der zweite Teil der Behauptung erweist sich folgendermaßen als richtig.

Aus $f'''(a) = 0$ und $f^{IV}(a) < 0$ schließt man, daß $f''(a) = 0$ ein Maximum ist, daß also eine Umgebung von a existiert, in welcher $f''(a+h)$ negativ bleibt mit alleinigem Ausschluß von $h = 0$; in dieser selben Umgebung ist $f'(a+h)$ abnehmend, und da $f'(a) = 0$, so ist $f'(a+h)$ links von a positiv, rechts davon negativ, infolgedessen $f(a)$ ein Maximum.

In analoger Weise ergibt sich, daß für $f^{IV}(a) > 0$ $f(a)$ ein Minimum ist.

117. Allgemeines Kriterium. Um zu einem allgemeinen Kriterium für das Vorhandensein eines Extrems an einer Stelle $x = a$, an welcher $f'(x) = 0$ ist, zu gelangen, machen wir die Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ endliche Differentialquotienten bis zur Ordnung n besitze, daß ferner außer $f'(a) = 0$ auch

$$f''(a) = 0, \ f'''(a) = 0, \dots f^{(n-1)}(a) = 0,$$

während $f^{(n)}(a) \neq 0$ sei; schließlich werde angenommen, daß außer den Differentialquotienten bis zur $(n-1)$-ten Ordnung, welche notwendig stetige Funktionen sind (21), auch der n-te Differentialquotient wenigstens in einer angebbaren Umgebung von a stetig sei.

Unter diesen Voraussetzungen läßt die Funktion die Anwendung der Taylorschen Formel zu, und diese (91, (6) und (7) gibt:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{1 \cdot 2 \dots n} h^n, \qquad (0 < \theta < 1)$$

woraus

$$(4) \qquad f(a+h) - f(a) = \frac{h^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(a + \theta h).$$

Vermöge der Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ läßt sich eine hinreichend kleine Umgebung von a feststellen so, daß innerhalb derselben $f^{(n)}(x)$ von $f^{(n)}(a)$ um beliebig wenig sich unterscheidet, daß also $f^{(n)}(a + \theta h)$ dasselbe Vorzeichen hat wie $f^{(n)}(a)$.

Dann hat für ein *gerades* n die Differenz $f(a+h) - f(a)$ in dieser ganzen Umgebung, also zu beiden Seiten von a, dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(a)$; $f(a)$ ist sonach ein Extrem und zwar ein Maximum, wenn $f^{(n)}(a) < 0$, ein Minimum, wenn $f^{(n)}(a) > 0$.

Für ein *ungerades* n dagegen ändert die Differenz $f(a+h) - f(a)$ mit h zugleich ihr Vorzeichen, infolgedessen ist $f(a)$ kein Extrem.

Das Ergebnis dieser Betrachtung kann in dem Satze zusammengefaßt werden: *An einer Stelle $x = a$, welche der Gleichung $f'(x) = 0$ genügt, hat die Funktion $f(x)$ ein Extrem nur dann, wenn der nächste an dieser Stelle nicht verschwindende Differentialquotient von $f(x)$ von gerader Ordnung ist; ist er negativ, so ist $f(a)$ ein Maximum, ist er positiv, so ist $f(a)$ ein Minimum.*

Die beiden in **116** nachgewiesenen Sätze sind spezielle Fälle dieses allgemeinen Satzes.

Das gemeinsame Merkmal des Maximums und Minimums, das in der Gleichung

$$f'(a) = 0$$

sich ausspricht, hat im Zusammenhalte mit **22**, 2) eine einfache Bedeutung in dem Falle, wo man die Werte von $f(x)$ durch die Ordinaten einer Kurve in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellt; es sagt aus, daß in einem Punkte, der einem Extrem entspricht, die Tangente an jene Kurve parallel ist zur Abszissenachse. Man erkennt leicht, daß dies auch für schiefwinklige Koordinaten gilt.

118. Beispiele. 1) Die in **115** behandelte Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + b,$$

deren Differentialquotient für $x = 0$ und $x = 1$ Null wird, erledigt sich mit Hilfe des zweiten Differentialquotienten

$$f'''(x) = 12x - 6,$$

indem $f''(0) = -6$ und $f''(1) = 6$ ist; daher ist $f(0) = b$ ein Maximum und $f(1) = b - 1$ ein Minimum.

2) Eine Funktion von der Form

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + a_2 x^{m+2} + \cdots$$

— m eine natürliche Zahl $\geqq 2$ —, wo die rechte Seite ein Polynom oder eine konvergente Potenzreihe ist, besitzt an der Stelle $x = 0$ ein Extrem, wenn m *gerad*, und zwar ein Maximum oder Minimum, je nachdem a_0 negativ oder positiv ist; das Extrem selbst ist $f(0) = 0$.

Denn es ist $f'(0) = 0$, und der erste für $x = 0$ nicht verschwindende Differentialquotient ist

$$f^{(m)}(x) = 1 \cdot 2 \ldots m a_0 + 2 \cdot 3 \ldots (m+1) a_1 x + \cdots,$$

daher $f^{(m)}(0) = 1 \cdot 2 \ldots m a_0$.

Von diesem Satze kann häufig Gebrauch gemacht werden. So folgt aus demselben beispielsweise, daß

$$y = \frac{x^2}{2p} + q$$

ein Maximum oder Minimum erreicht bei $x = 0$, je nachdem $p < 0$ oder $p > 0$; denn nach obigem gilt dies für $y - q$, und zwar ist das Extrem dieser Differenz 0, daher jenes von y gleich q. Desgleichen kann über das Extrem von

$$y = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

entschieden werden; bringt man nämlich diese Gleichung auf die Form

$$y - \gamma + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\alpha x + \beta)^2,$$

so ist unmittelbar zu erkennen, daß $y - \gamma + \frac{\beta^2}{\alpha}$ für $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ den maximalen oder minimalen Wert 0 annimmt, je nachdem $\alpha < 0$ oder $\alpha > 0$; dieselbe Erscheinung tritt auch bei y selbst ein, und zwar ist dessen maximaler, bzw. minimaler Wert $\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}$. (Scheitel der Parabel.)

Auch bei der Funktion

$$f(x) = x^m (a - x)^n,$$

in welcher m, n natürliche Zahlen > 2 und a eine positive Zahl bedeuten sollen, kann der Satz benutzt werden; faßt man sie als nach x geordnetes Polynom auf, so ist $a^n x^m$ das niedrigste Glied, daher $f(0) = 0$ ein Minimum, wenn m gerad ist; man kann die Funktion aber auch in der Gestalt

$$(a - (a - x))^m (a - x)^n$$

schreiben und als nach $a - x$ geordnetes Polynom ansehen, dessen niedrigstes Glied dann $a^m(a - x)^n$ ist; infolgedessen ist $f(a) = 0$ ein Minimum, wenn n gerad ist. *Ein* Extrem, und zwar ein Maximum, besitzt die Funktion unbedingt; denn

$$f'(x) = x^{m-1}(a - x)^{n-1}\{ma - (m + n)x\}$$

verschwindet außer an den beiden erledigten Stellen $x = 0$ und $x = a$ auch an der Stelle

$$x = \frac{ma}{m + n},$$

und weil bei dem Durchgange durch dieselbe $f'(x)$ von positiven Werten zu negativen Werten übergeht, so ist

$$f\left(\frac{ma}{m + n}\right) = m^m n^n \left(\frac{a}{m + n}\right)^{m+n}$$

ein Maximum.

3) Die extremen Werte der Funktion

$$(\alpha) \qquad y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{Ax^2 + 2Bx + C}$$

können außer auf dem Wege der Differentialrechnung auch in der folgenden rein algebraischen Weise bestimmt werden. Ordnet man die Gleichung nach x und löst die so erhaltene quadratische Gleichung:

$$(Ay - a)x^2 + 2(By - b)x + Cy - c = 0$$

nach x auf:

$$x = \frac{-(By - b) \pm \sqrt{(By - b)^2 - (Ay - a)(Cy - c)}}{Ay - a},$$

so bestimmen die Grenzen für die Realität von x zugleich die extremen Werte von y; man erhält sie aus der Gleichung

$$(By - b)^2 - (Ay - a)(Cy - c) = 0,$$

die geordnet lautet:

$$(\beta) \qquad (AC - B^2)y^2 - (Ac + aC - 2Bb)y + ac - b^2 = 0;$$

sie hat aber zur Folge

$$(\gamma) \qquad x = -\frac{By - b}{Ay - a}$$

und daraus ergibt sich weiter mit Berücksichtigung des ursprünglichen Ansatzes:

$$(\delta) \qquad y = \frac{ax + b}{Ax + B} = \frac{bx + c}{Bx + C},$$

so daß man zur Bestimmung der Stellen, an welchen ein Wechsel von wachsenden zu abnehmenden y und umgekehrt stattfindet, die quadratische Gleichung hat:

$$(\varepsilon) \qquad (Ab - aB)x^2 + (Ac - aC)x + Bc - bC = 0.$$

Entweder bestimmt man aus (β) die Werte von y und dazu mittels (γ) die zugehörigen Werte von x, oder aus (ε) die Werte von x und mittels (δ) die dazugehörigen Werte von y.

Beispielsweise ergibt sich für $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ die Lösung: $x_1 = 1$, $y_1 = 3$ (Maximum); $x_2 = -1$, $y_2 = \frac{1}{3}$ (Minimum).

4) Es sind die extremen Werte der Funktion

$$f(x) = a \cos x + b \sin x$$

festzustellen.

Besitzt eine periodische Funktion — und eine solche ist $f(x)$ — *einen* extremen Wert, so besitzt sie deren unendlich viele von gleicher Größe und zwar an Stellen, welche um je eine Periode voneinander abstehen; deshalb genügt es, die Untersuchung auf das Intervall einer Periode, hier also auf $(0, 2\pi)$, zu beschränken.

Es ist

$$f'(x) = -a \sin x + b \cos x$$
$$f''(x) = -a \cos x - b \sin x;$$

aus $f'(x) = 0$ ergibt sich

$$\sin x : \cos x = b : a,$$

woraus

$$\sin x = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos x = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}};$$

für diese Werte von $\sin x$, $\cos x$ nimmt $f''(x)$ einen der Werte

$$\mp\sqrt{a^2 + b^2}$$

an; infolgedessen hat die Funktion an der durch

$$\sin x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

bestimmten Stelle ein Maximum von der Größe $\sqrt{a^2 + b^2}$ und an der durch

$$\sin x = \frac{b}{-\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos x = \frac{a}{-\sqrt{a^2 + b^2}}$$

bestimmten Stelle ein Minimum von der Größe $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

Man bemerke, daß sich die vorgelegte Funktion in die Gestalt

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(x - \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right)$$

bringen läßt, an welcher die extremen Werte unmittelbar zu erkennen sind.

5) Die Zahl a ist in zwei Teile zu zerlegen derart, daß das Produkt dieser Teile den größtmöglichen Wert annehme.

Ist der eine Teil x, so ist $a - x$ der andere, und es handelt sich um das Maximum von

$$f(x) = x(a - x).$$

Aus $f'(x) = a - 2x = 0$ folgt $x = \frac{a}{2}$, und da $f''(x) = -2$ negativ ist, so ist tatsächlich

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$$

der größtmögliche Wert des Produktes.

Auf diesen einfachen Fall lassen sich mancherlei Probleme zurückführen; als Beleg dafür mögen die folgenden dienen.

a) Unter den Rechtecken von gegebenem Umfange $2a$ jenes von der größten Fläche zu bestimmen.

Heißt eine Seite des Rechtecks x, so ist $a - x$ die andere; es soll also $x(a - x)$ ein Maximum werden. Das verlangte Rechteck ist demnach das Quadrat.

β) Unter den einem gegebenen Kreise vom Durchmesser a eingeschriebenen Rechtecken dasjenige von der größten Fläche aufzusuchen.

Ist x die eine Seite des Rechtecks, so ist das Quadrat der anderen $a^2 - x^2$, $x\sqrt{a^2 - x^2}$ die Fläche; ihr Quadrat $x^2(a^2 - x^2)$ wird ein Maximum für $x^2 = \frac{a^2}{2}$, die Fläche selbst ist dann ebenfalls ein Maximum $= \frac{a^2}{2}$ und der Gestalt nach ein Quadrat, weil $x = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

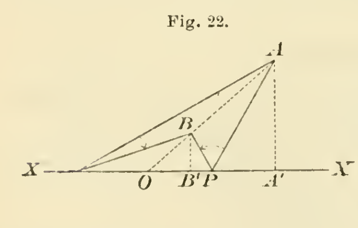
γ) Den Elevationswinkel bei dem schiefen Wurf zu bestimmen, bei welchem sich die größte Wurfweite einstellt.

Heißt c die Wurfgeschwindigkeit, g die Beschleunigung der Schwerkraft und x der Elevationswinkel, so ist $\frac{2c^2 \sin x \cos x}{g}$ die Wurfweite; sie wird zu einem Maximum, wenn $\sin x \cos x$ oder $\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x(1 - \sin^2 x)$ seinen größten Wert erlangt; dies aber geschieht für $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, also für $x = \frac{\pi}{4}$, d. i. bei einem Winkel von 45^0.

δ) Die Höhenlage der Öffnung in der Seitenwand eines Gefäßes zu bestimmen, bei welcher die Ausflußweite am größten ist.

Bedeutet h die Tiefe der horizontalen Grundebene und x die Tiefe der Öffnung unter dem Flüssigkeitsspiegel, so ist die Ausflußweite $2\sqrt{x(h-x)}$; sie wird am größten, wenn $x(h-x)$ ein Maximum erreicht, und dieses tritt für $x = \frac{h}{2}$ ein.

Fig. 22.



6) Es sind zwei Punkte A, B und eine Gerade XX' gegeben (Fig. 22); man soll jene Punkte P in XX' bestimmen, für welche der Winkel APB — als algebraische Größe aufgefaßt — einen extremen Wert erlangt.

Bezeichnet O den Schnittpunkt der Geraden AB mit XX', so ist

$$\theta = APB = XPB - XPA;$$

setzt man $OA = a$, $OB = b$, $OP = x$, $XOA = \alpha$, fällt AA' und BB' senkrecht zu XX', so findet sich:

$$XPA = \operatorname{Arc\,tg} \frac{a \sin\alpha}{a\cos\alpha - x}$$

$$XPB = \operatorname{Arc\,tg} \frac{b \sin\alpha}{b\cos\alpha - x}$$

und daraus

$$\theta = \operatorname{Arc\,tg} \frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha - x} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{a\sin\alpha}{a\cos\alpha - x}$$

$$= \operatorname{Arc\,tg} \frac{(a-b)\sin\alpha \cdot x}{ab - (a+b)\cos\alpha \cdot x + x^2}.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, bezeichne man Zähler und Nenner des letzten Bruches mit u, v, so daß $\theta = \operatorname{Arc\,tg} \frac{u}{v}$; dann ist

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\dfrac{u'v - uv'}{v^2}}{1 + \dfrac{u^2}{v^2}} = \frac{u'v - uv'}{u^2 + v^2},$$

und es lautet somit die für einen extremen Wert notwendige Bedingung:

$$u'v - uv' = 0,$$

d. h.

$$(a-b)\sin\alpha\{ab - (a+b)\cos\alpha \cdot x + x^2\}$$
$$-(a-b)\sin\alpha \cdot x\{-(a+b)\cos\alpha + 2x\} = 0,$$

oder nach Ausführung der Rechnung

$$x^2 - ab = 0,$$

woraus

$$x = \pm\sqrt{ab}.$$

In analytischem Sinne entspricht die eine Lösung einem Maximum, die andere einem Minimum von θ; um eine Unterscheidung treffen zu können, ist eine Festsetzung über θ notwendig: θ soll den *hohlen* Winkel bedeuten, durch welchen PA in PB übergeführt wird, und soll *negativ* oder *positiv* sein, je nachdem die Drehung im Sinne des Uhrzeigers oder in dem entgegengesetzten Sinne vor sich geht. Unter solchen Umständen ist θ positiv, wenn in Fig. 22 P rechts von O liegt, negativ, wenn P links von O liegt; es entspricht dann $x = +\sqrt{ab}$ ein Maximum, $x = -\sqrt{ab}$ ein Minimum.

Sind a b entgegengesetzt bezeichnet, liegen also A, B zu entgegengesetzten Seiten von XX' (Fig. 23), so zeigt die Lösung an, daß es keinen größten oder kleinsten Wert von θ gibt.

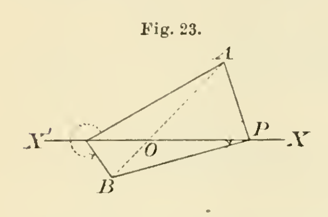


Fig. 23.

Versteht man unter θ den Winkel, durch welchen PA in PB übergeführt wird mittels einer Drehung gegen den Sinn des Uhrzeigers*), so durchläuft θ, während x das Intervall $(-\infty, +\infty)$ beschreibt, beständig abnehmend das Intervall $(2\pi, 0)$, es findet daher tatsächlich weder ein Maximum noch ein Minimum statt.

Die Aufgabe kann durch geometrische Betrachtung wie folgt gelöst werden. Den Ort der Punkte P, für welche der Winkel APB (Fig. 22) konstant ist, bildet ein Kreisbogen über der Sehne AB; die beiden Kreise des Kreisbüschels mit den Grundpunkten A, B, welche die Gerade XX' *berühren*, geben in den Berührungspunkten die Lösungen der Aufgabe. Denn, geht man von einem dieser Kreise über zu einem ein wenig größeren aus dem Büschel, der die Gerade XX' *schneidet*, so ruht in diesem, wie man sich durch eine einfache Betrachtung überzeugt, über der Sehne AB ein kleinerer Winkel als in dem berührenden Kreise.

Handelte es sich in Fig. 22 um jenen Punkt in XX', aus welchem die Strecke AB unter dem *größten* Winkel erscheint, so entspräche dieser Frage der Punkt $x = +\sqrt{ab}$, rechts von O.

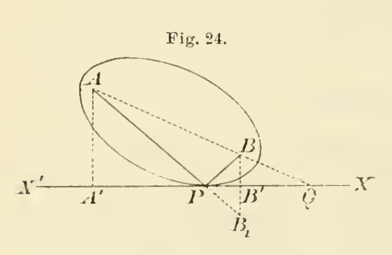


Fig. 24.

7) Es sind zwei Punkte A, B und eine sie nicht trennende Gerade XX' gegeben (Fig. 24). Man soll den kürzesten über einen Punkt von XX' führenden Weg von A nach B bestimmen.

Einem Grundsatze der Geometrie zufolge wird der Weg

*) Die Festsetzung ist beidemal so getroffen, daß θ bei Überschreitung von $x = 0$ stetig bleibt.

aus zwei geradlinigen Strecken sich zusammensetzen, so daß es darauf ankommt, den Punkt P in XX' so zu bestimmen, daß $s = AP + PB$ ein Minimum werde.

Setzt man $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$, $A'P = x$, so ist

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2},$$

und die notwendige Bedingung für ein Extrem lautet:

$$(\alpha) \qquad \frac{ds}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0,$$

oder in den Linien der Figur ausgedrückt:

$$\frac{A'P}{AP} = \frac{PB'}{BP};$$

daraus schließt man auf die Ähnlichkeit der Dreiecke $AA'P$ und $BB'P$ und hieraus wieder auf die Gleichheit der Winkel $X'PA$ und XPB (Reflexionsgesetz). Die Konstruktion von P geschieht in der Weise, daß $B'B_1 = BB'$ gemacht und A mit B_1 verbunden wird.

Die direkte Verfolgung der Bedingungsgleichung (α) führt nach Beseitigung der Irrationalitäten und der Nenner zu der quadratischen Gleichung

$$(\beta) \qquad (b^2 - a^2)x^2 + 2\,a^2 c x - a^2 c^2 = 0,$$

und diese gibt die beiden Wurzeln

$$x_1 = \frac{ac}{a + b}, \quad x_2 = \frac{ac}{a - b};$$

die erste leitet auf die gefundene Lösung hin; denn aus der hervorgehobenen Ähnlichkeit folgt

$$A'P : a = (c - \overline{A'P}) : b,$$

woraus

$$A'P = \frac{ac}{a + b} = x_1.$$

Die zweite Lösung ist der gestellten Aufgabe fremd und rührt daher, daß die Gleichung (β) umfassender ist als (α) infolge der ausgeführten Quadrierung; die Gleichung (β) schließt auch die Bedingung für das Maximum von $AP - BP$ oder von

$$\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

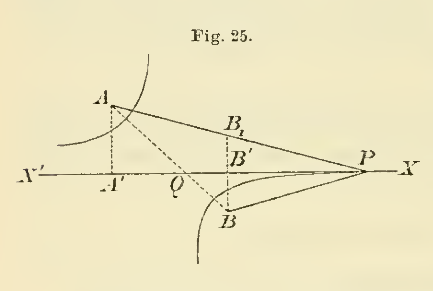
in sich und hierfür gilt x_2, das den Schnittpunkt Q der Geraden AB mit XX' bestimmt; in der Tat ist

$$AP - PB \leqq AB,$$

daher AB der Maximalwert der Differenz $AP - PB$, welcher sich dann einstellt, wenn P mit Q zusammenfällt.

Man hätte auch von der folgenden Betrachtung ausgehen können. Der Ort der Punkte P, für welche $AP + PB$ einen bestimmten konstanten Wert s hat, ist eine Ellipse mit den Brennpunkten AB und der großen Achse s (Fig. 24); die kleinste unter diesen (konfokalen) Ellipsen, welche mit der Geraden XX' reelle Punkte gemein hat, ist diejenige, welche sie berührt; der Berührungspunkt bestimmt die Lösung der Aufgabe und hat nach einer bekannten Eigenschaft der Ellipsentangente eine solche Lage, daß $\sphericalangle X'PA = \sphericalangle XPB$.

Fig. 25.



8) Es sind zwei Punkte A, B und eine sie trennende Gerade XX' gegeben (Fig. 25). Man soll denjenigen Punkt P in XX' bestimmen, für welchen die Differenz

$$d = AP - PB$$

ein Maximum wird.

Die analytische Behandlung der Aufgabe führt zu der nämlichen Gleichung (β) wie vorhin. Von den beiden Wurzeln entspricht nun

$$x_2 = \frac{ac}{a - b}$$

dem verlangten Maximum und liefert den Punkt P, zu dessen Konstruktion $B'B_1 = BB'$ zu machen und A mit B_1 zu verbinden ist; dieser Punkt ist also durch die Gleichheit der Winkel $X'PA$ und $X'PB$ charakterisiert. Die zweite Lösung

$$x_1 = \frac{ac}{a + b},$$

welche auf den Schnittpunkt Q der Geraden AB mit XX' hinleitet, ist der gestellten Aufgabe fremd und bestimmt das Minimum von $AP + PB$; denn tatsächlich ist

$$AP + PB \gtreqless AB,$$

daher AB der kleinste Wert von $AP + PB$, welcher eintritt, wenn P mit Q zusammenfällt.

Geometrisch löst sich die gestellte Aufgabe durch folgende Betrachtung. Der Ort der Punkte P, für welche die Differenz $AP - BP$ einen bestimmten konstanten Wert d hat, ist eine Hyperbel mit den Brennpunkten A, B und der reellen Achse d; diejenige unter diesen konfokalen Hyperbeln, welche die Gerade XX' berührt, hat unter denen, die mit dieser Geraden reelle Punkte gemein haben, die größte reelle Achse; ihr Berührungspunkt bestimmt also die Lösung der Aufgabe und liegt nach einer bekannten Eigenschaft der Hyperbel so, daß $\sphericalangle X'PA = \sphericalangle X'PB$.

9) Es sind zwei Punkte A, B und eine sie trennende Ebene MM' gegeben (Fig. 26). Man soll den Weg von A nach B bestimmen, welchen ein Bewegliches in der kürzesten Zeit zurücklegt, wenn es sich von A bis zur Ebene mit der Geschwindigkeit u und von da ab bis B mit der Geschwindigkeit v bewegt.

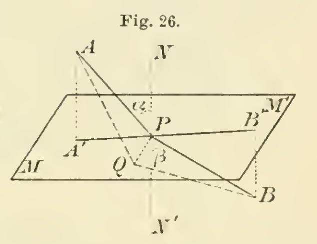


Fig. 26.

Der Weg wird sich notwendig aus zwei geradlinigen Strecken zusammensetzen und bestimmt sein, sobald man den Punkt P der Ebene kennt, über welchen er führt. Von diesem läßt sich ferner erweisen, daß er in die Verbindungslinie der orthogonalen Projektionen A', B' von A, B auf MM' falle, daß der Weg selbst also in der durch A, B zu MN gelegten Normalebene verlaufe. Denn zu einem Wege wie AQB, der über einen Punkt Q außer $A'B'$ führt, läßt sich immer ein Weg finden, der in kürzerer Zeit zurückgelegt wird als AQB; man braucht nur QP senkrecht zu $A'B'$ zu ziehen, und erkennt sogleich, daß $AP < AQ$, $BP < BQ$, daß also auch APB in kürzerer Zeit zurückgelegt wird als AQB.

Ist $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$, $A'P = x$, so ist die für den Weg APB erforderliche Zeit

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v},$$

und ihr kleinster Wert ergibt sich, wenn P so gewählt wird, daß

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0,$$

oder in den Linien der Figur ausgedrückt, daß

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{A'P}{AP} = \frac{1}{v} \cdot \frac{PB'}{BP};$$

bezeichnet man also die Winkel APN und BPN', welche die Wegteile mit dem Lote NN' zur Ebene einschließen, mit α, β, so ist der verlangte Weg durch die Beziehung

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{u}{v}$$

gekennzeichnet, wonach das Sinusverhältnis der genannten Winkel gleich sein muß dem analog gebildeten Verhältnis der Geschwindigkeiten (Refraktionsgesetz).

10) Man erledige die folgenden Fälle.

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$
$\{x = 1,\ y = 2$ (Max.); $x = 2,\ y = 1$ (Min.)$\}$.

b) $y = x - x^3$
$\left\{x = \frac{\sqrt{3}}{3},\ y = \frac{2\sqrt{3}}{9}\right.$ (Max.); $x = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ (Min.)$\big\}$.

c) $y = x^3 - 3x^2 + 6x$ {weder ein Max. noch ein Min.}.

d) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$
$\{x = 0,\ y = -1$ (Min.); $x = -2,\ y = \frac{5}{3}$ (Max.)$\}$.

11) Ein einseitig offenes zylindrisches Hohlgefäß von gegebenem Fassungsraum ist so zu formen, daß es eine möglichst kleine Oberfläche habe (Basisradius = Höhe).

12) Ein beiderseits geschlossener Hohlzylinder von gegebenem Volumen ist so zu formen, daß er eine möglichst kleine Oberfläche besitze (Basisdurchmesser = Höhe).

13) Einer gegebenen Kugel ist ein Kegel von minimalem Volumen umzuschreiben (Höhe = doppeltem Kugeldurchmesser, Kegelvolumen = doppeltem Kugelvolumen).

14) Der Raum unter einem kegelförmigen Zeltdach ist gegeben; wie ist dasselbe zu gestalten, damit es eine möglichst kleine Oberfläche (Mantelfläche) erhalte? (Höhe = Basisradius $\times \sqrt{2}$; Zentriwinkel des ausgebreiteten Mantels $208^0 50'$).

119. Extreme Werte bei singulärem Verhalten des Differentialquotienten. Die bisher gepflogenen Untersuchungen über die Extreme einer stetigen Funktion $f(x)$ waren an die Voraussetzung geknüpft, daß die Funktion an jeder Stelle innerhalb des Intervalls (α, β), für welches sie definiert ist, einen vollständigen Differentialquotienten besitze. Aber auch bei anderem Verhalten der Funktion können sich extreme Werte einstellen.

1) Angenommen, an einer Stelle a zwischen α und β höre die Ableitung $f'(x)$ auf definiert zu sein; dagegen gebe es dort einen bestimmten linken und ebenso einen bestimmten rechten Differentialquotienten (**20**), und die beiden seien ungleich bezeichnet; dann ist $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem bei der angegebenen Ordnung der beiden Differentialquotienten ein Übergang vom positiven zum negativen oder das Umgekehrte stattfindet.

Denn im ersten Falle ist

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

das für $\lim h = -0$ gegen eine positive Grenze konvergiert, für negative h, deren Betrag über eine angebbare Grenze nicht hinausreicht, positiv, folglich für solche h

$$f(a+h)-f(a)<0;$$

derselbe Quotient, da er für $\lim h = +0$ gegen eine negative Grenze konvergiert, bleibt für positive h unter einem angebbaren Betrage negativ, so daß für solche h

$$f(a+h)-f(a)<0;$$

dadurch ist aber $f(a)$ als Maximum erwiesen (**114**, (1)).

Ähnlich gestaltet sich der Beweis im zweiten Falle.

Der Übergang vom Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt äußert sich, wenn man $f(x)$ durch die Ordinaten einer

Kurve darstellt, im vorliegenden Falle in solcher Weise, daß die Kurve an der Übergangsstelle zwei verschiedene Tangenten aufweist (**17**, Fig. 4).

Als Beispiel diene die Funktion

$$f(x) = b + \sqrt{(x-a)^2},$$

wo die Wurzel als *positiv* aufgefaßt wird; diese Funktion besitzt an jeder Stelle mit Ausnahme von $x = a$ einen bestimmten Differentialquotienten:

$$f'(x) = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2}},$$

der negativ und $= -1$ ist im Intervalle $(-\infty, a)$, positiv und $= +1$ im Intervalle $(a, +\infty)$; an der Stelle a selbst ist der linke Differentialquotient -1, der rechte $+1$, daher ist $f(a) = b$ ein Minimum. — Die Funktion $f(x)$ ist geometrisch durch die Ordinaten der Schenkel des rechten Winkels LMN (Fig. 27) dargestellt, dessen Scheitel die Koordinaten (a, b) hat und dessen Schenkel gegen die Achsen gleichgeneigt sind.

Fig. 27.

2) Angenommen ferner, die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ sei an einer Stelle $x = a$ innerhalb (α, β) nicht definiert und werde bei Annäherung an dieselbe unendlich groß in der Weise, daß $\lim\limits_{x=a-0} f'(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x=a+0} f'(x) = -\infty$ oder umgekehrt; dann ist $f(a)$ ein Extrem und zwar ein Maximum, wenn $f'(x)$ sich in der erstgedachten Weise verhält, ein Minimum, wenn es das umgekehrte Verhalten zeigt.

Die Begründung hierfür ist dieselbe wie vorhin.

Der Übergang vom Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt äußert sich bei geometrischer Darstellung jetzt so, daß die beiden bei $x = a$ zusammenstoßenden Teile der Kurve eine zur y-Achse parallele Tangente haben (Fig. 28).

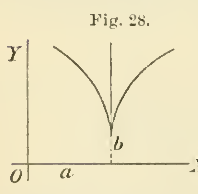


Fig. 28.

Eine solche Erscheinung weist die durchaus stetige Funktion

$$f(x) = b + \sqrt[3]{(x-a)^2}$$

auf, indem ihr Differentialquotient

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-a}},$$

an der Stelle $x = a$ nicht definiert, bei unbegrenzter Annäherung an dieselbe unendlich wird, und zwar ist für $\lim x = a - 0$ sein Grenzwert $-\infty$, für $\lim x = a + 0$ aber $+\infty$; daher ist $f(a) = b$ ein Minimum (Fig. 28).

120. Extreme Werte einer implizit gegebenen Funktion. Es bleibt noch zu zeigen, wie man *die extremen Werte einer implizit gegebenen Funktion* ermittelt.

Durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{5}$$

sei y als stetige Funktion von x definiert. Ihr Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0; \tag{6}$$

er muß — von den in **119** behandelten Ausnahmefällen abgesehen, welche jedesmal eine besondere Untersuchung erfordern — für einen extremen Wert verschwinden, und dies hat zur Folge, daß auch

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

wird. Besitzen nun die Gleichungen (5) und (7) gemeinsame Lösungen, deren eine

$$x = a, \quad y = b$$

sein möge, so bezeichnet $x = a$ eine Stelle, an welcher y einen größten oder kleinsten Wert haben kann, und dieser extreme Wert selbst ist dann $y = b$. Darüber kann im Sinne von **116** in vielen Fällen schon durch den zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 y}{dx^2}$ entschieden werden; dieser aber ergibt sich *allgemein* aus der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

welche durch nochmalige Differentiation der Gleichung (6) entsteht (57); im vorliegenden Falle soll er jedoch an der Stelle $x = a$ untersucht werden, an welcher die Funktion y selbst den Wert b hat und an welcher $\frac{dy}{dx} = 0$ ist; für diese Stelle gilt also die einfache Beziehung

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{a,\,b} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{a,\,b}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_a = 0$$

woraus

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=a} = -\left(\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right)_{a,\,b}. \tag{8}$$

Ist dieser Wert nicht Null, so zeigt sein Vorzeichen an, ob $y = b$ ein Maximum ist oder ein Minimum.

Die Resultate dieser Untersuchung werden hinfällig, wenn für $x = a$, $y = b$ der Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial y}$ verschwindet; denn dann ist die Gleichung (7) eine Folge von (6) auch dann, wenn $\frac{dy}{dx}$ nicht Null ist. Dieser Fall wird später in anderem Zusammenhange zur Erledigung kommen.

Beispiele. 1) Es sind die extremen Werte von y zu bestimmen, wenn

$$F(x, y) = x^3 y^3 + y - x = 0.$$

Verbindet man mit dieser Gleichung die weitere

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 y^3 - 1 = 0,$$

so führt die Auflösung beider zu dem Wertepaar

$$x = \sqrt[5]{\frac{9}{8}}, \quad y = \sqrt[5]{\frac{4}{27}};$$

für dieses erlangt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6xy^3 \quad \text{den Wert } 2\sqrt[5]{\frac{8}{9}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^3 y^2 + 1 \text{ den Wert } \frac{5}{2},$$

folglich ist an der errechneten Stelle

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{4}{5}\sqrt[5]{\frac{8}{9}}$$

negativ und aus diesem Grunde $y = \sqrt[5]{\frac{4}{27}}$ ein Maximum von y.

2) Für die in 58, 2) bereits behandelte Funktion y, welche durch die Gleichung

$$F(x, y) = x^3 - 3\,axy + y^3 = 0$$

definiert ist, die extremen Werte zu bestimmen.

Aus der gegebenen und der aus ihr abgeleiteten Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3\,x^2 - 3\,ay = 0$$

ergeben sich durch Auflösung die Wertepaare:

$$x_1 = 0,\ \ y_1 = 0; \qquad x_2 = a\sqrt[3]{2},\ \ y_2 = a\sqrt[3]{4};$$

für das erste nimmt

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3\,y^2 - 3\,ax$$

den Wert 0 an und es tritt der erwähnte Ausnahmefall ein; für das zweite hat dieser Differentialquotient den Wert $3\,a^2\sqrt[3]{2}$, der zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6\,x$$

den Wert $6\,a\sqrt[3]{2}$; mithin ist an dieser zweiten Stelle

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{2}{a},$$

infolgedessen $y_2 = a\sqrt[3]{4}$ ein Maximum oder ein Minimum der Funktion y, je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$ ist.

3) Ist $xy(x - y) = 2\,a^3$, so ist für $x = -a$ $y = -2\,a$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$ ist.

4) Wenn $x^4 + y^4 - 4\,a^2xy = 0$ und $a > 0$ ist, so entspricht die Lösung: $x = a\sqrt[8]{3}$, $y = a\sqrt[8]{27}$ dem Maximum, die Lösung: $x = -a\sqrt[8]{3}$, $y = -a\sqrt[8]{27}$ dem Minimum von y.

§ 2. Maxima und Minima der Funktionen mehrerer unabhängigen Variablen.

121. Kriterien für eine Funktion zweier Variablen. Wir gehen von einer Funktion zweier Variablen $z = f(x, y)$ aus, welche auf dem Gebiete P eindeutig und stetig ist. Dieselbe hat an einer innerhalb P gegebenen Stelle $x = a$, $y = b$ ein Maximum, bzw. ein Minimum, wenn sich eine Umgebung von a/b feststellen läßt derart, daß der Funktionswert $f(a, b)$ größer, bzw. kleiner ist als jeder andere aus dieser Umgebung entnommene Wert der Funktion. Es muß sich also eine positive Zahl η feststellen lassen derart, daß für den Fall eines Maximums

$$f(a+h,\ b+k) - f(a, b) < 0, \tag{1}$$

und für den Fall eines Minimums

$$f(a+h,\ b+k) - f(a, b) > 0 \tag{2}$$

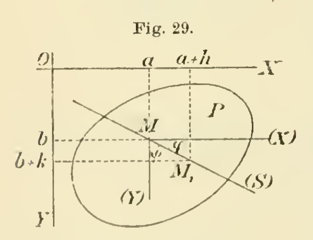
für alle Wertverbindungen h/k, für welche gleichzeitig

$$|h| < \eta \qquad |k| < \eta,$$

ausgenommen die Wertverbindung $0/0$.

Legt man die geometrische Darstellung des Gebietes P zugrunde (Fig. 29, (47)), so ist durch jede Wertverbindung h/k eine durch den Punkt a/b laufende Richtung S bestimmt, und verfolgt man die Funktion in dieser Richtung, so besagen die Relationen (1), (2), sie sei dabei an der Stelle a/b ein Maximum, bzw. ein Minimum; und dies muß der Definition gemäß für *jede* durch a/b gehende Richtung gelten.

Fig. 29.



Man kommt hiernach zu dem Schlusse, daß die Funktion $f(x, y)$ an der Stelle a/b nur dann einen extremen Wert haben kann, wenn $f(a, b)$ bei Verfolgung der Funktionswerte in jeder durch a/b gehenden Richtung ein Extrem darstellt.

Hierzu ist vor allem notwendig, daß der totale Differentialquotient (47, (7)):

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \psi,$$

gebildet für die Stelle a/b, in jeder Richtung, also für jede Wertverbindung $\cos \varphi$, $\cos \psi$ (die übrigens der Bedingung $\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi = 1$ zu genügen hat), gleich Null sei, und dies wieder findet nur dann statt, wenn an der Stelle a/b

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

ist.

Daraus ergibt sich der Satz: *Diejenigen Stellen, an welchen die Funktion $f(x, y)$ einen extremen Wert besitzt, sind unter den Lösungen des Gleichungspaares $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ zu suchen.*

Es sei nun a/b eine aus diesen Gleichungen hervorgegangene Lösung. Zur weiteren Entscheidung werde der zweite totale Differentialquotient (54, (4)):

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \varphi \cos \psi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \psi \tag{4}$$

für die Stelle a/b herangezogen; er muß, soll $f(a, b)$ ein Maximum sein, für alle Richtungen negativ, und soll $f(a, b)$ ein Minimum sein, für alle Richtungen positiv sein. Dazu ist vor allem erforderlich, daß weder $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ noch $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ verschwinde; denn wäre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, so würde $\frac{d^2 f}{ds^2} = 0$ für $\psi = \frac{\pi}{2}$, und wäre $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, so würde $\frac{d^2 f}{ds^2} = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Nun ist, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d^2 f}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \varphi \cos \psi + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cos^2 \psi,$$

und nach Ergänzung der beiden ersten Teile der rechten Seite zu einem vollständigen Quadrat:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d^2 f}{ds^2} \\ & = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \psi\right]^2 + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \cos^2 \psi; \end{aligned} \right. \tag{5}$$

jetzt läßt sich darüber entscheiden, unter welcher Voraussetzung die rechte Seite, also auch die linke Seite, also auch $\frac{d^2 f}{ds^2}$ in *allen* Richtungen ein und dasselbe Vorzeichen hat. Die

hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist nämlich, daß an der Stelle a/b

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

sei.

Daß diese Bedingung hinreichend ist, erkennt man sogleich; denn besteht sie, so ist der Ausdruck auf der rechten Seite von (5) für alle Richtungen positiv und hat somit $\frac{d^2 f}{d s^2}$ beständig das nämliche Vorzeichen wie $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{a,\, b}$.

Daß die Bedingung auch notwendig ist, ergibt sich auf folgende Art. Wäre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0,$$

so ließen sich sowohl Richtungen bezeichnen, für welche die rechte Seite von (5) positiv, als auch solche, für welche sie negativ ist; eine Richtung der ersten Art wäre diejenige, welche durch $\cos\psi = 0$ (wozu $\cos\varphi = \pm 1$ gehört) gekennzeichnet ist; und Richtungen der anderen Art würden sich beispielsweise aus

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}\cos\psi = 0$$

ergeben. Bestünde endlich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0,$$

so hätte allerdings die rechte Seite von (5) für alle Richtungen das positive Zeichen, jedoch mit Ausnahme derjenigen, die sich aus (7) ergeben, weil für solche der ganze Ausdruck und somit $\frac{d^2 f}{d s^2}$ verschwände, so daß für diese Richtungen eine Entscheidung nicht getroffen werden könnte.

Auf Grund dieser Erörterung ergibt sich also der folgende Satz: *An einer Stelle a/b, an welcher die beiden ersten Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwinden, hat die Funktion $f(x, y)$ einen extremen Wert, wenn dort $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ ist, und zwar*

ist $f(a, b)$ ein Maximum, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ an der genannten Stelle negativ, ein Minimum, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ positiv ist. Ist hingegen an der Stelle a/b der Ausdruck $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$, so findet ein extremer Wert nicht statt, und ist er $= 0$, so läßt sich ohne weitergehende Untersuchung eine Entscheidung nicht treffen.

Im Falle eines Extrems kann übrigens die letzte Unterscheidung ebensowohl mit Hilfe von $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ wie mit $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ erfolgen, weil die Bedingung (6) nicht erfüllt sein kann, ohne daß $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ beide von Null verschieden und desselben Vorzeichens sind.

Die durchgeführte Betrachtung verliert ihre Grundlage, wenn $\frac{d^2 f}{d s^2}$ für *jede* Richtung verschwindet, und dies tritt vermöge (4) dann ein, wenn für $x = a$, $y = b$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Es muß dann, soll $f(a, b)$ ein extremer Wert sein, auch $\frac{d^3 f}{d s^3}$ für alle Richtungen verschwinden (**116**), und dies setzt (**54**, (6)) voraus, daß an der Stelle a/b auch alle partiellen Differentialquotienten dritter Ordnung von $f(x, y)$ Null werden; ist dies der Fall, so kommt es weiter auf $\frac{d^4 f}{d s^4}$ an. Das Vorzeichen dieses Differentialquotienten, wenn es für alle Richtungen dasselbe bleibt, entscheidet über Maximum oder Minimum in demselben Sinne wie das Vorzeichen von $\frac{d^2 f}{d s^2}$, sobald $\frac{d^2 f}{d s^2} \neq 0$ ist. Inbetreff der Fortsetzung dieser Schlüsse braucht nur auf **117** verwiesen zu werden.

122. Kriterien für eine Funktion beliebig vieler Variablen. Die Definitionen für das Maximum und Minimum einer Funktion $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von n (> 2) unabhängigen Variablen sind jenen für eine Funktion zweier Variablen analog; es hat die Funktion an der Stelle $x_1/x_2/\ldots/x_n$ ein Maximum

bzw. ein Minimum, wenn sich eine positive Zahl η angeben läßt derart, daß

$$(8)\qquad f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n) < 0,$$

bzw.

$$(9)\qquad f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n) > 0$$

für alle Wertverbindungen $h_1/h_2/\ldots/h_n$, für welche gleichzeitig

$$|h_1| < \eta, \quad |h_2| < \eta, \ldots |h_n| < \eta,$$

ausgenommen die Wertverbindung $0/0/\ldots/0$.

Wenn man sich der Terminologie, welche für zwei und drei unabhängige Variable wirklich anschauliche Bedeutung hat, allgemein bedient (**49**), so darf man sagen, die Bedingungen (8) und (9) stellen die Forderung, es sei $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein Maximum bzw. ein Minimum, in welcher durch den Punkt $x_1/x_2/\ldots/x_n$ gehenden Richtung man auch die Funktion verfolgen mag. Dieser Forderung wird aber nur dadurch entsprochen, daß der totale Differentialquotient (**49**, (11))

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cos\varphi_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\varphi_n$$

für alle Richtungen, also für alle Wertverbindungen von $\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \ldots \cos\varphi_n$ (sofern sie nur der notwendigen Bedingung $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cdots + \cos^2\varphi_n = 1$ entsprechen) den Wert Null annimmt. Daraus folgt als notwendige Bedingung für einen extremen Wert das Gleichungssystem:

$$(10)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

An einer Stelle, welche aus diesem Gleichungssystem sich ergibt, findet aber nur dann in jeder durch sie gehenden Richtung ein Maximum oder Minimum statt und läßt sich daher auch die Bedingung (8) oder jene (9) erfüllen, wenn der zweite totale Differentialquotient (**54**)

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}}\cos^2\varphi_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\,2}}\cos^2\varphi_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^{\,2}}\cos^2\varphi_n$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_3}\cos\varphi_1\cos\varphi_3 + \cdots$$

für *alle* Richtungen *negativ*, bzw. für *alle* Richtungen *positiv* ist.

Man kann diesen Kriterien auch den folgenden Ausdruck geben. Weil das totale Differential df zugleich verschwindet mit dem totalen Differentialquotienten $\frac{df}{ds}$, und weil das zweite totale Differential $d^2 f$ gleiches Vorzeichen hat mit dem zweiten totalen Differentialquotienten, so gilt der Satz: *Die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ kann einen extremen Wert nur an einer solchen Stelle erlangen, an welcher das totale Differential*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

identisch, d. i. unabhängig von den Werten $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, verschwindet; und es hat die Funktion an einer solchen Stelle wirklich ein Maximum oder ein Minimum, wenn das zweite totale Differential

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \cdots$$

beständig, d. i. für alle Wertverbindungen $dx_1/dx_2/\ldots/dx_n$), negativ, bzw. positiv ist.*

Die Anwendung des zweiten Teiles dieses Satzes kann in speziellen Fällen häufig entfallen, wenn nämlich aus der Natur der Aufgabe selbst zu erkennen ist, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handeln kann.

123. Beispiele. 1) Es sind die extremen Werte der Funktion

---

*) Hierbei dürfen unter $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ beliebig große Werte gedacht werden, weil das Vorzeichen des Ausdruckes für $d^2 f$, auf das allein es ankommt, nicht geändert wird, wenn man ihn mit dem Quadrat einer beliebig großen Zahl ϱ multipliziert; dann aber treten an die Stelle von

$$dx_1, dx_2, \ldots dx_n$$

die Produkte

$$\varrho\, dx_1, \varrho\, dx_2, \ldots \varrho\, dx_n,$$

die beliebig groß sein können.

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2gx + 2hy + k$$

zu bestimmen.

Die beiden für einen extremen Wert notwendigen Bedingungsgleichungen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = ax + by + g = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = bx + cy + h = 0$$

liefern nur dann ein bestimmtes Wertsystem für x, y, wenn die Determinante

$$ac - b^2 \neq 0$$

ist, und zwar ist dieses Wertsystem

$$x_0 = \frac{bh - cg}{ac - b^2}, \quad y_0 = \frac{bg - ah}{ac - b^2};$$

demselben entspricht aber nur dann ein extremer Wert, wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

welches hier den von x, y unabhängigen Wert

$$4(ac - b^2)$$

hat, positiv ist, wenn also

$$ac - b^2 > 0;$$

und zwar ist $f(x_0, y_0)$ ein Maximum, wenn a, c negativ, und ein Minimum, wenn a, c positiv sind; beachtet man, daß sich $f(x, y)$ in die Form

$$\begin{aligned} f(x, y) = (ax + by + g)x \\ + (bx + cy + h)y \\ + gx + hy + k \end{aligned}$$

bringen läßt, so ergibt sich

$$f(x_0, y_0) = gx_0 + hy_0 + k.$$

In dem Falle $ac - b^2 < 0$ hat $f(x, y)$ keinen extremen Wert.

Ist endlich $ac - b^2 = 0$, also $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ und überdies $= \frac{g}{h}$, dann fallen die beiden Bedingungsgleichungen in eine zusammen,

und für Wertverbindungen x/y, welche dieser einen Gleichung genügen, wird

$$f(x, y) = gx + hy + k = h\left(\frac{g}{h}x + y\right) + k$$
$$= h\left(\frac{a}{b}x + y\right) + k = \frac{h}{b}(ax + by) + k$$
$$= -\frac{h}{b}g + k = \frac{bk - hg}{b},$$

also konstant, so daß an solchen Stellen x/y die Funktion keinen extremen Wert hat.

Setzt man $z = f(x, y)$ und stellt z geometrisch dar (**45**), so entspricht dieser Gleichung für $ac - b^2 > 0$ ein elliptisches Paraboloid, für $ac - b^2 < 0$ ein hyperbolisches Paraboloid, für $ac - b^2 = 0$ eine der xy-Ebene parallele Zylinderfläche.

2) Die extremen Werte der Funktion

$$z = e^{-x^2 - y^2}(ax^2 + by^2)$$

unter der Voraussetzung: $a > 0$, $b > 0$ zu bestimmen.

Den Gleichungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(a - ax^2 - by^2)e^{-x^2-y^2} = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y(b - ax^2 - by^2)e^{-x^2-y^2} = 0$$

kann in dreifacher Weise entsprochen werden:

α) Durch $x = 0$, $y = 0$. Ohne eine vollständige Entwicklung der zweiten Differentialquotienten nötig zu haben, wird man leicht erkennen, daß für diese Wertverbindung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2b, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$
$$\text{also } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^2 = 4ab > 0,$$

folglich tritt hier ein Minimum ein, dessen Wert $z = 0$ ist.

β) Durch $x = 0$, $y = \pm 1$; für diese Wertverbindung ist

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a - b}{e}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{4b}{e}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$
$$\text{also } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^2 = \frac{4b(b - a)}{e^2}$$

folglich findet ein Maximum statt, wenn $a < b$, und sein Wert ist $z = \frac{b}{e}$; wenn dagegen $a > b$, erlangt die Funktion an dieser Stelle weder ein Maximum, noch ein Minimum.

γ) Durch $x = \pm 1$, $y = 0$, an dieser Stelle ist

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4a}{e}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{b-a}{e}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\text{also } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^2 = \frac{4a(a-b)}{e^2};$$

es tritt also, wenn $a > b$, ein Maximum ein, dessen Wert $z = \frac{a}{e}$ ist, während bei $a < b$ kein Extrem stattfindet.

Bei $a = b$ stellt sich unter β) und γ) der unentschiedene Fall ein, wo $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^2 = 0$ ist. Setzt man $x^2 + y^2 = u^2$, so hat man es mit der Funktion

$$z = au^2 e^{-u^2}$$

zu tun, für die

$$\frac{dz}{du} = 2aue^{-u^2}(1-u^2), \quad \frac{d^2 z}{du^2} = 2ae^{-u^2}(1 - 5u^2 + 2u^4);$$

$\frac{dz}{du}$ verschwindet für $u = 0$ und $u^2 = 1$; für diese Lösungen wird $\frac{d^2 z}{du^2} = 2a$, bzw. $= -4a$. Das erste führt wieder auf das unter α) gefundene Minimum an der Stelle $x = 0$, $y = 0$. Es wäre aber unzutreffend, zu sagen, daß z an allen Stellen des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ ein Maximum gleich $\frac{a}{e}$ besitze; denn zu jeder solchen Stelle gibt es in jeder noch so engen Umgebung andere — auf eben dem Kreise —, wo z den *gleichen* Wert $\frac{a}{e}$ hat.*)

3) Gegeben sind zwei Gerade im Raume; man soll ihren kürzesten Abstand bestimmen.

---

*) O. Stolz (Grundzüge der Differential- und Integralrechnung I, 1893, p. 211) bezeichnet Werte solcher Art als „uneigentliche“ Maxima bzw. Minima.

Sind

$$\frac{x-a_1}{\alpha_1} = \frac{y-b_1}{\beta_1} = \frac{z-c_1}{\gamma_1}$$
$$\frac{x-a_2}{\alpha_2} = \frac{y-b_2}{\beta_2} = \frac{z-c_2}{\gamma_2}$$

die Gleichungen der beiden Geraden, und bezeichnet man den mit $x/y/z$ gleichzeitig veränderlichen gemeinsamen Wert der ersten drei Brüche mit u, den der letzten mit v, so sind die Koordinaten eines Punktes der ersten Geraden als Funktionen von u, die Koordinaten eines Punktes der zweiten Geraden als Funktionen von v wie folgt dargestellt:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 u + a_1 \qquad & x &= \alpha_2 v + a_2 \\ y &= \beta_1 u + b_1 & y &= \beta_2 v + b_2 \\ z &= \gamma_1 u + c_1 & z &= \gamma_2 v + c_2; \end{aligned}$$

ist δ der Abstand der zwei durch u, v charakterisierten Punkte, so ist

$$\delta^2 = (\alpha_1 u - \alpha_2 v + a_1 - a_2)^2 + (\beta_1 u - \beta_2 v + b_1 - b_2)^2 + (\gamma_1 u - \gamma_2 v + c_1 - c_2)^2,$$

und dies soll zu einem Minimum werden. Bezeichnet man die in den Klammern eingeschlossenen Polynome der Reihe nach mit A, B, C, so schreiben sich die Bedingungen für das Minimum wie folgt:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(\delta^2)}{\partial u} = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = 0$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial(\delta^2)}{\partial v} = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C = 0;$$

ferner ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial u^2} = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial v^2} = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial u\,\partial v} = -(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2),$$

daher unabhängig von u, v

$$\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial u^2}\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial u\,\partial v}\right)^2$$
$$= 4\left[(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2) - (\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2\right]$$
$$= 4\left[(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)^2 + (\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)^2 + (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2\right],$$

also positiv; es findet hiernach wirklich ein Extrem statt und zwar ein Minimum, weil $\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2(\delta^2)}{\partial v^2}$ als Quadratsummen positiv sind.

Um das Minimum selbst zu ermitteln, empfiehlt sich der folgende Vorgang. Aus den beiden Bedingungsgleichungen folgt

$$\frac{A}{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1} = \frac{B}{\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1} = \frac{C}{\alpha_1\beta_2 - \beta_2\alpha_1};$$

bezeichnet man den gemeinsamen Wert dieser Brüche mit w, so ist einerseits

$$\min\delta^2 = \{(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2\}\, w^2,$$

andererseits hat man zur Bestimmung von w die Gleichungen

$$A - (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)w = 0, \quad B - (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)w = 0,$$
$$C - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)w = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von A, B, C:

$$\alpha_1 u - \alpha_2 v - (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)w = a_2 - a_1$$
$$\beta_1 u - \beta_2 v - (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)w = b_2 - b_1$$
$$\gamma_1 u - \gamma_2 v - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)w = c_2 - c_1:$$

hieraus aber folgt:

$$w = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & a_1 - a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & b_1 - b_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & c_1 - c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a_1 - a_2)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + (b_1 - b_2)(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + (c_1 - c_2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}{(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}.$$

Daher ist schließlich

$$\min\delta = \pm \frac{(a_1 - a_2)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + (b_1 - b_2)(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + (c_1 - c_2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}{\sqrt{(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)^2 + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}}.$$

4) In der Ebene eines gegebenen Dreiecks den Punkt zu finden, dessen Entfernungen von den Eckpunkten des Dreiecks die möglich kleinste Summe geben.

Ist ABC (Fig. 30) das Dreieck, und bezieht man den Punkt M auf ein Polarkoordinatensystem mit A als Pol und AB als Polarachse, so daß $AM = r$, $\sphericalangle BAM = \varphi$ seine Koordinaten sind, so ist *die* Größe, um deren Minimum es sich handelt,

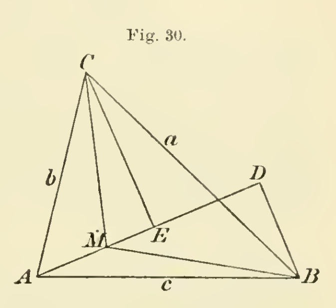
$$S = AM + BM + CM = r + \sqrt{c^2 + r^2 - 2\,cr\cos\varphi}$$
$$+ \sqrt{b^2 + r^2 - 2\,br\cos(A - \varphi)};$$

dabei sind a, b, c die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten und A der Winkel an der gleichnamigen Ecke; die Wurzeln gelten als positiv.

Die Bedingungen des Minimums lauten:

$$\frac{\partial S}{\partial r} = 1 + \frac{r - c\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2\,cr\cos\varphi}}$$
$$+ \frac{r - b\cos(A - \varphi)}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2\,br\cos(A - \varphi)}} = 0$$
$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{cr\sin\varphi}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2\,cr\cos\varphi}}$$
$$- \frac{br\sin(A - \varphi)}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2\,br\cos(A - \varphi)}} = 0;$$

Fig. 30.



die zweite dieser Gleichungen wird durch $r = 0$ befriedigt. Schaltet man diese Lösung zunächst aus und drückt dann die beiden Gleichungen in den Linien der Figur aus, wobei zu beachten ist, daß, sofern $BD \perp AM$ und $CE \perp AM$,

$$r - c\cos\varphi = AM - AD = -MD,$$
$$c\sin\varphi = BD,$$
$$r - b\cos(A - \varphi) = AM - AE = -ME$$
$$b\sin(A - \varphi) = CE,$$

so lauten sie folgendermaßen:

$$1 - \frac{MD}{BM} - \frac{ME}{CM} = 0$$
$$\frac{BD}{BM} - \frac{CE}{CM} = 0,$$

oder bei trigonometrischer Deutung der Verhältnisse:

$$\cos BMD + \cos CME = 1$$
$$\sin BMD - \sin CME = 0;$$

aus der zweiten Gleichung folgt

$$BMD = CME$$

und hiermit aus der ersten

$$BMD = CME = 60^0,$$

daher

$$BMC = 120^0.$$

Da man ebenso hätte von dem Eckpunkte B oder C ausgehen können, so ergibt sich, daß die Lage des Punktes M, für welche S ein Minimum ist, gekennzeichnet wird durch

$$BMC = CMA = AMB = 120^0.$$

Einen Punkt von solcher Beschaffenheit gibt es aber nur dann, wenn jeder Winkel des Dreiecks kleiner ist als 120^0; er liegt dann im Innern des Dreiecks und wird erhalten als Schnittpunkt dreier Kreisbogen, welche die Seiten des Dreiecks zu Sehnen haben und über diesen Sehnen den Peripheriewinkel von 120^0 fassen.

Nun nehmen wir die oben bemerkte Lösung $r = 0$ auf und fragen, wann dieser ein Minimum von S entspricht. Um dies zu entscheiden, entwickeln wir S unter der Voraussetzung, daß r im Vergleich zu b, c sehr klein, nach Potenzen von r und erhalten:

$$\begin{aligned}
S &= r + c\sqrt{1+\left(\frac{r}{c}\right)^2 - 2\,\frac{r}{c}\cos\varphi} + b\sqrt{1+\left(\frac{r}{b}\right)^2 - 2\,\frac{r}{b}\cos(A-\varphi)} \\
&= r + c\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{c}\right)^2 - \frac{r}{c}\cos\varphi - \frac{1}{8}\left(\left(\frac{r}{c}\right)^2 - 2\,\frac{r}{c}\cos\varphi\right)^2 + \cdots\right\} \\
&\quad + b\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{b}\right)^2 - \frac{r}{b}\cos(A-\varphi) - \frac{1}{8}\left(\left(\frac{r}{b}\right)^2 - 2\,\frac{r}{b}\cos(A-\varphi)\right)^2 + \cdots\right\} \\
&= b + c + (1 - \cos\varphi - \cos(A-\varphi))\,r \\
&\qquad\qquad + \left\{\frac{\sin^2\varphi}{c} + \frac{\sin^2(A-\varphi)}{b}\right\}\frac{r^2}{2} - \cdots \\
&= b + c + \left(1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A}{2} - \varphi\right)\right) r \\
&\qquad\qquad + \left\{\frac{\sin^2\varphi}{c} + \frac{\sin^2(A-\varphi)}{b}\right\}\frac{r^2}{2} - \cdots;
\end{aligned}$$

$b + c$ ist aber derjenige Wert von S, welcher $r = 0$ entspricht, und er stellt ein Minimum dar, wenn

$$\begin{aligned}
S - (b + c) &= \left\{1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A}{2} - \varphi\right)\right\} r \\
&\qquad\qquad + \left\{\frac{\sin^2\varphi}{c} + \frac{\sin^2(A-\varphi)}{b}\right\}\frac{r^2}{2} + \cdots
\end{aligned}$$

für ein genügend kleines r beständig positiv bleibt, während φ das Intervall $(0, 2\pi)$ durchläuft; r sei insbesondere so klein festgesetzt, daß das Glied mit der ersten Potenz die Summe aller übrigen dem Betrage nach übertrifft.

Ist $A < 120^0$, $\frac{A}{2} < 60^0$, also $2 \cos \frac{A}{2} > 1$, so kann durch Wahl von φ der Koeffizient von r nach Belieben positiv wie negativ gemacht werden, stellt somit $b + c$ keinen extremen Wert dar.

Ist $A = 120^0$, also $2 \cos \frac{A}{2} = 1$, so ist der Koeffizient von r im allgemeinen positiv, verschwindet jedoch für $\varphi = \frac{A}{2}$; trotzdem bleibt die Differenz $S - (b + c)$ auch an dieser Stelle positiv vermöge des nun maßgebenden Gliedes mit r^2, das positiv ist.

Ist $A > 120^0$, also $2 \cos \frac{A}{2} < 1$, so behält der Koeffizient von r für alle Werte von φ das positive Vorzeichen, also auch $S - (b + c)$.

In den beiden letzten Fällen, und es sind das gerade diejenigen, welche die erste Lösung ausschließt, ist also A die gesuchte Lage des Punktes M, für welche S ein Minimum ist.

Daß bei diesem Problem überhaupt nur ein Minimum entstehen kann, geht daraus hervor, daß man S zwar beliebig groß, aber nicht beliebig klein machen kann.

5) Es sind n Punkte M_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ im Raume gegeben und jedem derselben ist eine positive Zahl m_i zugeordnet. Man soll jenen Punkt S bestimmen, für welchen die Summe der mit den Zahlen m_i multiplizierten Quadrate der Entfernungen SM_i ein Minimum ist.

Sind $x_i/y_i/z_i$ die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Koordinaten von M_i, $x/y/z$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes S, so ist S so zu bestimmen, daß

$$T = \sum_1^n m_i[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]$$

ein Minimum werde; die Bedingungen hierfür lauten:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2\Sigma m_i(x - x_i) = 2\{x\Sigma m_i - \Sigma m_i x_i\} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 2\Sigma m_i(y - y_i) = 2\{y\Sigma m_i - \Sigma m_i y_i\} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 2\Sigma m_i(z - z_i) = 2\{z\Sigma m_i - \Sigma m_i z_i\} = 0;$$

demnach hat der verlangte Punkt die Koordinaten:

$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \quad z = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}.$$

Bei Interpretation der Resultate vom Standpunkte der Mechanik ist hiermit gezeigt, daß der Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte derjenige Punkt sei, in bezug auf welchen das polare Trägheitsmoment des Punktsystems am kleinsten ist.

Obwohl hier von vornherein nur die Möglichkeit eines Minimums einzusehen ist, so mag doch die analytische Begründung dafür angegeben werden; es ist

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 2\Sigma m_i$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0,$$

daher

$$d^2 T = 2\Sigma m_i(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

und da dies eine wesentlich positive Größe ist, so hat T an der gefundenen Stelle tatsächlich ein Minimum (**122**).

6) Zu zeigen, daß die Funktion

$$z = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

für $x = y = \frac{a}{\sqrt[3]{3}}$ den minimalen Wert $3\sqrt[3]{3}a^2$ erlangt.

7) Die Funktion $z = x^3 + y^3 - 3axy\,(a > 0)$ hat für $x = y = a$ das Minimum $-a^3$.

8) Die Funktion $v = (2ax - x^2)(2by - y^2)$ erreicht an der Stelle $x = a$, $y = b$ ihr Maximum a^2b^2.

124. Extreme Werte bei singulärem Verhalten der Differentialquotienten. Die in **121** und **122** entwickelte Theorie hat zur wesentlichen Voraussetzung die Existenz eigentlicher partieller Differentialquotienten in bezug auf die einzelnen Variablen, wenigstens in der Umgebung der in Be-

tracht gezogenen Stelle. Eine Funktion mehrerer Variablen kann aber auch einen extremen Wert aufweisen an einer Stelle, für welche solche Differentialquotienten nicht bestehen; die Entscheidung über einen derartigen Fall bedarf immer einer besonderen Untersuchung.

Es sei beispielsweise

$$z = c + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

und die Quadratwurzel gelte als *positive* Größe. Die partiellen Differentialquotienten von z, d. i.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

verlieren ihre Bedeutung an der Stelle $x = a$, $y = b$. Setzt man aber $x = a + h$, $y = b + k$ und bezeichnet die durch diesen Punkt und a/b bestimmte Richtung mit S, mit φ, ψ ihre Richtungswinkel, so ist der totale Differentialquotient von z an der Stelle $a + h/b + k$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{h \cos\varphi + k \cos\psi}{\sqrt{h^2 + k^2}};$$

derselbe ändert sein Vorzeichen, wenn h, k zugleich es ändern, d. h. wenn man auf S von einer Seite des Punktes a/b auf die andere übergeht. Deshalb gehört zu a/b ein extremer Wert und derselbe ist

$$z = c;$$

als der kleinste unter allen Werten von z ist er ein Minimum.

§ 3. Maxima und Minima von Funktionen mehrerer abhängiger Variablen.

125. Begriff der relativen Extreme und ihre Bestimmung. Wenn von den extremen Werten einer Funktion $f(x, y, z)$ dreier Variablen in dem bisher besprochenen Sinne die Rede ist, so kommen dabei alle Werte der Funktion in Betracht, welche sie in dem Gebiete R, für das sie gegeben ist, annimmt.

Faßt man jedoch nur solche Werte der Funktion $f(x, y, z)$ ins Auge, welche zu Verbindungen $x/y/z$ gehören, die der *Bedingungsgleichung*

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

Genüge leisten, und stellt die Frage nach den extremen unter diesen Werten, so handelt es sich um ein von dem vorhergehenden verschiedenes Problem.

Im ersten Falle galten die Variablen x, y, z als unabhängig, und ihr Gebiet war der ganze Raum R. In dem neuen Falle sind die Variablen abhängig voneinander, indem durch die Bedingungsgleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ etwa z als Funktion von x darstellbar ist; ihr Gebiet ist eine den Raum R durchsetzende Fläche (45). Man bezeichnet extreme Werte der ersten Art als *absolute Extreme*, extreme Werte der zweiten Art als *relative* oder *bedingte Extreme*.

Würde neben der oben aufgestellten Bedingung den Wertverbindungen $x/y/z$, für welche $f(x, y, z)$ in Betracht gezogen wird, auch noch die weitere

$$\psi(x, y, z) = 0$$

auferlegt, so wäre die Beschränkung weitergehend als vorhin; jetzt könnten mittels $\varphi(x, y, z) = 0$ und $\psi(x, y, z) = 0$ etwa y, z als Funktionen von x dargestellt werden, und das Gebiet der Variablen wäre eine den Raum R durchsetzende Kurve (45).

Weiteren Bedingungen aber dürfen die Variablen x, y, z nicht unterworfen werden.

Die Bestimmung relativer Extreme werde nun *an einer stetigen Funktion* $f(x, y, z, u)$ *von vier Variablen* erklärt, die *zwei Bedingungsgleichungen*:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z, u) = 0 \\ \psi(x. y, z, u) = 0 \end{cases}$$

unterworfen sind.

Der eine Weg bestünde darin, daß man mit Hilfe der Gleichungen (1) zwei der Variablen, z. B. z, u, durch die beiden andern, x, y, ausdrückt und diese Ausdrücke in $f(x, y, z, u)$ einträgt; dadurch geht f in eine Funktion der unabhängigen Variablen x, y über, die nunmehr nach früheren Methoden auf ihre absoluten Extreme zu untersuchen ist.

Handelte es sich allgemein um eine Funktion von n Variablen, die $r\,(< n)$ Bedingungsgleichungen unterworfen sind, so würde durch den angedeuteten Eliminationsprozeß die Aufgabe

auf die Bestimmung der absoluten Extreme einer Funktion von $n - r$ unabhängigen Variablen zurückgeführt.

Die Elimination ist indessen nicht immer ausführbar und ergibt in anderen Fällen eine unbequeme Rechnung.

Es empfiehlt sich daher das folgende, von Lagrange*) zuerst angegebene Verfahren. Man denke sich die Elimination von z, u in $f(x, y, z, u)$ vollzogen; dann wird auch das totale Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial u} du \tag{2}$$

bloß Funktion von dx, dy sein; um ihm diese Darstellung zu geben, benutze man die aus den Bedingungsgleichungen (1) gezogene Folgerung (49):

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du, \\ 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial u} du. \end{cases} \tag{3}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3) lassen sich in der Tat dz, du aus (2) eliminieren; die Elimination kann in der Weise vollzogen werden, daß man die Gleichungen (3) mit *unbestimmten Multiplikatoren* λ, μ multipliziert, zu (2) addiert, wodurch

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial u}\right) du$$

erhalten wird, und daß man nun nachträglich λ, μ aus den Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

bestimmt; mit diesen Werten von λ, μ ist dann tatsächlich

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy. \tag{5}$$

An einer Stelle aber, an welcher f, als Funktion der unabhängigen Variablen x, y aufgefaßt, einen extremen Wert hat,

---

*) Théorie des fonctions analytiques, 1797, 1813.

verschwindet das totale Differential unabhängig von den Werten von dx, dy (122); an einer solchen Stelle ist also

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 0\,. \end{cases}$$

Damit hiernach die Funktion $f(x, y, z, u)$ unter Einhaltung der Bedingungen (1) einen extremen Wert erlange, müssen die Werte von x, y, z, u und die Werte der Multiplikatoren λ, μ so gewählt werden, daß

$$(7)\qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z, u) = 0 \\ \psi(x, y, z, u) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial \psi}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

sei; in der Tat sind diese 6 (allgemein $r + n$) Gleichungen zur Bestimmung der genannten 6 (bzw. $n + r$) Größen gerade ausreichend.

Die vier letzten Gleichungen des Systems (7) wären aber die notwendigen Bedingungen für die *absoluten* Extreme der Funktion

$$f(x, y, z, u) + \lambda\varphi(x, y, z, u) + \mu\psi(x, y, z, u),$$

wenn man μ, λ als konstante Zahlen voraussetzt. Man kann mithin den Satz aussprechen: *Die Bedingungen dafür, daß die Funktion f unter Einhaltung der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwischen ihren Argumenten einen extremen Wert erlange, sind die nämlichen wie die Bedingungen für absolut extreme Werte der mit den Konstanten λ, μ gebildeten Funktion $f + \lambda\varphi + \mu\psi$.*

Wenn auch die Werte der Multiplikatoren λ, μ kein Interesse darbieten, so empfiehlt sich ihre Mitbestimmung doch in vielen Fällen um der Symmetrie der Rechnung willen.

Ob an einer aus den Gleichungen (7) hervorgehenden Stelle $x/y/z/u$ die Funktion f wirklich einen größten oder kleinsten Wert erreicht, ist in angewandten Fällen zumeist aus der Natur der Aufgabe zu erkennen; sollte ein Zweifel hierüber bestehen, so müßte das zweite Differential d^2f zur Entscheidung herangezogen werden, aber wieder in der Art, daß auch den Bedingungsgleichungen Rechnung getragen wird. Zu diesem Zwecke hätte man die betreffende Wertverbindung $x/y/z/u$ in die Gleichungen (3) einzuführen, sodann dz, du durch dx und dy auszudrücken und diese Werte nebst $x/y/z/u$ in d^2f einzutragen; fällt d^2f verschieden von Null aus und ist sein Vorzeichen unabhängig von dx, dy, so ist durch dieses Vorzeichen die Frage in bekannter Weise gelöst.

126. Beispiele. 1) Die kürzeste Entfernung eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Ebene zu bestimmen.

Der Punkt sei durch seine Koordinaten $x_0/y_0/z_0$ und die Ebene durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gegeben. Als diejenige Funktion, deren Minimum zu bestimmen ist, kann

$$\delta^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

gewählt werden; die durch x, y, z zu erfüllende Bedingung lautet

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

demnach kommt es auf das absolute Minimum der Funktion

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - 2\lambda(Ax + By + Cz + D)$$

an; die Bedingungen hierfür lauten:

$$x - x_0 - \lambda A = 0$$
$$y - y_0 - \lambda B = 0$$
$$z - z_0 - \lambda C = 0.$$

Verbindet man sie mit der Bedingungsgleichung, so ergibt sich zur Bestimmnng von λ die Gleichung:

$$\lambda(A^2 + B^2 + C^2) + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

woraus

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Setzt man diesen Wert in die obigen drei Gleichungen ein, so ergibt sich die Stelle $x/y/z$, welcher das Minimum entspricht, also der Fußpunkt des von $x_0/y_0/z_0$ auf die Ebene gefällten Lotes.

Hier war aber die Frage nach der kürzesten Entfernung selbst gestellt; um diese zu finden, setze man in dem Ausdruck für δ^2 anstelle von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ die aus den obigen Gleichungen fließenden Werte; dadurch ergibt sich:

$$\min \delta^2 = \lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2)$$

und nach Eintragung des Wertes für λ:

$$\min \delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

wobei der Wurzel jenes Zeichen beizulegen ist, welches den ganzen Ausdruck positiv macht.

Die analytische Begründung dafür, daß der gefundene Wert ein Minimum ist, ergibt sich aus der Betrachtung des zweiten Differentials von δ^2, welches

$$2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

und nach Berücksichtigung der Bedingungsgleichung

$$2\left(dx^2 + dy^2 + \left(\frac{A\,dx + B\,dy}{C}\right)^2\right)$$

lautet und wesentlich positiv ist.

2) Aus einer rechteckigen Tafel von gegebenem Inhalt a^2, aber von zu wählender Form, sind an den vier Ecken gleiche quadratförmige Ausschnitte zu machen derart, daß nach Aufbiegen des Restes längs der punktierten Linien (Fig. 31) ein parallelepipedischer Hohlraum von größtmöglichem Volumen entsteht.

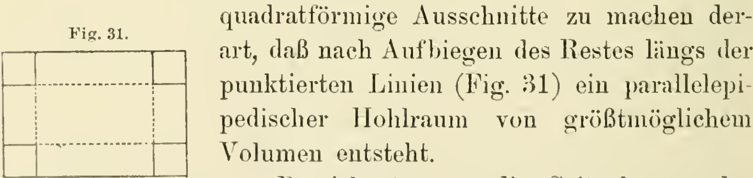


Fig. 31.

Bezeichnet man die Seitenlängen der Tafel mit y, z, die Seite eines Ausschnitts mit x, so ist das Volumen des Parallelepipeds

$$v = x(y - 2x)(z - 2x);$$

dasselbe soll unter Einhaltung der Bedingung

$$yz = a^2$$

ein Maximum werden; nach Entwicklung des Ausdrucks für v unter Rücksichtnahme auf diese Bedingung kommt die Aufgabe zurück auf die Bestimmung des Maximums von

$$v = 4x^3 - 2x^2(y+z) + a^2 x,$$

wenn als Bedingung

$$yz - a^2 = 0$$

hinzutritt.

Die Bedingungen für ein absolutes Extrem der Funktion

$$4x^3 - 2x^2(y+z) + a^2 x + \lambda(yz - a^2)$$

lauten:

$$\begin{aligned} 12x^2 - 4x(y+z) + a^2 &= 0 \\ -2x^2 + \lambda z &= 0 \\ -2x^2 + \lambda y &= 0; \end{aligned}$$

aus den beiden letzten und der Bedingungsgleichung ergibt sich

$$y = z = a,$$

die Tafel ist also quadratförmig zu wählen; die erste Gleichung verwandelt sich hiermit in

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0,$$

woraus sich für x die beiden Werte

$$x_1 = \frac{a}{6}, \quad x_2 = \frac{a}{2}$$

ergeben.

Was den zweiten Wert, $\frac{a}{2}$, anlangt, so bildet er die obere Grenze der mit der Natur der Aufgabe überhaupt verträglichen Werte von x, — denn das zulässige Intervall von x ist $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ — und schon aus diesem Grunde entfällt die Frage, ob der ihm entsprechende Wert von v ein extremer ist; $x_2 = \frac{a}{2}$ bedeutet ein Zerschneiden der Tafel in vier gleiche Quadrate.

Der erste Wert, $\frac{a}{6}$, gibt den größten Wert von v,

$$\max v = \frac{2}{27} a^3.$$

Es geht dies wohl aus der Aufgabe selbst hervor, weil v nicht beliebig groß gemacht werden kann, läßt sich aber auch analytisch begründen; die zweiten Differentialquotienten von v sind nämlich:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 24x - 4(y+z), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x} = -4x, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = -4x,$$

daher das zweite totale Differential an der Stelle

$$x = \frac{a}{6}, \qquad y = z = a$$

gleich

$$-4a\,dx^2 - \frac{4}{3}\,a\,dz\,dx - \frac{4}{3}\,a\,dx\,dy;$$

dasselbe nimmt jedoch, wenn man die aus der Bedingungsgleichung $yz - a^2 = 0$ hervorgehende Beziehung

$$z\,dy + y\,dz = 0$$

berücksichtigt, welche sich für $y = z = a$ auf $dy + dz = 0$ reduziert, den Ausdruck an

$$-4a\,dx^2$$

und ist somit eine wesentlich negative Größe.

3) Es sind die extremen Werte der Durchmesser der auf ihren Mittelpunkt als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems bezogenen Zentralfläche zweiter Ordnung

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + F = 0$$

zu bestimmen.

Bezeichnet man den zu dem Punkte $x/y/z$ der Fläche gehörigen Halbmesser mit r, mit a, b, c die Kosinus seiner Richtungswinkel, so ist

$$x = ar, \qquad y = br, \qquad z = cr;$$

durch diese Transformation ergibt sich aus der Gleichung der Fläche die folgende:

$$-\frac{F}{r^2} = Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab;$$

mit r zugleich wird auch $-\frac{F}{r^2}$ ein extremer Wert; infolgedessen kommt es auf die extremen Werte von

$$f(a, b, c) = Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab$$

an unter Einhaltung der Bedingungsgleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Bildet man mittels des Multiplikators $-\lambda$ die Funktion

$$f(a, b, c) - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1),$$

so gelten für ein absolutes Extrem derselben die Bedingungen

$$(\alpha) \qquad \left\{\begin{aligned} (A - \lambda)a + \quad B''b \quad + \quad B'c \quad &= 0 \\ B''a + (A' - \lambda)b + \quad Bc \quad &= 0 \\ B'a + \quad Bb \quad + (A'' - \lambda)c &= 0; \end{aligned}\right.$$

die Koexistenz dieser Gleichung erfordert, daß

$$(\beta) \qquad \begin{vmatrix} A - \lambda & B'' & B' \\ B'' & A' - \lambda & B \\ B' & B & A'' - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sei. Durch diese kubische Gleichung ist der Multiplikator λ bestimmt; jedem seiner drei Werte entspricht vermöge der Gleichungen (α) und der Bedingungsgleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ein Wertsystem $a, b, c,$ und diese Wertsysteme führen zu den extremen Werten von r^2.

Diese selbst lassen sich in folgender Weise bestimmen. Multipliziert man die Gleichungen (α) der Reihe nach mit $a, b, c,$ so gibt ihre Summe

$$f(a, b, c) - \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung

$$\lambda = f(a, b, c) = -\frac{F}{r^2}$$

folgt; dies in (β) eingetragen führt zu der Gleichung:

$$(\gamma) \qquad \begin{vmatrix} A + \frac{F}{r^2} & B'' & B' \\ B'' & A' + \frac{F}{r^2} & B \\ B' & B & A'' + \frac{F}{r^2} \end{vmatrix} = 0,$$

welche die extremen Werte von r^2 gibt. (Achsenbestimmung einer Fläche zweiter Ordnung.)

Für die spezielle Fläche

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2xy - 1 = 0$$

lautet die Gleichung (β)

$$(1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda) = 0$$

und gibt die Wurzeln

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}, \qquad \lambda_3 = 1 - \sqrt{2};$$

setzt man $\frac{1}{r^2}$ an Stelle von λ, so ergeben sich die extremen Werte:

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = \sqrt{-1+\sqrt{2}}, \qquad r_3 = \sqrt{-1-\sqrt{2}},$$

wovon der dritte imaginär ist. Die den Werten von λ entsprechenden Gleichungssysteme (α) sind

$$\begin{array}{ccc} b = 0 & -a\sqrt{2} + b = 0 & a\sqrt{2} + b = 0 \\ a + c = 0 & a - b\sqrt{2} + c = 0 & a + b\sqrt{2} + c = 0 \\ & b - c\sqrt{2} = 0 & b + c\sqrt{2} = 0 \end{array}$$

und geben in Verbindung mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ die (zueinander senkrechten) Achsenrichtungen

$$\begin{array}{lll} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & a_2 = \frac{1}{2} & a_3 = \frac{1}{2} \\ b_1 = 0 & b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} & b_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} & c_2 = \frac{1}{2} & c_3 = \frac{1}{2}; \end{array}$$

die vorgelegte Fläche ist hiernach ein einschaliges Hyperboloid mit den rellen Halbachsen $r_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{-1+\sqrt{2}}$; die imaginäre Achse hat die Richtungskosinus a_3, b_3, c_3.

4) Es sind n Punkte M_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ im Raume gegeben, und jedem derselben ist eine positive Zahl m_i zugeordnet. Man soll diejenigen Ebenen bestimmen, für welche die Summe der mit den Zahlen m_i multiplizierten Quadrate der Abstände der Punkte M_i extreme Werte annimmt.

Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde, bezeichnet mit $x_i/y_i/z_i$ die Koordinaten von M_i und schreibt die Gleichung der Ebene in der Hesseschen Normalform

$$(\alpha) \qquad a\xi + b\eta + c\zeta - p = 0,$$

in welcher a, b, c die Richtungskosinus des Lotes zur Ebene bedeuten, so daß

$$(\beta) \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

ist, so verlangt die Aufgabe, die Parameter a, b, c, p der Ebene so zu bestimmen, daß

$$T = \sum m_i (x_i a + y_i b + z_i c - p)^2$$

einen extremen Wert annimmt, unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung (β).

Für die absoluten Extreme der Funktion

$$T - \lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1)$$

bestehen die folgenden Bedingungen*):

$$\begin{aligned}
\Sigma mx(xa + yb + zc - p) - \lambda a &= 0 \\
\Sigma my(xa + yb + zc - p) - \lambda b &= 0 \\
\Sigma mz(xa + yb + zc - p) - \lambda c &= 0 \\
\Sigma m(xa + yb + zc - p) \qquad &= 0,
\end{aligned}$$

welche mit Zuhilfenahme der Abkürzungen

$$\begin{array}{lll}
\Sigma mx^2 = A & \Sigma my^2 = A' & \Sigma mz^2 = A'' \\
\Sigma myz = B & \Sigma mzx = B' & \Sigma mxy = B''
\end{array}$$

auch in folgender Anordnung geschrieben werden können:

$$(\gamma) \quad \begin{cases}
(A - \lambda)a + B''b + B'c - p\Sigma mx = 0 \\
B''a + (A' - \lambda)b + Bc - p\Sigma my = 0 \\
B'a + Bb + (A'' - \lambda)c - p\Sigma mz = 0 \\
a\Sigma mx + b\Sigma my + c\Sigma mz - p\Sigma m = 0;
\end{cases}$$

bringt man die letzte dieser Gleichungen mit (α) in Verbindung, so entsteht

$$a\left(\xi - \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}\right) + b\left(\eta - \frac{\Sigma my}{\Sigma m}\right) + c\left(\zeta - \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}\right) = 0,$$

woraus hervorgeht, daß die gesuchten Ebenen durch den Punkt mit den Koordinaten

$$\frac{\Sigma mx}{\Sigma m} \qquad \frac{\Sigma my}{\Sigma m} \qquad \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}$$

d. h. durch den Schwerpunkt des Systems der materiellen

---

*) Der Summationsbuchstabe i bei m, x, y, z soll von hier ab unterdrückt werden.

Punkte M_i mit den Massen m_i hindurchgehen (123, 5)). Transformiert man das Koordinatensystem nach diesem Punkte als neuen Ursprung, so wird $p = 0$ und es verschwinden die Summen Σmx, Σmy, Σmz; heißen A_1, A_1', A_1'', B_1, B_1', B_1'' die neuen Werte von A, A', ..., so gehen die Gleichungen (γ) über in:

$$(\gamma_1) \qquad \begin{cases} (A_1 - \lambda)a + B_1''b + B_1'c = 0 \\ B_1''a + (A_1' - \lambda)b + B_1 c = 0 \\ B_1'a + B_1 b + (A_1'' - \lambda)c = 0. \end{cases}$$

Von da ab fällt die Aufgabe überein mit der vorigen, d. i. mit der Achsenbestimmung einer Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung

$$A_1\xi^2 + A_1'\eta^2 + A_1''\zeta^2 + 2B_1\eta\zeta + 2B_1'\zeta\xi + 2B_1''\xi\eta + F = 0$$

lautet; sie hat also wie diese drei Lösungen. (Zentralellipsoid, Schwerpunktshauptachsen.)

5) Die Funktion $u = x^2y^3z^4$ erreicht für Werte der Variablen, die der Bedingung $2x + 3y + 4z = a$ genügen, bei $x = y = z = \frac{a}{9}$ das Maximum $\left(\frac{a}{9}\right)^9$.

6) Die extremen Werte der Funktion $u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$ bei Vorhandensein der Bedingungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1, \; lx + mx + nx = 0$$

ergeben sich aus der in bezug auf u quadratischen Gleichung:

$$\frac{l^2}{a^2 - u} + \frac{m^2}{b^2 - u} + \frac{n^2}{c^2 - u} = 0;$$

der eine davon ist ein Minimum, der andere ein Maximum; das Verhältnis der zugehörigen Werte der Variablen ist:

$$x : y : z = \frac{l}{a^2 - u} : \frac{m}{b^2 - u} : \frac{n}{c^2 - u}.$$

7) Das Minimum der Funktion $u = x^2 + y^2 + z^2$ für Werte der Variablen zu ermitteln, die die Bedingungen

$$ax + by + cz - 1 = 0$$
$$a'x + b'y + c'z - 1 = 0$$

erfüllen. (Geometrisch heißt dies die kürzeste Entfernung des Ursprungs von der Schnittlinie zweier Ebenen bestimmen).

$$\min u = \frac{(a-a')^2+(b-b')^2+(c-c')^2}{(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'-a'b)^2}.$$

8) Ein Dreieck von gegebenem Umfang so zu gestalten, daß es bei der Rotation um eine seiner Seiten einen Doppelkegel von möglichst großem Volumen beschreibt. (Die in der Rotationsachse liegende Seite muß $\frac{2}{3}$ jeder der beiden anderen betragen.)

Sechster Abschnitt.

Anwendung der Differential-Rechnung auf die Untersuchung von Kurven und Flächen.

A. Ebene Kurven.

§ 1. Die Tangente und die Normale.

127. Die Tangente in rechtwinkligen Koordinaten. Die Lage eines Punktes M in der Ebene ist durch zwei Zahlen bestimmt, im rechtwinkligen Koordinatensystem, das wir zunächst zugrunde legen, durch die *Abszisse* x und die *Ordinate* y. Sind x, y variabel und als eindeutige stetige Funktionen einer Hilfsvariablen oder eines *Parameters* u gegeben:

$$x = \varphi(u), \qquad y = \psi(u), \tag{1}$$

so beschreibt, während u das Intervall, für welches diese Funktionen definiert sind, durchläuft, der Punkt M eine Kurve in der Ebene des Koordinatensystems, eine *ebene Kurve* oder eine *Plankurve.* Die Gleichungen (1) heißen die parametrischen Gleichungen der Kurve.

Es kann indessen auch unmittelbar y als eindeutige stetige Funktion von x gegeben sein:

$$y = f(x), \tag{2}$$

und dann beschreibt M eine Kurve, indem x stetig das Intervall durchläuft, auf welchem f gegeben ist.

Der Zusammenhang zwischen den variablen Koordinaten kann aber auch durch eine Gleichung von der Gestalt

$$F(x, y) = 0 \tag{3}$$

bestimmt sein, vermöge deren sowohl y als Funktion von x wie auch umgekehrt x als Funktion von y aufgefaßt werden

kann; hält man an dem ersteren fest, so kann noch y eine eindeutige oder eine mehrdeutige Funktion vorstellen; in letzterem Falle entspricht jedem Zweige der Funktion (57) auch ein Zweig der Kurve.

Die Untersuchung des Laufes einer ebenen Kurve kommt also vom Standpunkte der Analysis zurück auf die Betrachtung der Änderung einer Funktion einer stetigen Variablen, die explizite oder implizite gegeben ist, oder auf die Betrachtung der gleichzeitigen Änderungen zweier solcher Funktionen.

Die parametrische Darstellung (1) ist für allgemeine Untersuchungen die geeignetste. Sie kann aus den beiden anderen Darstellungsformen gewonnen werden, indem man x einer passend gewählten Funktion einer Hilfsvariablen u gleichsetzt, diese in (2), respektive (3) an Stelle von x einführt, wodurch auch y, explizite und implizite, als Funktion von u gegeben ist.

Umgekehrt ergibt sich aus der parametrischen Darstellung (1) eine der beiden anderen Darstellungsformen, indem man zwischen den beiden Gleichungen (1) u eliminiert.

Hat man aus der Gleichung oder den Gleichungen der Kurve eine Anzahl zusammengehöriger Werte x/y bestimmt, so ist damit eine Anzahl von Punkten der Kurve gegeben, die jedoch, wenn sie nicht nahe genug aneinander liegen, eine sichere Vorstellung von dem Verlaufe derselben nicht zu bieten vermögen.

Genaueren Aufschluß darüber vermittelt der Differentialquotient von y in bezug auf x, welcher die Richtung der Tangente an die Kurve in jedem ihrer Punkte anzugeben gestattet. Sein Vorzeichen läßt erkennen, ob die Kurve bei wachsendem x steigt oder fällt, und seine absolute Größe zeigt an, wie rasch dieses Steigen oder Fallen an der betreffenden Stelle vor sich geht (22, 36).

Zudem ist die Tangente diejenige unter den Geraden, welche durch den betreffenden Punkt der Kurve gehen, der sich die Kurve in der Umgebung des Punktes am engsten anschließt. Um dies zu zeigen, nehmen wir auf der Kurve einen Punkt $M(x/y)$ an und legen durch ihn eine Gerade; ihre Gleichung sei

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) = 0; \tag{4}$$

von dieser Geraden hat ein anderer an M sehr nahe liegender Punkt $M_1(x + \Delta x / y + \Delta y)$ der Kurve den Abstand

$$\delta = \frac{A \Delta x + B \Delta y}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

die Wurzel im Nenner mit dem entsprechenden Zeichen genommen. Sind nun x, y solche Funktionen eines Parameters u, daß sie sich von der Stelle x/y aus nach der Taylorschen Formel entwickeln lassen, so ist (92, (11))

$$\Delta x = dx + \frac{d^2 x}{1 \cdot 2} + \cdots$$

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1 \cdot 2} + \cdots,$$

und hiermit wird

$$\delta = \frac{A\,dx + B\,dy + \frac{1}{1 \cdot 2}(A\,d^2 x + B\,d^2 y) + \cdots}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Im allgemeinen ist also δ von der Ordnung der Größe du, welche die Änderungen Δx, Δy von x, y herbeigeführt hat, und die wir als die erste Ordnung festsetzen wollen. Nur dann ist δ von höherer Ordnung, wenn

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

oder

$$A : B = dy : -dx;$$

die diesem Verhältnisse entsprechende Gerade (4), d. i.

$$(\xi - x)\,dy - (\eta - y)\,dx = 0, \tag{5}$$

ist also unter allen diejenige, welcher die Kurve in der Umgebung von M am nächsten kommt; es ist dies aber die Tangente, weil ihr Richtungskoeffizient $\frac{dy}{dx}$ der Differentialquotient von y in bezug auf x ist.

Ist die Kurve durch das Gleichungspaar (1) bestimmt, so ist

$$dx = \varphi'(u)\,du, \qquad dy = \psi'(u)\,du$$

und es lautet die Gleichung der Tangente im Punkte x/y

$$\eta - y = \frac{\psi'(u)}{\varphi'(u)}(\xi - x); \tag{6}$$

war die Kurve durch (2) dargestellt, so hat man

$$dy = f'(x)\,dx$$

und als Gleichung der Tangente

$$\eta - y = f'(x)(\xi - x); \tag{7}$$

für eine durch (3) gegebene Kurve endlich ist vermöge

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

das Verhältnis

$$dx : dy = -\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}$$

und somit

$$(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

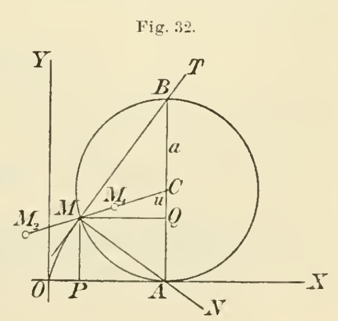
die Gleichung der Tangente, $-\frac{F'_x}{F'_y}$ ihr Richtungskoeffizient.

Nimmt der Richtungskoeffizient $\frac{dy}{dx}$ der Tangente für einen Punkt der Kurve den Wert Null an, so ist die Tangente dortselbst der Abszissenachse parallel. Unter diesen Punkten befinden sich auch diejenigen, für welche y einen extremen Wert erreicht (117).

Hört der Richtungskoeffizient in einem Punkte der Kurve auf definiert zu sein, konvergiert er aber bei Annäherung an diesen Punkt (von einer oder von beiden Seiten) gegen ∞, so ist die Tangente in diesem Punkte parallel der Ordinatenachse. Unter diesen Punkten befinden sich auch solche, in welchen x einen extremen Wert annimmt.

Während $\frac{dy}{dx}$ in den Fällen, welchen die Gleichungen (6) und (7) entsprechen, nur von einer Variablen abhängt, sind in dem zu (8) gehörigen Falle zu seiner Bestimmung beide Koordinaten des Punktes der Kurve erforderlich; er wird unbestimmt für solche Punkte, für welche F'_x und F'_y zugleich verschwinden.

Fig. 32.



128. Beispiele. 1) Ein Kreis vom Halbmesser a rollt auf einer Geraden XX' (Fig. 32); es ist die von einem Punkte M seines Umfangs beschriebene Kurve analytisch

zu bestimmen. — Diese Kurve wird als *gemeine Zykloide**) bezeichnet.

Die Gerade XX' werde als Abszissenachse und als Ursprung derjenige Punkt O gewählt, mit welchem bei einem Rollen des Kreises nach links der Punkt M zum erstenmal zusammenfällt, so daß

$$OA = \text{arc } MA.$$

Nimmt man als Parameter den zu dem Bogen MA gehörigen Zentriwinkel $MCA = u$ — den Rollwinkel —, so drücken sich die Koordinaten $x = OP = OA - MQ$, $y = PM = AC - QC$ durch diesen wie folgt aus:

$$(9)\qquad \begin{aligned} x &= a(u - \sin u) \\ y &= a(1 - \cos u). \end{aligned}$$

Da $x'(u) = a(1 - \cos u) = 2a \sin^2 \frac{u}{2}$ positiv, so ist x mit u beständig wachsend; dagegen wechselt $y'(u) = a \sin u$ an den Stellen $u = k\pi$, wenn k eine ganze Zahl bedeutet, sein Vorzeichen, indem es an den Stellen $u = 2k'\pi$ vom negativen zum positiven, an den Stellen $u = (2k'' + 1)\pi$ vom positiven zum negativen übergeht; an den erstgedachten Stellen wird also y ein Minimum $(= 0)$, an den letztgedachten Stellen ein Maximum $(= 2a)$. Vermöge der Periodizität der Funktionen $\sin u$, $\cos u$ besteht die ganze Kurve aus unbeschränkt vielen gleichen Ästen, deren einer erhalten wird, wenn man u das Intervall $(0, 2\pi)$ durchlaufen läßt.

Die Gleichung der Tangente im Punkte M ist

$$\eta - y = \frac{\sin u}{2 \sin^2 \frac{u}{2}} (\xi - x)$$

oder aber

$$\eta - y = \operatorname{cotg} \frac{u}{2} (\xi - x);$$

mithin ist MB die Tangente selbst, weil $MBA = \frac{u}{2}$ und $\operatorname{tg} QMB = \operatorname{cotg} MBA = \operatorname{cotg} \frac{u}{2}$ ist.

*) Der Name wird auf Galilei (1640), einen der ersten, der die Kurve untersuchte, zurückgeführt.

Eliminiert man u zwischen den Gleichungen (9), was leicht zu bewerkstelligen ist, indem man u aus der zweiten ausdrückt und in die erste einsetzt, so ergibt sich als neue Gleichung der Kurve

$$x = a \operatorname{Arc} \cos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2};$$

wie aus dieser zu ersehen, ist die Zykloide eine *transzendente Kurve* (13, II).

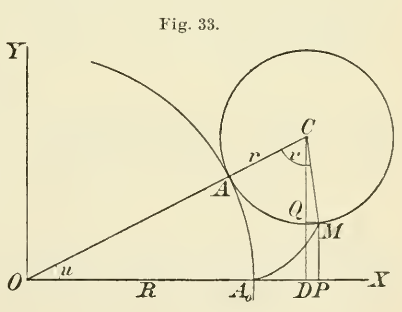
Jeder mit dem rollenden Kreise fest verbundene nicht auf dem Umfange liegende Punkt beschreibt eine *Trochoide* genannte Kurve; die von dem inneren Punkte M_1 beschriebene heißt *verlängerte*, die von einem äußeren Punkte M_2 beschriebene heißt *verkürzte* Trochoide oder Zykloide. Bei derselben Anordnung des Koordinatensystems lauten ihre gemeinsamen Gleichungen:

$$x = au - b \sin u$$
$$y = a - b \cos u,$$

wobei b den Abstand des beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt des Kreises bedeutet ($b < a$, $b > a$).

Bei dieser Gelegenheit soll auch der *Epizykloiden* und der *Hypozykloiden* Erwähnung geschehen; sie werden bei der Wälzung eines Kreises auf einem festen Kreise beschrieben durch einen mit dem ersteren fest verbundenen Punkt.

Fig. 33.



Für die Epizykloide (Fig. 33) ergeben sich die Gleichungen:

$$x = (R + r) \cos u - r \cos \frac{R+r}{r} u$$

$$y = (R + r) \sin u - r \sin \frac{R+r}{r} u,$$

wobei die Bedeutung der Buchstaben und die Anordnung des Koordinatensystems aus der Figur zu ersehen sind.

Für die Hypozykloide erhält man bei analoger Anordnung die Gleichungen:

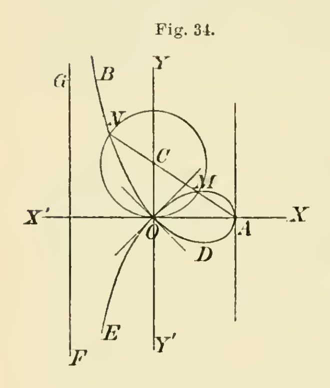
$$x = (R - r)\cos u + r\cos\frac{R - r}{r}u,$$

$$y = (R - r)\sin u - r\sin\frac{R - r}{r}u.$$

Auch hier kann die Abänderung getroffen werden, daß der beschreibende Punkt innerhalb oder außerhalb des rollenden Kreises liegt; an den Gleichungen ändert sich dann lediglich der erste Faktor des zweiten Gliedes.

Man löse auch für diese Kurven das Tangentenproblem und zeige insbesondere, daß auch hier die Tangente durch den Endpunkt B des momentanen Berührungsdurchmessers geht.

Fig. 34.



2) In einem Büschel von Kreisen, welche die Gerade XX' (Fig. 34) in einem Punkte O berühren, werden die durch einen festen Punkt A dieser Geraden gehenden Durchmesser gezogen; der Ort der Endpunkte dieser Durchmesser ist analytisch darzustellen. — Die so erzeugte Kurve heißt *Strophoide.**)

Wählt man XX' zur Abszissenachse und O zum Ursprung, so hat jener Kreis des Büschels, dessen Mittelpunkt C die Ordinate $OC = c$ besitzt, die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 2cy;$$

heißt a die Abszisse von A, so kommt dem durch A laufenden Durchmesser dieses Kreises die Gleichung

$$y = -\frac{c}{a}x + c$$

zu; werden beide Gleichungen als simultan betrachtet, so bedeuten x, y die Koordinaten sowohl von M wie von N, und es ergibt sich die Ortskurve dieser Punkte durch Elimination

*) Die Erfindung der Kurve reicht in das 17. Jahrhundert zurück, der Name kommt 1846 zum erstenmal in einer Abhandlung *Montuccis* in den Nouvelles Ann vor.

des von Kreis zu Kreis veränderlichen c zwischen diesen Gleichungen. Ihre Gleichung ist demnach

$$(10) \qquad (x^2 + y^2)x - a(x^2 - y^2) = 0.$$

Es ist dies eine algebraische Gleichung dritten Grades (13, I), und man nennt demgemäß die Kurve eine *algebraische Kurve dritter Ordnung*, sowie man allgemein eine Linie, deren Gleichung in x, y sich auf die Form einer algebraischen Gleichung n-ten Grades bringen läßt, als algebraische Kurve n-ter Ordnung bezeichnet.

Die Auflösung nach y gibt

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

und bestimmt zwei zur Abszissenachse symmetrische Zweige der Kurve, welche als positiver und negativer Zweig unterschieden werden mögen. Da y nur so lange reell ist, als x in dem Intervall $(-a, a)$ verbleibt, so liegt die Kurve vollständig zwischen den beiden Geraden $x = -a$ und $x = a$; bei $x = -a$ verliert der Ausdruck für y seine Bedeutung, für $\lim x = -a + 0$ aber wird $\lim y = \pm \infty$. An der anderen Grenze des Intervalls, $x = a$, treffen die beiden Zweige zusammen, da hier $y = 0$ ist; sie treffen aber auch in der Mitte des Intervalls, an der Stelle $x = 0$, zusammen, da auch hier $y = 0$ ist.

Aus

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a^2 - ax - x^2}{(a + x)\sqrt{(a + x)(a - x)}}$$

folgt, daß an der Stelle

$$x = + \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

die Tangente an jeden der beiden Zweige parallel ist zur Abszissenachse — die andere Stelle $-\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$, an welcher $\frac{dy}{dx}$ verschwindet, fällt außerhalb des Intervalles $(-a, a)$ —: bei dem positiven Zweige wird an dieser Stelle y zu einem Maximum, bei dem negativen zu einem Minimum, weil bei dem ersteren die Werte von $\frac{dy}{dx}$ in dem Intervalle $(-a, a)$ das Wertgebiet $(+\infty, 0, -\infty)$, bei dem zweiten das Wertgebiet

$(-\infty, 0, +\infty)$ durchlaufen; daraus geht zugleich hervor, daß an der Stelle $a/0$, wo die beiden Zweige zusammentreffen, sie eine zur Ordinatenachse parallele Tangente haben.

An der Stelle $x = 0$ hat $\frac{dy}{dx}$ für den positiven Ast den Wert $+1$, für den negativen Ast den Wert -1, so daß die beiden Äste der Kurve sich hier unter einem rechten Winkel durchschneiden; man nennt einen solchen Punkt der Kurve einen *Knotenpunkt.*

Um die Kurve durch einen Parameter darzustellen, setze man

$$y = ux;$$

mit dieser Substitution geht (10) über in

$$x^3(1 + u^2) - ax^2(1 - u^2) = 0;$$

neben der zweifach zählenden Lösung $x = 0$ folgt hieraus:

$$(11) \qquad \begin{cases} x = a\dfrac{1 - u^2}{1 + u^2} \\[2ex] y = a\dfrac{u(1 - u^2)}{1 + u^2}. \end{cases}$$

Es erscheinen somit x, y als *rationale* Funktionen des Parameters u; eine algebraische Kurve, welche eine solche Darstellung gestattet, nennt man eine *Unikursalkurve*; sie wird in *einem* Zuge beschrieben, wenn man den Parameter das Gebiet der reellen Zahlen durchlaufen läßt. Im vorliegenden Falle ist der Verlauf folgender, wenn $a > 0$ ist.

Geht u durch $(-\infty, -1)$, so beginnt x/y mit $-a/+\infty$ und endet mit $0/0$, es wird BO beschrieben; geht u weiter durch $(-1, 0)$, so beginnt x/y mit $0/0$ und endet mit $a/0$, und weil dabei y negativ bleibt, so wird ODA beschrieben; geht u weiter durch $(0, +1)$, so beginnt x/y mit $a/0$ und schließt mit $0/0$, und weil dabei y positiv bleibt, so wird AMO beschrieben; geht endlich u durch $(+1, +\infty)$, so beginnt x/y mit $0/0$ und schließt mit $-a/-\infty$, es wird OE beschrieben. Jedem Punkte der Kurve entspricht nur ein und jedem ein anderer Wert des Parameters, nur dem Punkte O entsprechen deren zwei, nämlich -1, $+1$; demgemäß ergibt sich in jedem Punkte der Kurve nur eine Tangente, im Punkte O aber sind deren zwei, und zwar folgt aus

$$\frac{dx}{du} = -a\frac{4u}{(1+u^2)^2}, \quad \frac{dy}{du} = a\frac{1-4u^2-u^4}{(1+u^2)^2}$$

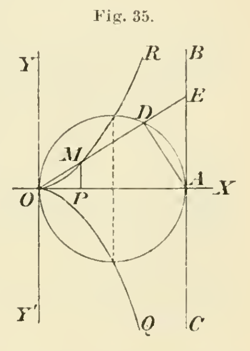
der Richtungskoeffizient der Tangente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1-4u^2-u^4}{4u},$$

welcher für $u = -1$ den Wert -1, für $u = 1$ den Wert $+1$ annimmt in Übereinstimmung mit dem früheren Resultate.

Man erkennt aus der angewandten Substitution, daß der u entsprechende Punkt der Kurve ihr Schnittpunkt mit der Geraden $y = ux$ ist.

Fig. 35.



3) Aus dem Endpunkte O des Durchmessers OA eines gegebenen Kreises (Fig. 35) wird nach der Tangente BC im anderen Endpunkte A der Strahl OE gezogen, welcher den Kreis in D schneidet; man mache $OM = DE$ und bestimme den Ort des Punktes M analytisch. — Die betreffende Kurve heißt *Zissoide* des Diokles.*)

Wird O zum Ursprung, OA zur Abszissenachse des Koordinatensystems gewählt, der Halbmesser des Kreises mit a bezeichnet, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OPM, OAE:

$$AE = \frac{y}{x}\,2a;$$

aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OPM, ADE:

$$AD = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,2a;$$

wendet man also auf das rechtwinklige Dreieck ADE, in welchem die dritte Seite $DE = OM = \sqrt{x^2+y^2}$ ist, den Pythagoreischen Satz an, so entsteht nach entsprechender Umformung die Gleichung der Kurve:

$$(12) \qquad (x^2+y^2)x = 2ay^2.$$

Man hat es also wieder mit einer algebraischen Kurve dritter Ordnung zu tun. Die Auflösung

*) Im 2. oder 3. vorchristlichen Jahrhundert.

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

zeigt, daß x auf das Intervall $(0, 2a)$ beschränkt ist und daß für $\lim x = 2a - 0$ sich $\lim y = \pm \infty$ ergibt. Die beiden Äste, welche im Punkte $0/0$ zusammentreffen, haben hier OX zur gemeinsamen Tangente, weil

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{4a - x}{2a - x} \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

für $x = 0$ nur den einen Wert 0 annimmt; einen Kurvenpunkt von dieser Art bezeichnet man als *Spitze.*

Mittels der Substitution

$$y = ux$$

ergibt sich wie im vorigen Beispiele die parametrische Darstellung

$$(13) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2au^2}{1 + u^2} \\ y = \dfrac{2au^3}{1 + u^2}, \end{cases}$$

so daß auch die Zissoide eine Unikursalkurve ist. Sie wird in dem Sinne QOR beschrieben, während u das Intervall $(-\infty + \infty)$ durchläuft.

4) Die durch die Gleichung

$$(14) \qquad x^3 - 3axy + y^3 = 0 \qquad (a < 0)$$

gekennzeichnete Kurve ist auf ihren Verlauf zu untersuchen. — Die Kurve führt den Namen *Cartesisches Blatt.**)

Die durch Gleichung (14) definierte Funktion y ist schon zweimal Gegenstand der Untersuchung gewesen. In 58, 2) ist gezeigt worden, daß sie, sofern nur die reellen Werte ins Auge gefaßt werden, eindeutig ist in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(a\sqrt[3]{4}, +\infty)$, während sie dreiwertig ist im Intervall $(0, a\sqrt[3]{4})$ von x. In 120, 2) wiederum hat sich ergeben, daß sie für $x = a\sqrt[3]{2}$ ein Maximum hat im Betrage $y = a\sqrt[3]{4}$. Beachtet man ferner, daß die Gleichung (14) keine Änderung erfährt bei Vertauschung von x mit y, so folgt, daß x die nämliche

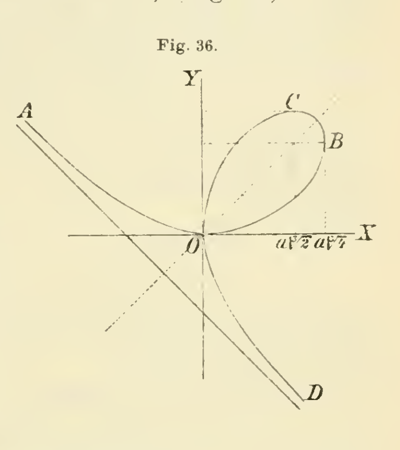
*) Zuerst erwähnt von Descartes 1638.

Funktion von y ist wie y Funktion von x; demnach ist auch x einwertig in den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(a\sqrt[3]{4}, +\infty)$, und dreiwertig in dem Intervalle $(0, a\sqrt[3]{4})$ von y, und erlangt an der Stelle $y = a\sqrt[3]{2}$ den Maximalwert $x = a\sqrt[3]{4}$. Überhaupt folgt aus dem letzten Umstande *Symmetrie* der Kurve in bezug auf die Halbierungslinie des Winkels XOY, (Fig. 36).

Mit Hilfe der Substitution $y = ux$ gibt die Gleichung (14):

$$(15) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{3au}{1+u^3} \\ y = \dfrac{3au^2}{1+u^3}. \end{cases}$$

Fig. 36.



Jedem Werte von u entspricht ein anderes Wertepaar x/y; eine Ausnahme jedoch machen die beiden Werte $u = 0$ und $u = \infty$, welchen beiden das nämliche Wertepaar $0/0$ zugeordnet ist; infolgedessen geht die Kurve zweimal durch den Ursprung; um die Richtungen, in welchen der Durchgang erfolgt, festzustellen, bilde man

$$\frac{dx}{du} = 3a\frac{1-2u^3}{(1+u^3)^2}, \qquad \frac{dy}{du} = 3a\frac{u(2-u^3)}{(1+u^3)^2}$$

und daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u(2-u^3)}{1-2u^3};$$

für $u = 0$ nimmt dies den Wert 0 und für $\lim u = \infty$ den Grenzwert ∞ an, so daß das eine Mal die Abszissenachse, das zweite Mal die Ordinatenachse berührt wird.

Die Kurve wird in dem Sinne $DOCBOA$ beschrieben, wenn der Parameter u nacheinander die Intervalle

$$(-1, -\infty), \quad (+\infty, 0), \quad (0, -1)$$

durchläuft, und zwar entspricht dem ersten Intervalle DO, dem zweiten $OCBO$, dem dritten OA.

5) Aus einem Punkte x_0/y_0 an eine gegebene Kurve $f(x, y) = 0$ die Tangenten zu führen.

Der Berührungspunkt x/y einer jeden solchen Tangente hat den Gleichungen

$$f(x, y) = 0,$$
$$(x_0 - x) f_x' + (y_0 - y) f_y' = 0$$

zu genügen, deren erste ausdrückt, daß er der Kurve angehört, deren zweite aussagt, daß die Tangente in ihm durch $x_0\ y_0$ geht. Die gemeinsamen Lösungen beider Gleichungen bestimmen die Berührungspunkte der gesuchten Tangenten.

Ist die Kurve algebraisch von n-ter Ordnung, so ordne man sie nach den Gliedern gleicher Dimension derart, daß

$$f(x, y) = \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \cdots + \varphi_0(x, y) = 0,$$

wobei $\varphi_r(x, y)$ eine homogene Funktion r-ten Grades darstellt. Alsdann ist

$$f_x' = \varphi'_n(x) + \varphi'_{n-1}(x) + \cdots + \varphi_1'(x)$$
$$f_y' = \varphi'_n(y) + \varphi'_{n-1}(y) + \cdots + \varphi_1'(y)$$

und sind die abgeleiteten Funktionen je um einen Grad niedriger als die ursprünglichen.

Die Gliedergruppe höchster Dimensionen in $xf' + yf_y'$ ist

$$x\varphi'_n(x) + y\varphi'_n(y),$$

und dies kommt vermöge des Eulerschen Satzes über homogene Funktionen (56) gleich

$$n\varphi_n(x, y),$$

wofür wegen der Kurvengleichung

$$-n[\varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_{n-2}(x, y) + \cdots + \varphi_0(x, y)]$$

gesetzt werden kann. Hiernach ist, wenn

$$f(x, y) = 0$$

eine algebraische Kurve n-ter Ordnung bedeutet, die Gleichung

$$(x_0 - x)f_x' + (y_0 - y)f_y' = 0$$

in bezug auf x, y von der $\overline{n-1}$-ten Ordnung, stellt also für sich betrachtet eine algebraische Kurve $n-1$-ter Ordnung dar, deren Schnittpunkte mit der gegebenen die Berührungspunkte der aus $x_0\ y_0$ an diese gezogenen Tangenten bedeuten. Nach dem Satze von Bézout aber gibt eine Kurve n-ter mit einer Kurve $\overline{n-1}$-ter Ordnung $n(n-1)$ Schnittpunkte; demnach *gehen aus einem Punkte an eine Kurve n-ter Ordnung im*

allgemeinen $n(n-1)$ *Tangenten.* Diese Zahl wird die *Klasse* der Kurve genannt, so daß eine Kurve n-ter Ordnung im allgemeinen von der $n(n-1)$-ten Klasse ist.

6) Es sind zwei Kurven durch ihre Gleichungen

$$(16) \qquad \varphi(x, y) = 0 \qquad \psi(x, y) = 0$$

gegeben; es ist die Bedingung aufzusuchen, unter welcher beide in einem ihrer gemeinsamen Punkte auch eine gemeinsame Tangente besitzen oder einander *berühren.*

Ist x/y ein gemeinsamer Punkt, so hat die Tangente an die erste Kurve dortselbst den Richtungskoeffizienten $-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$, die Tangente an die zweite Kurve den Richtungskoeffizienten $-\frac{\psi'_x}{\psi'_y}$; der gestellten Aufgabe gemäß muß $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = \frac{\psi'_x}{\psi'_y}$, oder

$$(17) \qquad \varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x = 0$$

sein; durch Elimination von x, y zwischen den Gleichungen (16) und (17) ergibt sich die verlangte Bedingung.

So findet man beispielsweise als Bedingung dafür, daß die Parabel

$$y^2 - 2px = 0$$

und die Ellipse

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

einander berühren, die Gleichung

$$\frac{2p\alpha}{b^2} - \frac{a^2 p^2}{b^4} = 1,$$

so daß, wenn a, p, b gegeben sind, sich als Mittelpunktsabszisse der Ellipse ergibt

$$\alpha = \frac{b^2}{2p} + \frac{a^2 p}{2b^2}.$$

7) Es sind zwei Kurven durch ihre Gleichungen (16) gegeben; es ist die Bedingung aufzusuchen, unter welcher sie sich in einem ihrer gemeinsamen Punkte *unter rechtem Winkel* schneiden.

Die Tangenten in dem gemeinsamen Punkte x/y, deren

Richtungskoeffizienten $-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$, $-\frac{\psi'_x}{\psi'_y}$ sind, sollen zueinander senkrecht stehen, daher muß $\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \cdot \frac{\psi'_x}{\psi'_y} + 1 = 0$ oder

$$\varphi'_x \psi'_x + \varphi'_y \psi'_y = 0 \tag{18}$$

sein. Durch Elimination von x, y zwischen den Gleichungen (16) und (18) ergibt sich die verlangte Bedingung.

Soll hiernach der Kegelschnitt

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{33} = 0, \qquad (a_{33} \neq 0)$$

dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, von der Geraden

$$Ax + By = 0$$

unter rechtem Winkel geschnitten werden, so muß

$$(a_{11} x + a_{12} y) A + (a_{12} x + a_{22} y) B = 0$$

sein; bringt man die drei Gleichungen behufs Elimination von x, y auf die Form

$$\begin{aligned} (a_{11} x + a_{12} y) x + (a_{12} x + a_{22} y) y + a_{33} &= 0 \\ Ax \quad + \quad By \quad &= 0 \\ (a_{11} A + a_{12} B) x + (a_{12} A + a_{22} B) y \quad &= 0, \end{aligned}$$

so ergibt sich als notwendige Bedingung für ihre Koexistenz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} x + a_{12} y & a_{12} x + a_{22} y & a_{33} \\ A & B & 0 \\ a_{11} A + a_{12} B & a_{12} A + a_{22} B & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und hieraus die von x, y unabhängige Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} A & B \\ a_{11} A + a_{12} B & a_{12} A + a_{22} B \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$a_{12} A^2 - (a_{11} - a_{22}) AB - a_{12} B^2 = 0,$$

durch welche die Achsenrichtungen des Kegelschnittes bestimmt sind.

129. Fußpunktkurven. Der Ort der Fußpunkte der von einem festen Punkte auf die Tangenten einer Kurve gefällten Lote wird die *Fußpunktkurve* dieser Kurve in bezug auf den festen Punkt als *Pol* genannt.

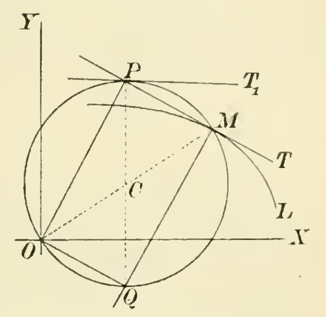
Man kann den Pol immer durch Verschiebung des Koordinatensystems zum Ursprung machen; von dieser Voraussetzung möge im folgenden auch Gebrauch gemacht werden.

Es sei

$$f(x, y) = 0 \tag{19}$$

die Gleichung der gegebenen Kurve, M ein Punkt derselben, T die zugehörige Tangente, OP das zu ihr gefällte Lot, somit P ein Punkt der Fußpunktkurve (Fig. 37); diese kann auch als Ort des Punktes aufgefaßt werden, den der über OM als Durchmesser beschriebene Kreis mit dem Lot zur Tangente M gemein hat.

Fig. 37.



Nun ist, wenn x, y die Koordinaten des Punktes M sind,

$$\left(\xi - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{4},$$

d. h.

$$\xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0 \tag{20}$$

die Gleichung des Kreises, und $\eta = -\frac{dx}{dy}\xi$, d. i.

$$\xi dx + \eta dy = 0 \tag{21}$$

die Gleichung des Lotes. Eliminiert man also zwischen den Gleichungen (19), (20), (21) [nachdem man in (21) $dy : dx$ durch den aus (19) dafür abgeleiteten Wert ersetzt hat] x, y, so ergibt sich die Gleichung der Fußpunktkurve.

Differentiiert man die Gleichung (20) unter dem Gesichtspunkte, daß mit M auch P sich ändert, so erhält man:

$$2\xi d\xi + 2\eta d\eta - \xi dx - \eta dy - x d\xi - y d\eta = 0,$$

was sich mit Rücksicht auf (21) vereinfacht zu

$$\left(\xi - \frac{x}{2}\right) d\xi + \left(\eta - \frac{y}{2}\right) d\eta = 0,$$

und daraus ergibt sich:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi - \frac{x}{2}}{\eta - \frac{y}{2}};$$

dies besagt aber, daß die Tangente der Fußpunktkurve in P senkrecht steht auf CQ; folglich ist diese Tangente T_1 zugleich Tangente an den gezeichneten Hilfskreis.

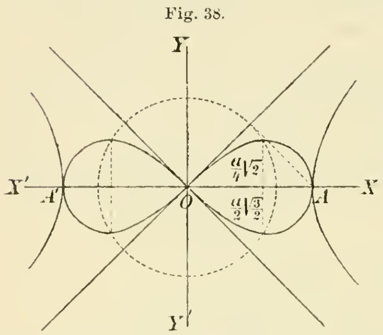
Beispiele. 1) Es ist die Fußpunktkurve der Parabel $y^2 + 8ax = 0$ in bezug auf ihren Scheitel als Pol zu bestimmen.

Die Gleichungen (20) und (21) lauten hier:

$$x\xi + y\eta = \xi^2 + \eta^2,$$
$$y\xi = 4a\eta;$$

löst man sie nach x, y auf und setzt die Werte in die Parabelgleichung ein, so ergibt sich

Fig. 38.



$$(\xi^2 + \eta^2)\xi = 2a\eta^2$$

als Gleichung der Fußpunktkurve; diese also ist eine *Zissoide* (128, 3)).

2) Die Fußpunktkurve der gleichseitigen Hyperbel in bezug auf ihren Mittelpunkt zu bestimmen.

Die gleichseitige Hyperbel (Fig. 38) auf ihre Achsen bezogen, lautet:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

und die Gleichungen (20) und (21) heißen jetzt:

$$x\xi + y\eta = \xi^2 + \eta^2,$$
$$x\eta + y\xi = 0;$$

durch Einsetzung der hieraus für x, y errechneten Werte in die Hyperbelgleichung entsteht

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - a^2(\xi^2 - \eta^2) = 0; \tag{22}$$

die Fußpunktkurve ist somit eine algebraische Kurve vierter Ordnung und heißt *Lemniskate* (des Bernoulli*).

Um ihre Form zu erkennen, führen wir den Parameter u mittels der Substitution

$$\eta = u\xi$$

*) Jakob Bernoulli, Acta erudit. 1694.

ein und erhalten die parametrischen Gleichungen

$$\xi = \pm a \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u^2}, \qquad \eta = \pm a \frac{u\sqrt{1-u^2}}{1+u^2},$$

wonach, da die Zeichen einander entsprechen, zu jedem Werte von u aus dem Intervalle $(-1, +1)$ zwei in bezug auf den Ursprung symmetrisch liegende Punkte gehören; da ferner zu entgegengesetzt gleichen Werten von u gleiche Werte von ξ, aber entgegengesetzt gleiche von η gehören, so ist die Kurve symmetrisch in bezug auf die Achsen. Eine Ausnahme machen die Grenzwerte -1, $+1$ des Intervalls, indem denselben der einzige Punkt $0/0$ entspricht; die Kurve geht zweimal durch den Ursprung.

Bildet man

$$\frac{d\xi}{du} = \pm a \frac{u(u^2-3)}{(1+u^2)^2\sqrt{1-u^2}}, \qquad \frac{d\eta}{du} = \pm a \frac{1-3u^2}{(1+u^2)^2\sqrt{1-u^2}},$$

so ergibt sich daraus, daß ξ extreme Werte erlangt für

$$u = 0^{*)}$$

und zwar sind es die Werte $\xi = \pm a$, welchen $\eta = 0$ entspricht; und daß η extreme Werte annimmt für

$$u = \pm\sqrt{\frac{1}{3}},$$

und zwar sind es die Werte $\eta = \pm \frac{a}{4}\sqrt{2}$, welchen

$$\xi = \pm \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

entsprechen; diese vier Punkte liegen auf dem Kreise $\xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{2}$.

Ferner zeigt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1-3u^2}{u(u^2-3)},$$

daß die Kurve im Ursprunge zwei Tangenten hat; denn zu $u = -1$ gehört der Wert -1 und zu $u = +1$ der Wert $+1$ von $\frac{d\eta}{d\xi}$; der Ursprung ist also ein Knotenpunkt.

130. Die Normale. Die Gerade, welche durch einen Punkt M der Kurve senkrecht zu der Tangente daselbst ge-

---

*) Die anderen Stellen, an welchen $\frac{d\xi}{du}$ verschwindet, nämlich $\xi = \pm\sqrt{3}$, fallen außerhalb $(-1, +1)$.

gezogen wird, nennt man die *Normale* der Kurve im Punkte M.

Die allgemeine Form ihrer Gleichung ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung 127, (5) der Tangente und lautet:

$$(23) \qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0.$$

Die spezielle Form richtet sich wie bei der Tangente nach der Art, wie die Kurve analytisch gegeben ist, und es entsprechen den Gleichungen 127, (6), (7), (8) der Tangente der Reihe nach die folgenden Gleichungen der Normale:

$$(24) \qquad \begin{cases} (\xi - x)\dfrac{dx}{du} + (\eta - y)\dfrac{dy}{du} = 0 \\ \eta - y = -\dfrac{1}{f'(x)}(\xi - x) \\ \dfrac{\xi - x}{F'_x} = \dfrac{\eta - y}{F'_y}. \end{cases}$$

Beispiele. 1) Die Gleichung der Normale für einen Punkt der Zykloide aufzustellen und ihren Abschnitt auf der Abszissenachse zu bestimmen.

Fig. 39.

Aus den Gleichungen der Zykloide (128, 1)):

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u)$$

folgt wegen

$$\frac{dx}{du} = a(1 - \cos u) = y,$$
$$\frac{dy}{du} = a \sin u = au - x$$

die Gleichung der Normale:

$$(\xi - x)y + (\eta - y)(au - x) = 0$$

und hieraus ergibt sich der zu $\eta = 0$ gehörige Wert von ξ, nämlich

$$\xi = au.$$

Die Normale geht hiernach durch den augenblicklichen Berührungspunkt des rollenden Kreises mit der Grundlinie (Fig. 39), wie dies aus der 128, 1) gefundenen Tangentenkonstruktion unmittelbar hätte gefolgert werden können.

2) Durch den Punkt x_0/y_0 zu einer gegebenen Kurve $f(x, y) = 0$ die Normalen zu führen.

Der Fußpunkt x/y jeder solchen Normale hat den Gleichungen

$$f(x, y) = 0$$
$$(x_0 - x)f'_y - (y_0 - y)f'_x = 0$$

zu genügen. Ihre gemeinsamen Lösungen bestimmen also die verlangten Normalen.

Ist die gegebene Kurve algebraisch von der Ordnung n, so ist $f(x, y)$ eine ganze Funktion n-ten Grades; f'_x, f'_y sind ebensolche Funktionen $n-1$-ten Grades und die höchstdimensionierte Gliedergruppe in der zweiten Gleichung $-xf'_y + yf'_x$, wieder vom n-ten Grade; die Fußpunkte der durch x_0/y_0 gehenden Normalen ergeben sich also als Schnittpunkte zweier Kurven n-ter Ordnung, ihre Anzahl ist daher im allgemeinen n^2. *Demnach gehen aus einem Punkte zu einer Kurve n-ter Ordnung im allgemeinen n^2 Normalen.*

Die gegebene Kurve sei die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1:$$

dann lautet die zweite Gleichung, wenn $c^2 = a^2 - b^2$ gesetzt wird,

$$c^2xy + b^2y_0x - a^2x_0y = 0,$$

und stellt eine Hyperbel dar, die durch den Ursprung des Koordinatensystems wie auch durch den gegebenen Punkt x_0/y_0 geht; bringt man die Gleichung in die Form

$$\left(x - \frac{a^2x_0}{c^2}\right)\left(y + \frac{b^2y_0}{c^2}\right) = -\frac{a^2b^2x_0y_0}{c^4},$$

dann erkennt man weiter, daß die Hyperbel gleichseitig ist mit den Asymptoten

$$x = \frac{a^2x_0}{c^2}, \qquad y = -\frac{b^2y_0}{c^2};$$

aus diesen Elementen ist es leicht, die Hyperbel zu konstruieren: ihre Schnittpunkte mit der Ellipse sind die Fußpunkte der Normalen zu dieser.

3) Man führe in analoger Weise wie in **129** an der Fig. 37 aus, daß der Ort der Fußpunkte der Lote, die man vom Ur-

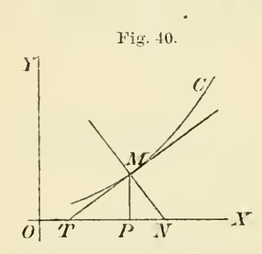
sprung auf die *Normalen* der Kurve $f(x, y) = 0$ fällt, durch Elimination von x, y zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta = 0$$
$$\eta\, dx - \xi\, dy = 0$$

erhalten wird, und bestimme diese Kurve für die Parabel in bezug auf den Scheitel, für die Ellipse in bezug auf den Mittelpunkt.

131. Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale. Wenn man in einem Punkte M einer Kurve die Tangente und die Normale konstruiert und beide mit der Abszissenachse zum Schnitte bringt, so wird die Strecke zwischen M und dem betreffenden Schnittpunkte als *Länge der Tangente*, beziehungsweise *Länge der Normale* bezeichnet. Die Projektionen dieser Strecken auf der Abszissenachse nennt man *Subtangente* und *Subnormale*.

Fig. 40.



Hiernach ist in Fig. 40

$TM = \mathsf{T}$ die Länge der Tangente,
$NM = \mathsf{N}$ die Länge der Normale,
$TP = t$ die Subtangente,
$PN = n$ die Subnormale;

die beiden ersten Strecken sind absolute Größen, die beiden letzten erhalten je nach der Lage der Punkte T, N gegen P verschiedene Vorzeichen.

Bezeichnet man den Winkel XTM mit α, so ist $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (**22**, 2)), und aus dem Dreieck TPM folgt

$$(25) \qquad t = \frac{y}{y'};$$

aus dem Dreieck PNM, wo Winkel $PMN = \alpha$,

$$(26) \qquad n = yy';$$

mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes ergibt sich dann:

$$(27) \qquad \mathsf{T} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2},$$

$$(28) \qquad \mathsf{N} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

Bei der in der Figur dargestellten Lage der Punkte T, N gegen P fallen t, n beide positiv, bei der entgegengesetzten Lage beide negativ aus.

Beispiele. 1) Als Parabel im allgemeinen Sinne bezeichnet man jede Kurve, deren Gleichung die Form

$$y = ax^m$$

besitzt; m heißt die Ordnung der Parabel, gleichgültig ob es eine positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl ist. Es ist die Subtangente für den Punkt x/y dieser Kurve zu bestimmen.

Weil $y' = max^{m-1} = \frac{my}{x}$, so ist

$$t = \frac{x}{m},$$

die Subtangente also der m-te Teil der Abszisse. Diese Eigenschaft ermöglicht bei rationalem m eine einfache Tangenten- und Normalenkonstruktion.

So ist für die gewöhnliche Parabel entweder $m = 2$ oder $m = \frac{1}{2}$, je nachdem die Ordinaten- oder Abszissenachse die Achse der Kurve bildet, und dementsprechend ist

$$t = \frac{x}{2}\text{ bzw. } t = 2x.$$

2) Die durch die Gleichung

$$y = ae^{\frac{x}{a}} \tag{29}$$

dargestellte transzendente Kurve führt den Namen *logarithmische Linie*, weil die durch a gemessenen Abszissen die natürlichen Logarithmen der durch a gemessenen Ordinaten sind. Es soll für diese Kurve die Subtangente bestimmt werden.

Weil $y' = e^{\frac{x}{a}} = \frac{y}{a}$, so ist

$$t = a,$$

die Subtangente also konstant.

Konstruiert man aus den beiden logarithmischen Linien

$$y = ae^{\frac{x}{a}}, \qquad y = ae^{-\frac{x}{a}}$$

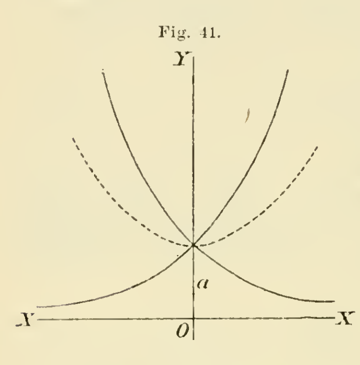
eine neue Kurve, indem man je aus den zu einer Abszisse gehörigen Ordinaten das arithmetische Mittel bildet und als Ordinate der neuen Kurve betrachtet, so hat diese die Gleichung

$$(30) \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

sie führt den Namen *Kettenlinie.* *)

Ist a positiv, so ist auch y in allen drei Gleichungen beständig positiv, und weil für die erste der logarithmischen Linien $y' = \frac{y}{a} > 0$, für die zweite $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{a} < 0$, so ist die erste mit wachsendem x fort steigend, die zweite fort fallend, und beide haben den einzigen Punkt $0/a$ gemeinsam, durch welchen auch die Kettenlinie geht (Fig. 41).

Fig. 41.



Für die Länge der Normale der Kettenlinie ergibt sich, weil

$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ und

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a}$$

ist, der Ausdruck

$$\mathsf{N} = \frac{y^2}{a},$$

wonach N als dritte stetige Proportionale zu dem konstanten a und zu y konstruiert werden kann.

132. Die Tangente im Polarkoordinatensystem. Wenn es sich um die Festlegung eines einzelnen Punktes im *Polarkoordinatensysteme* handelt, so genügt es, den Radiusvektor r als eine absolute Größe zu betrachten und die Amplitude φ

*) Als Gleichgewichtsfigur eines gleichmäßig schweren, an beiden Enden gleich hoch befestigten Seils wurde sie fast gleichzeitig (1690—1691) von Jakob und Johann Bernoulli, Huygens und Leibniz erkannt, nachdem Galilei (1638) die Parabel dafür gehalten hatte.

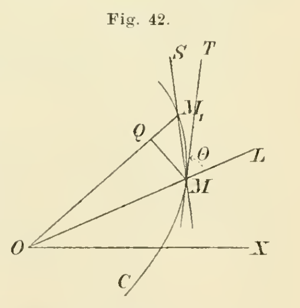
auf das Intervall $(0, 2\pi)$ zu beschränken, weil es bei solcher Festlegung möglich ist, jeden Punkt der Ebene durch ein einziges Wertepaar r/φ zu charakterisieren.

Will man jedoch den ganzen Inhalt einer Gleichung zwischen r und φ erschöpfen, dann ist es in vielen Fällen erforderlich, beiden Variablen das Intervall $(-\infty, +\infty)$ anzuweisen. Bezüglich der Amplitude hat dies die Bedeutung, daß der aus dem Pole gezogene veränderliche Strahl einer unbeschränkten Drehung sowohl in einem als positiv angenommenen wie auch im entgegengesetzten Sinne fähig sei; als positiver Drehungssinn soll der dem Drehungssinne des Uhrzeigers entgegengesetzte gelten. Ein negativer Wert von r hingegen ist so zu deuten, daß er nicht auf dem durch φ bestimmten, sondern auf dem ihm entgegengesetzten Strahle abzutragen sei.

Die Beschränkung von φ auf das Intervall $(0, 2\pi)$ ist nur dann zulässig, wenn die Gleichung φ in keiner anderen Weise denn als Argument trigonometrischer Funktionen enthält.

Die Richtung der *Tangente* an eine Kurve im Punkte M derselben (Fig. 42) wird im Polarsystem OX durch den Winkel θ bestimmt, durch welchen die Verlängerung ML des Leitstrahls bei *positiver* Drehung um M in die Tangente übergeführt wird.

Fig. 42.



Es seien r/φ die Koordinaten des Punktes M, $r + \Delta r/\varphi + \Delta\varphi$ die Koordinaten eines zweiten Punktes M_1 der gegebenen Kurve. Der Winkel θ ist der Grenzwert, welchem der Winkel $LMS = \varpi$ sich nähert, wenn M_1 auf der Kurve gegen den Punkt M konvergiert. Nun folgt aus dem Dreieck OMM_1, in welchem die Winkel bei M, M_1 bzw. $\pi - \varpi$ und $\varpi - \Delta\varphi$ sind, daß

$$\frac{r}{r + \Delta r} = \frac{\sin(\varpi - \Delta\varphi)}{\sin\varpi};$$

daraus ergibt sich, wenn man beiderseits den Zähler vom Nenner subtrahiert,

$$\frac{r}{\Delta r} = \frac{\sin(\varpi - \Delta\varphi)}{\sin\varpi - \sin(\varpi - \Delta\varphi)}$$

$$= \frac{\sin(\varpi - \Delta\varphi)}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\left(\varpi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

und weiter

$$\frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}} = \frac{\frac{\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{\sin(\varpi - \Delta\varphi)}{\cos\left(\varpi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)};$$

indem nun M_1 unaufhörlich dem Punkte M sich nähert, konvergiert $\Delta\varphi$ gegen den Grenzwert Null, ϖ wie schon bemerkt gegen den Grenzwert θ, $\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}$ gegen den Differentialquotienten $\frac{dr}{d\varphi} = r'$ des Radiusvektors in bezug auf die Amplitude, und die Gleichung selbst lautet dann (**16**, 2)):

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r}{r'}. \tag{31}$$

Hieraus ergeben sich für $\sin\theta$ und $\cos\theta$ die Ausdrücke

$$\sin\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \quad \cos\theta = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}, \tag{32}$$

in welchen die Wurzel mit ihrem positiven Werte zu nehmen ist.

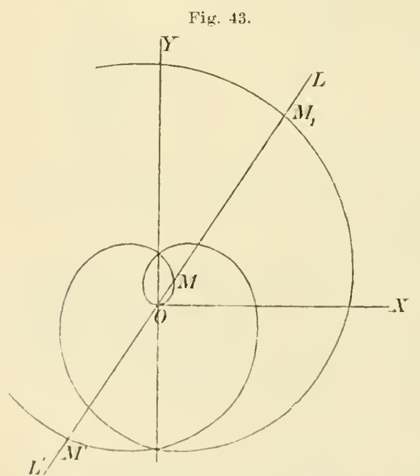


Fig. 43.

Ist für einen Punkt der Kurve $r' = 0$, so zeigen die Gleichungen (32), daß dann $\theta = \frac{\pi}{2}$, die Tangente also senkrecht ist zum Leitstrahl; unter diesen Punkten befinden sich auch diejenigen, in welchen r einen extremen Wert hat.

Ist r' für einen Punkt nicht definiert, der Grenzwert von r' aber bei Annäherung an diesen Punkt ∞, so zeigt die Gleichung (31), daß $\theta = 0$; die Tangente fällt also dann mit dem Leitstrahle zusammen.

133. *Beispiele.* 1) Ein Punkt M bewegt sich gleichförmig auf der unbegrenzten Geraden $L'OL$ (Fig. 43), in dem durch die Ordnung dieser Buchstaben angezeigten Sinne, während die Gerade selbst sich um den festen Punkt O gleichförmig im positiven Sinne dreht; es ist die Gleichung der von M beschriebenen Kurve aufzustellen. — Die Kurve führt den Namen *Archimedische Spirale.**)

Wählt man den Punkt O als Pol und diejenige Lage des Strahls OL, welche er in dem Augenblicke annimmt, da der bewegliche Punkt durch O geht, als Polarachse — es sei dies OX —, so sind die künftigen Richtungen von OL durch positive Werte von φ, die vorangegangenen durch negative Werte von φ gekennzeichnet; ebenso ist r von da an positiv, während es vordem als negativ zu gelten hatte. Wegen der Gleichförmigkeit beider Bewegungen ist das Verhältnis der von dem bezeichneten Augenblicke an gezählten Wege konstant, d. h.

$$\frac{r}{\varphi} = a$$

und somit

$$r = a\varphi; \tag{33}$$

dabei bedeutet a den zum Winkel vom Bogenmaß 1 ($57^0.29577\ldots$) gehörigen Radiusvektor.

Die Kurve geht durch den Pol und beschreibt von da aus nach beiden Seiten unendlich viele, beständig sich erweiternde Windungen, welche gegen die zur Polarachse senkrechte Gerade OY symmetrisch angeordnet sind. Die auf einem beliebigen Strahl von dem *einen* Laufe der Kurve ausgeschnittenen Punkte, wie M, $M_1, \ldots$ und M, $M', \ldots$, sind äquidistant und haben den gegenseitigen Abstand $2\pi a$.

Aus (33) ergibt sich $r' = a$ und infolgedessen ist

$$\operatorname{tg} \theta = \varphi:$$

auf dem positiven Laufe $OMM_1 \ldots$ ist also der Winkel θ

*) Von Archimedes (287—212 v. Chr.) erfunden und zuerst untersucht. Die *vollständige* Kurve, mit dem links- und dem rechtsgewundenen Zweige, findet sich zuerst bei Euler (1748).

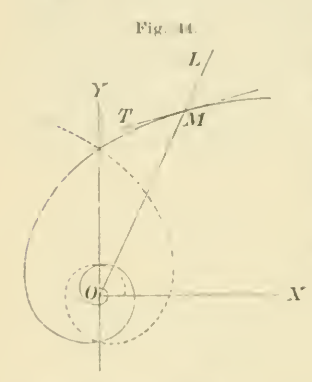
beständig spitz, beginnt mit dem Werte 0 und nähert sich mit wachsendem φ dem Grenzwerte $\frac{\pi}{2}$.

2) Für die durch die Gleichung

$$r\varphi = a \qquad (a > 0) \tag{34}$$

dargestellte Kurve die Richtung der Tangente zu untersuchen. — Wegen der Analogie ihrer Gleichung mit jener der Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten als Koordinatenachsen, wird diese Kurve *hyperbolische Spirale**) genannt.

Zu positiven Werten von φ gehören positive, zu negativen negative Werte von r, infolgedessen ist die Kurve symmetrisch zu der im Pole zur Polarachse errichteten Senkrechten. Mit gegen Null konvergierendem φ wächst r ins Unendliche, mit beständig wachsendem φ nimmt r gegen die Grenze Null ab; die Kurve umgibt demnach den Pol in zwei Scharen von unbegrenzt vielen immer enger werdenden Windungen (Fig. 44).



Weil $r' = -\frac{a}{\varphi^2}$, so hat man

$$\operatorname{tg}\theta = -\varphi;$$

daraus folgt, daß für die Windungen, welche dem Intervalle $(0, +\infty)$ von φ entsprechen, θ ein stumpfer Winkel ist, der sich mit wachsendem φ der Grenze $\frac{\pi}{2}$ nähert.

3) Die Richtung der Tangente bei der durch die Gleichung

$$r = ae^{m\varphi} \tag{35}$$

dargestellten Kurve zu verfolgen. — Diese Kurve, weil die Amplituden ihrer Punkte proportional sind den Logarithmen der durch a gemessenen Radienvektoren, führt den Namen *logarithmische Spirale*.**)

Wir setzen a als positiv voraus, dann ist auch r beständig

*) Von Johann Bernoulli (1710) so benannt.

**) Zuerst von Descartes (1638) untersucht, von Varignon (1704) benannt.

positiv. Von den Parametern a, m ist nur der letztere bestimmend für die Gestalt der Kurve; denn zwei Kurven, wie (35) und

$$r = A e^{m\varphi},$$

die sich nur in dem ersten Parameter voneinander unterscheiden, lassen sich durch Drehung der einen um den Pol ineinander überführen: dreht man nämlich die zweite Kurve um den Winkel α, so hat sie in der neuen Lage die Gleichung

$$r = A e^{m(\varphi + \alpha)} = A e^{m\alpha} \cdot e^{m\varphi},$$

und nun läßt sich α immer so bestimmen, daß

$$A e^{m\alpha} = a$$

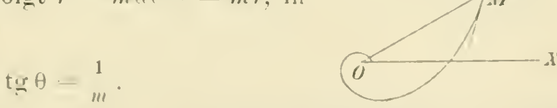
wird, daß also die zweite Kurve nach der Drehung mit der ersten zusammenfällt; man braucht nur

$$\alpha = \frac{1}{m}\, l\, \frac{a}{A}$$

zu nehmen.

Indem φ positiv bleibend wächst, nimmt bei positivem m auch r beständig zu; und indem φ negativ bleibend dem absoluten Werte nach beständig wächst, konvergiert r gegen die Grenze Null: die Kurve umgibt den Pol in unzählig vielen Windungen, welche, im positiven Drehungssinne des Leitstrahls verfolgt, beständig sich erweitern (Fig. 45). Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei negativem m.

Fig. 45.



Aus (35) folgt $r' = m a e^{m\varphi} = m r$, infolgedessen ist

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{m},$$

somit $\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{m}$ konstant. *Die logarithmische Spirale schneidet demnach alle Radienvektoren unter einem und demselben Winkel.*

134. Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale im Polarsystem. Wenn man die Tangente und die Normale in einem Punkte M einer Kurve bis zum Schnitt mit der Geraden verlängert, welche man durch O senkrecht zum Leitstrahl OM gezogen hat, so wird die zwischen M und

dem betreffenden Schnittpunkte enthaltene Strecke als *Länge der Tangente*, beziehungsweise *Länge der Normale* bezeichnet; die orthogonalen Projektionen dieser Strecken auf der Senkrechten zum Leitstrahl heißen *Subtangente* und *Subnormale*. Hiernach ist (Fig. 46):

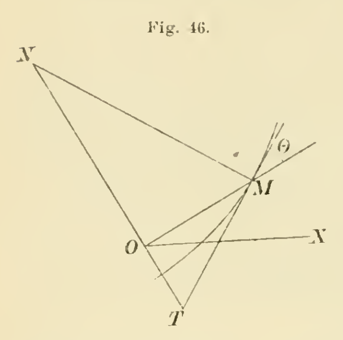


Fig. 46.

$TM = \mathsf{T}$ die Länge der Tangente

$NM = \mathsf{N}$ die Länge der Normale

$TO = t$ die Subtangente

$ON = n$ die Subnormale;

die beiden ersten Strecken sind absolute Größen; das Vorzeichen der beiden letzten hängt von der Richtung der Tangente im Punkte M ab; bei der durch die Figur dargestellten Lage der Punkte T, N sind beide positiv, bei entgegengesetzter Anordnung negativ.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OTM folgt $t = r \operatorname{tg} \theta$, also (**132**, (31))

$$t = \frac{r^2}{r'}; \tag{36}$$

aus dem OTM ähnlichen Dreieck OMN ergibt sich $n = \frac{r}{\operatorname{tg} \theta}$, also

$$n = r'; \tag{37}$$

durch Anwendung des Pythagoreischen Satzes erhält man schließlich

$$\mathsf{T} = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{r'^2}} = \frac{r}{r'} \sqrt{r^2 + r'^2}, \tag{38}$$

$$\mathsf{N} = \sqrt{r^2 + r'^2}. \tag{39}$$

Beispiele. 1) Bei der Archimedischen Spirale

$$r = a\varphi$$

ist

$$n = a,$$

die Subnormale also konstant; der Ort des Punktes N (Fig. 46), ist demnach bei dieser Kurve der um den Pol mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis.

2) Bei der hyperbolischen Spirale

$$r\varphi = a$$

ist

$$t = -a,$$

die Subtangente also konstant; hier ist demnach der Ort des Punktes T der um den Pol mit dem Radius a beschriebene Kreis.

3) Bei der logarithmischen Spirale

$$r = a e^{m\varphi}$$

ist

$$t = \frac{1}{m} r, \quad n = mr, \quad \mathsf{T} = \frac{r}{m}\sqrt{1+m^2}, \quad \mathsf{N} = r\sqrt{1+m^2};$$

alle vier Strecken sind also dem Radiusvektor proportional.

Der Punkt T hat bei dieser Kurve die Koordinaten

$$R = t = \frac{r}{m}; \qquad \Phi = \varphi - \frac{\pi}{2};$$

eliminiert man mit Hilfe dieser Gleichungen r, φ aus der Gleichung der Kurve, so entsteht

$$R = \frac{a}{m} e^{m\left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

als Gleichung des Ortes von T.

Der Punkt N hat die Koordinaten

$$R = n = m r, \qquad \Phi = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

hiermit ergibt sich auf gleichem Wege

$$R = m a e^{m\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

als Gleichung des Ortes von N.

Sowohl der Ort von T wie der von N ist hiernach eine der zugrunde liegenden kongruente logarithmische Spirale (**133**, 3)).

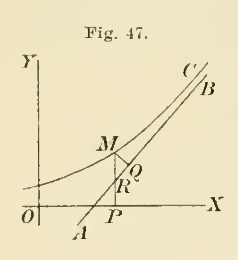
§ 2. Asymptoten.

135. Erste Definition. Wenn die Gleichung einer Kurve in x, y beliebig große Werte einer oder beider Variablen zuläßt, so sagt man, die Kurve besitze *unendlich ferne Punkte* oder erstrecke sich ins Unendliche.

Als Asymptote eines unendlichen Kurvenzweiges definieren wir eine Gerade von solcher Beschaffenheit, daß ein den Zweig durchlaufender Punkt von ihr einen gegen Null abnehmenden Abstand hat.

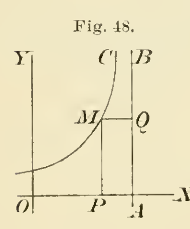
Die Gerade AB ist also eine Asymptote der Kurve MC, (Fig. 47), wenn das Lot MQ bei fortschreitender Bewegung von M gegen C hin zur Grenze Null konvergiert. Mit dem Lot konvergiert auch jede in einer bestimmten anderen Richtung zu AB gezogene Strecke MR gegen Null, weil das Verhältnis $\frac{MR}{MQ}$ für alle Lagen von M dasselbe bleibt. Daher kann insbesondere statt MQ auch die zu einer Abszisse gehörige Ordinatendifferenz MR von Kurve und Asymptote zum Nachweise der letzteren verwendet werden.

Fig. 47.



In dem Falle jedoch, wo die Asymptote der Ordinatenachse parallel ist, wie in Fig. 48, ist dieser Vorgang ausgeschlossen und wird man zweckmäßig den Abstand MQ selbst wählen, der sich nun als die zu einer Ordinate gehörige Abszissendifferenz der Kurve und Asymptote darstellt.

Fig. 48.



Von diesem Falle zunächst abgesehen, wird man auf Grund der aufgestellten Definition folgende Aussage machen können:

Läßt sich die Gleichung einer Kurve in die Gestalt

$$(1) \qquad y = \alpha x + \beta + v$$

bringen, wobei v eine Funktion von x bedeutet, die für $\lim x = \infty$ gegen Null konvergiert, so hat die Kurve die Gerade

$$(2) \qquad y = \alpha x + \beta$$

zur Asymptote.

Denn ein Punkt x/y hat von der Geraden (2) den Abstand

$$\delta = \frac{y - \alpha x - \beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}},$$

und gehört der Punkt der Kurve an, so ist $y - \alpha x - \beta = v$, also

$$\delta = \frac{v}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

und dies konvergiert voraussetzungsgemäß gegen Null, wenn x unbeschränkt wächst. Übrigens läßt auch die andere Auffassung die Richtigkeit der Behauptung erkennen: denn v ist die Ordinatendifferenz von Kurve und Geraden.

Die Bedingungen des obigen Satzes sind erfüllt, wenn sich y nach fallenden Potenzen von x entwickeln läßt und wenn die Entwickelung mit der ersten oder nullten Potenz anhebt; in dem letztgedachten Falle ergibt sich eine zur x-Achse parallele Asymptote.

136. Zweite Definition. Man kann bei einer ins Unendliche fortsetzbaren Kurve auch folgende Betrachtung anstellen. Verzeichnet man im Punkte M an die Kurve die Tangente, so wird diese bei fortschreitender Bewegung von M auf der Kurve Richtung und Lage ändern und kann dabei einer festen Geraden als Grenze sich nähern. Ist dies der Fall, so wird diese feste Gerade als Asymptote bezeichnet. Demnach hat man die folgende Definition:

Eine Asymptote ist die Grenzlage einer Tangente bei unaufhörlich fortschreitender Bewegung des Berührungspunktes auf der Kurve.

Die Existenz einer Grenzlage der Tangente

$$\eta - y = y'(\xi - x)$$

erfordert zweierlei: es muß die Richtung derselben einer bestimmten Richtung als Grenze sich nähern, also y' einen bestimmten Grenzwert besitzen, und es muß auch der Abschnitt auf der Ordinatenachse, d. i. $y - xy'$, gegen einen bestimmten Grenzwert konvergieren: nur wenn beides zutrifft, ist eine Grenzlage

$$y = Ax + B \tag{3}$$

vorhanden, und zwar ist

$$A = \lim y', \qquad B = \lim (y - xy') \text{ für } x = \infty. \tag{4}$$

Sollte y' bei der Fortbewegung des Punktes auf der Kurve ins Unendliche wachsen, der Abschnitt auf der Abszissenachse

aber, d. i. $x - \frac{y}{y'}$, gegen eine bestimmte Grenze c konvergieren, dann hat die Tangente eine zur Ordinatenachse parallele Grenzlage, die Kurve eine ebensolche Asymptote.

137. Zusammenhang beider Definitionen. Es soll nun nachgewiesen werden, daß die beiden Definitionen wohl im allgemeinen, nicht aber notwendig zu demselben Resultate führen.

Aus der Gleichung (1) der Kurve folgt

$$\frac{y}{x} = \alpha + \frac{\beta + v}{x},$$

woraus man erkennt, daß α der Grenzwert von $\frac{y}{x}$ ist, also

$$\alpha = \lim \frac{y}{x}: \tag{5}$$

für $x = \infty$ und ein gleichzeitig unendlich werdendes y ist aber nach der in 110 gefundenen Regel

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{y'}{1} = \lim y',$$

daher mit Rücksicht auf (4): $\alpha = A$; die Richtungskoeffizienten der Asymptote und der Grenzlage der Tangente stimmen also überein.

Aus (1) folgt auch

$$\beta = y - \alpha x - v,$$

daher ist β der Grenzwert von $y - \alpha x$,

$$\beta = \lim (y - \alpha x), \tag{6}$$

und da nach eben bewiesenem α auch der Grenzwert von y' ist, so ist *im allgemeinen* der Grenzwert von $y - \alpha x$ auch der Grenzwert von $y - xy'$, d. h. $\beta = B$.

Nebenbei mag angemerkt werden, daß die Gleichungen (5), (6) das Verfahren angeben, nach welchem eine zur Ordinatenachse *geneigte* Asymptote bei *expliziter* Gleichungsform der Kurve gefunden werden kann.

Zur Illustration des eben betrachteten *normalen* Falles diene das folgende Beispiel. Die Gleichung $xy - \alpha x^2 - \beta x = a$ kommt durch Auflösung nach y:

$$y = \alpha x + \beta + \frac{a}{x}$$

in die vorausgesetzte Form (1), die $y = \alpha x + \beta$ unmittelbar als eine Asymptote der betreffenden Kurve (Hyperbel) erkennen läßt. Andererseits ist

$$y' = \alpha - \frac{a}{x^2}, \qquad y - y'x = \beta + \frac{2a}{x};$$

folglich $\lim y' = \alpha$, $\lim (y - xy') = \beta$; die Asymptote ist demnach auch Grenzlage der Tangente.

Dagegen soll das folgende Beispiel zeigen, daß es auch Ausnahmen von der Norm gibt.

Der Gleichung

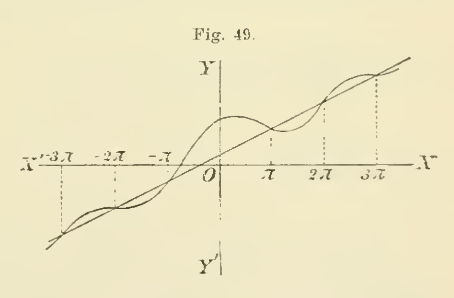
$$y = \alpha x + \beta + \frac{c \sin x}{x}$$

entnimmt man sogleich, daß $y = \alpha x + \beta$ eine Asymptote der durch sie dargestellten transzendenten Kurve ist. Sie liefert ferner:

$$y' = \alpha + \frac{c \cos x}{x} - \frac{c \sin x}{x^2}, \qquad y - xy' = \beta - c \cos x + \frac{2c \sin x}{x};$$

wohl ist $\lim y' = \alpha$, aber $\lim (y - xy')$ existiert nicht, weil $c \cos x$ bei beständig wachsendem x unaufhörlich zwischen $-c$ und c schwankt. Die Kurve hat also eine Asymptote im Sinne der ersten Definition, nicht aber im Sinne der zweiten. Ihr Bild (Fig. 49), erklärt diese Tatsache: sie schlingt sich wellenförmig um die Gerade $y = \alpha x + \beta$. Die Wellenzüge von gleicher Länge (in Projektion auf der x-Achse gleich π) werden mit absolut wachsendem x immer flacher; die *Richtung* der Tangente nähert sich jener der Geraden, aber ihr *Abschnitt* auf der Ordinatenachse schwankt unaufhörlich zwischen $\beta - c$ und $\beta + c$.

Fig. 49.



138. Zurückführung der Untersuchung der unendlich fernen Punkte auf Punkte im Endlichen. Es sei $f(x, y) = 0$ eine Kurve mit unendlich fernen Punkten. Durch Anwendung der projektiven Transformation (64, II):

(7) $$x_1 = \frac{1}{x}, \qquad y_1 = \frac{y}{x}$$

gehe sie in die Kurve $F(x_1, y_1) = 0$ über. Aus der Transformation geht aber hervor, daß für $x = \infty$ $x_1 = 0$ wird, daß also den unendlich fernen Punkten von f die Schnittpunkte von F mit der Ordinatenachse entsprechen (ausgenommen Punkte, die bei endlichem x ein unendliches y haben).

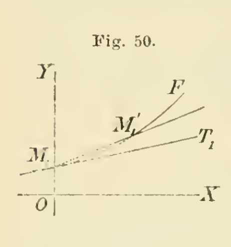


Fig. 50.

Aus dem unendlichen Zweig von f sei der Kurvenzweig F (Fig. 50) geworden; dann entspricht also sein Punkt $M_1(o, \alpha)$ dem unendlich fernen Punkte von f. Existiert in M_1 eine Tangente an F, so ergibt sich ihr Richtungskoeffizient β als Grenzwert des Quotienten $\frac{y_1 - \alpha}{x_1}$ für $\lim x_1 = 0$, wenn $x_1\, y_1$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes M'_1 von F bedeuten; mithin ist

$$\frac{y_1 - \alpha}{x_1} = \beta + v,$$

wobei v eine Funktion vorstellt, die mit $\lim x_1 = 0$, also $\lim x = \infty$ zur Null konvergiert; hieraus ergibt sich

$$y_1 = \beta x_1 + \alpha + x_1 v,$$

daraus durch Rücktransformation

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta}{x} + \alpha + \frac{v}{x}$$

und schließlich

$$y = \alpha x + \beta + v.$$

Demnach ist die Gerade $y = \alpha x + \beta$, die Transformierte der Tangente $M_1 T_1$ an F_1, Asymptote von f, und da bei der projektiven Transformation eine Tangente als Verbindungslinie zweier unendlich nahen Punkte wieder in eine Tangente übergeht, so ist die Asymptote unter den gemachten Voraussetzungen auch Tangente im unendlich fernen Punkte von f.

Ist f eine algebraische Kurve n-ter Ordnung, so ist nach 64, II auch F eine algebraische Kurve n-ter Ordnung, und da bei einer algebraischen Kurve in einem Punkte eines bestimmten Zweiges immer eine Tangente existiert, so folgt daraus, daß *bei einer algebraischen Kurve jede Asymptote zugleich Tangente*

in einem unendlich fernen Punkte ist, und daß eine algebraische Kurve n-ter Ordnung im allgemeinen n Asymptoten besitzt.

Wendet man die Transformation (7) auf die im vorigen Artikel betrachtete transzendente Kurve

$$y = \alpha x + \beta + \frac{c \sin x}{x}$$

an, so ergibt sich als transformierte Kurve

$$y_1 = \alpha + \beta x_1 + c x_1^2 \sin \frac{1}{x_1},$$

die mit der Ordinatenachse den Punkt M_1 mit den Koordinaten

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = \alpha$$

gemein hat; aber eine Tangente besitzt sie dort nicht, weil

$$\frac{d y_1}{d x_1} = \beta + 2 c x_1 \sin \frac{1}{x_1} - c \cos \frac{1}{x_1}$$

für $x_1 = 0$ wegen des Gliedes $-c \cos \frac{1}{x_1}$ keinen bestimmten Wert erlangt. Die transformierte Kurve nähert sich dem Punkte M_1 in unendlich vielen immer dichter werdenden und immer flacheren Windungen, wie dies Fig. 51 nur andeutungsweise zur Anschauung bringen kann.

Fig. 51.

139. Aufsuchung zu den Koordinatenachsen paralleler Asymptoten. Bei einer in der expliziten Form $y = f(x)$ gegebenen Kurve ist es im allgemeinen leicht, etwa vorhandene Asymptoten parallel zur Ordinatenachse zu erkennen. Hört $f(x)$ für $x = a$ auf definiert zu sein und wächst es für $\lim x = a$ ins Unendliche, so ist $x = a$ eine Asymptote. Aus dem schließlichen Vorzeichen von $f(x)$ und der Art des Grenzübergangs erkennt man die Anordnung der unendlichen Zweige gegen die Asymptote. Einige Beispiele mögen dies erläutern.

Aus der aufgelösten Gleichung der Strophoide (128, 2):

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

ersieht man, daß für $\lim x = -a + 0$ $y = \mp \infty$ wird; die Gerade $x = -a$ ist demnach eine Asymptote, der sich zwei unend-

liche Zweige oben und unten von rechts her nähern (Fig. 34, pag. 336).

Die aufgelöste Gleichung der Zissoide (128, 3)):

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

zeigt, daß $y = \pm \infty$ wird für $\lim x = 2a - 0$; die beiden unendlichen Zweige nähern sich der Asymptote $x = 2a$ von links her (Fig. 35, pag. 339).

Ist die Gleichung einer Kurve in algebraischer Form dargestellt, so ordne man sie nach fallenden Potenzen von y:

$$y^m \varphi(x) + y^{m-1} \varphi_1(x) + y^{m-2} \varphi_2(x) + \cdots = 0; \tag{8}$$

die zur y-Achse parallelen Asymptoten sind dann durch die Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x) = 0 \tag{9}$$

bestimmt. Denn, schreibt man (8) in der Gestalt:

$$\varphi(x) + \frac{\varphi_1(x)}{y} + \frac{\varphi_2(x)}{y^2} + \cdots = 0,$$

so ist zu erkennen, daß sie erfüllt wird durch $y = \infty$ und $\varphi(x) = 0$, und daß kein anderer Wert von x mit $y = \infty$ vereinbar ist als nur eine Wurzel von $\varphi(x) = 0$.

Die Abszissen der zur Ordinatenachse parallelen Asymptoten der Kurve (8) *sind also unter denjenigen Werten von x zu suchen, für welche der Koeffizient der höchsten Potenz von y, falls er nicht konstant ist, verschwindet.*

In analoger Weise ergeben sich die zur Abszissenachse parallelen Asymptoten durch Nullsetzen des Koeffizienten der höchsten Potenz von x, falls er von y abhängt.

Beispiele. 1) Bei der Kurve 4. Ordnung:

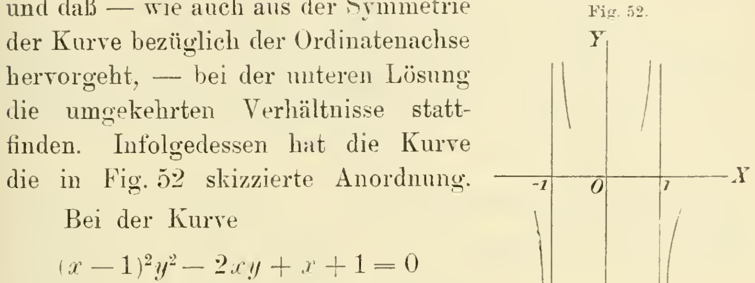
$$(x^2 - 1) y^2 + 2x^2 y + x^2 - 1 = 0$$

hat man $x^2 - 1 = 0$ zu setzen, woraus sich die Lösungen $-1, 1$ ergeben. Schreibt man die Auflösung nach x in der Form

$$x = \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}}{1 + \frac{1}{y}},$$

so zeigt sich, daß die obere Lösung für $\lim \frac{1}{y} = +0$ von links, für $\lim \frac{1}{y} = -0$ von rechts her gegen 1 konvergiert, und daß — wie auch aus der Symmetrie der Kurve bezüglich der Ordinatenachse hervorgeht, — bei der unteren Lösung die umgekehrten Verhältnisse stattfinden. Infolgedessen hat die Kurve die in Fig. 52 skizzierte Anordnung.

Fig. 52.



Bei der Kurve

$$(x-1)^2 y^2 - 2xy + x + 1 = 0$$

zeigt der Koeffizient von y^2 die Asymptote $x = 1$ als doppeltzählend an: bringt man die Lösung nach x auf die Gestalt:

$$x = 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} \pm \sqrt{\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3} + \frac{1}{4y^4}},$$

so ist zu erkennen, daß nur bei dem Grenzübergange $\lim \frac{1}{y} = +0$ x beständig reell bleibt, und daß sich dabei der obere Wert x der Grenze 1 von rechts, der untere von links nähert*); daher liegen zu beiden Seiten der Asymptote oberhalb der x-Achse Kurvenäste.

3) Die Kurve $x^2y^2 - a^3x + b^4 = 0$ $(a > 0)$ hat die Ordinatenachse nicht zur Asymptote, wiewohl der Koeffizient von y^2 darauf hinweisen würde; denn aus der Lösung

$$y = \pm \sqrt{\frac{a^3 x - b^4}{x^2}}$$

ist zu ersehen, daß y erst von $x = \frac{b^4}{a^3}$ angefangen reell ist, daß sich also in unmittelbarer Nähe der Ordinatenachse überhaupt keine Kurvenpunkte befinden.

140. Aufsuchung zu den Koordinatenachsen geneigter Asymptoten. I. In **135** und **137** sind bereits Me-

*) Man beachte, um sich davon zu überzeugen, die Ordnung der verschiedenen Größen in bezug auf $\frac{1}{y}$.

thoden angegeben worden, um geneigte Asymptoten zu finden. Dieselben mögen nun zunächst an einigen Beispielen erläutert werden.

1) Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte:

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2$$

(p = Halbparameter, ε = relative Exzentrizität), führt, wenn man $y = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x^2} + \cdots$ supponiert, zu dem Ansatze:

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 + 2\alpha\gamma + \frac{2\beta\gamma}{x} + \cdots = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2,$$

der, da er für alle Werte von x bestehen muß, zur Folge hat:

$$\alpha^2 = \varepsilon^2 - 1, \qquad \alpha\beta = p, \qquad \beta^2 + 2\alpha\gamma = 0, \ldots;$$

daraus ergibt sich

$$\alpha = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \qquad \beta = \frac{p}{\pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}};$$

folglich sind

$$y = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\left(x + \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}\right)$$

die beiden Asymptoten, und sie sind nur dann reell, wenn $\varepsilon > 1$ (Hyperbel). Das Vorzeichen von γ gibt dann Aufschluß über die Lage der Kurvenäste.

2) Aus der Gleichung $x^3 + y^3 = a^3$ erhält man

$$y = (a^3 - x^3)^{\frac{1}{3}} = -x\left(1 - \frac{a^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = -x + \frac{a^3}{3x^2} - \cdots,$$

ebenso

$$x = -y + \frac{a^3}{3y^2} - \cdots,$$

folglich ist $y = -x$ die einzige reelle Asymptote dieser kubischen Kurve.

3) Die Gleichung $y^2 = x^2\frac{x-1}{x-2}$ kann für genügend große x ($x > 2$) auf folgende Form gebracht werden. Zunächst ist

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \cdots,$$

somit unter Zuhilfenahme der Binomialentwickelung

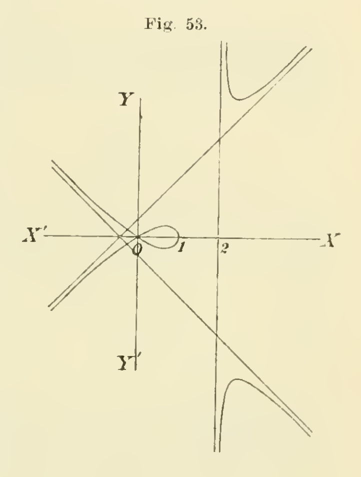
$$y = \pm x \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = \pm x \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{7}{8x^2} + \cdots\right)$$
$$= \pm x \pm \frac{1}{2} \pm \frac{7}{8x} \cdots;$$

daraus geht hervor, daß die durch obige Gleichung dargestellte Kurve die beiden Asymptoten

$$y = x + \frac{1}{2}, \qquad y = -x - \frac{1}{2}$$

besitzt und daß, wie aus dem Zusatzgliede $\pm \frac{7}{8x}$ hervorgeht, die Kurve sich der ersten Asymptote links von unten, rechts von oben, der zweiten links von oben, rechts von unten nähert. Außerdem wird bei dem Grenzübergange $\lim x = 2 + 0$ $\lim y = \pm \infty$, so daß die Kurve auch noch die Asymptote $x = 2$ hat, der sie sich von rechts her nähert (Fig. 53).

Fig. 53.



II. Wenn eine algebraische Kurve gegeben ist in der Form $F(x, y) = 0$, wo $F(x, y)$ eine rationale ganze Funktion von x, y bedeutet, so empfiehlt sich das folgende Verfahren zur Bestimmung der Asymptoten. Man ordne die linke Seite nach homogenen Gliedergruppen, mit der höchsten (n-ten) Ordnung beginnend; dividiert man dann durch x^n, so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$(10) \qquad u_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{-1} u_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x^{-2} u_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots = 0$$

an.

Um zunächst den Richtungskoeffizienten α einer Asymptote zu finden, hat man den Grenzwert von $\frac{y}{x}$ für $x = \infty$ zu bestimmen; die Gleichung (10) verwandelt sich durch diesen Grenzübergang in

$$(11) \qquad u_n(\alpha) = 0,$$

im allgemeinen eine Gleichung n-ten Grades in bezug auf α.

Ist α eine reelle Wurzel dieser Gleichung, so hat man den Abschnitt der zugehörigen Asymptote auf der Ordinatenachse zu suchen, der sich als Grenzwert von $y - \alpha x$ ergibt; setzt man $y - \alpha x = \beta$, so folgt daraus $\frac{y}{x} = \alpha + \frac{\beta}{x}$, und führt man dies in (10) ein, indem man gleichzeitig jedes Glied mittels der Taylorschen Reihe nach Potenzen des Inkrements $\frac{\beta}{x}$ entwickelt, so ergibt sich:

$$u_n(\alpha) + x^{-1}\{u_{n-1}(\alpha) + u'_n(\alpha)\beta\} +$$
$$x^{-2}\left\{u_{n-2}(\alpha) + u'_{n-1}(\alpha)\beta + u''_n(\alpha)\frac{\beta^2}{2}\right\} + \cdots = 0,$$

welcher Ansatz sich mit Rücksicht darauf, daß α eine Wurzel von (10) bedeutet, vereinfacht zu:

$$u_{n-1}(\alpha) + u'_n(\alpha)\beta + \tag{12}$$
$$x^{-1}\left\{u_{n-2}(\alpha) + u_{n-1}(\alpha)\beta + u''_n(\alpha)\frac{\beta^2}{2}\right\} + \cdots = 0;$$

für $\lim x = \infty$ reduziert sich diese Gleichung auf

$$u_{n-1}(\alpha) + u'_n(\alpha)\beta = 0, \tag{13}$$

woraus

$$\beta = -\frac{u_{n-1}(\alpha)}{u'_n(\alpha)}. \tag{14}$$

Sollten $u_{n-1}(\alpha)$ und $u'_n(\alpha)$ zugleich Null sein*), so beginnt die linke Seite in (12) erst mit dem Gliede in x^{-1}; nach Forthebung dieses Faktors und Ausführung des Grenzübergangs $\lim x = \infty$ liefert (12) zur Bestimmung von β die quadratische Gleichung:

$$u_{n-2}(\alpha) + u'_{n-1}(\alpha)\beta + u''_n(\alpha)\frac{\beta^2}{2} = 0. \tag{15}$$

Hat diese zwei reelle verschiedene Wurzeln, so besitzt die Kurve zwei parallele Asymptoten vom Richtungskoeffizienten α; hat sie zwei gleiche reelle Wurzeln, so fallen zwei Asymptoten in einer Geraden zusammen, usw.

Eine derartige Untersuchung ist mit jeder reellen Wurzel von (11) auszuführen.

*) $u'_n(\alpha) = 0$ besagt, daß α eine mehrfache Wurzel von $u_n(\alpha) = 0$ sei.

Beispiele. 1) Bei dem Cartesischen Blatte (128, 4))

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

ist $u_3\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3$, $u_2\left(\frac{y}{x}\right) = -3a\frac{y}{x}$; aus $1 + \alpha^3 = 0$ ergibt sich die einzige reelle Wurzel $\alpha = -1$, und zu dieser gehört

$$\beta = -\left(\frac{-3a\alpha}{3\alpha^2}\right)_{\alpha=-1} = -a;$$

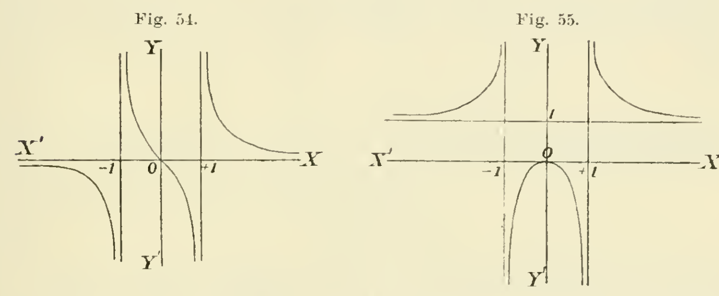
somit ist $x + y + a = 0$ die Gleichung der einzigen Asymptote dieser Kurve (vgl. Fig. 36, pag. 341).

2) Für die Kurve 4. Ordnung:

$$x^2(x-y)^2 - y^2(x-y) + 1 = 0$$

ergibt sich folgende Rechnung. Es ist

$$u_4\left(\frac{y}{x}\right) = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^2, \quad u_3\left(\frac{y}{x}\right) = -\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(1 - \frac{y}{x}\right), \quad u_2\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$



$(1-\alpha)^2 = 0$ hat die zweifache Wurzel $\alpha = 1$, und da für diese sowohl $u'_4(\alpha)$ wie $u_3(\alpha)$ verschwindet, so hat man zur Bestimmung von β die quadratische Gleichung:

$$2\beta + 2\beta^2 = 0,$$

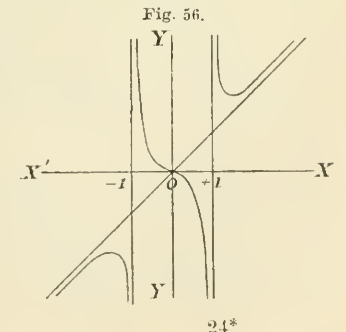
die die Lösungen $\beta = 0$ und $\beta = -1$ gibt. Die Kurve hat also die Asymptoten $y = x$ und $y = x - 1$.

3) In Anwendung der verschiedenen hier entwickelten Methoden bestimme man die Asymptoten der folgenden Kurven:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ (Fig. 54)

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ (Fig. 55)

c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ (Fig. 56)



d) $x^2y + xy^2 = a^3$
e) $x^3 - xy^2 + ay^2 = 0$
f) $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$
g) $x^2y^2 = a^2(x^2 - y^2)$
h) $xy(x^2 - y^2) = a^4$.

141. Krumme Asymptoten. Der in 135 aufgestellte Asymptotenbegriff läßt eine Erweiterung zu, indem man ihn von der Geraden auf eine Kurve überträgt, deren Ordinaten mit wachsendem x sich von den Ordinaten der gegebenen Kurve um eine gegen Null konvergierende Größe unterscheiden.

Läßt sich das y einer Kurve als Funktion von x in der Form

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n + v \tag{16}$$

darstellen, wobei v eine Funktion bedeutet, die bei $\lim x = \infty$ gegen Null konvergiert, so ist

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{17}$$

eine Asymptote dieser Kurve.

Ein Beispiel hierzu gibt die Kurve 3. Ordnung

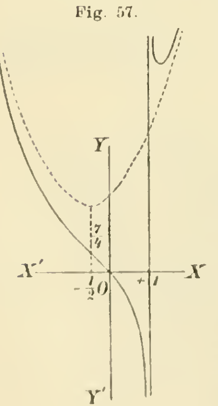
$$y = \frac{x^3 + x}{x - 1};$$

denn durch Ausführung der Division ergibt sich:

$$y = x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1},$$

voraus zu entnehmen ist, daß die Kurve außer der geraden Asymptote $x = 1$ die parabolische Asymptote $y = x^2 + x + 2$ mit dem Scheitel $-\frac{1}{2}\ \frac{7}{4}$ (118, 2) besitzt. Zugleich zeigt das Zusatzglied $\frac{2}{x-1}$, daß bei $x < 1$ die Kurve *unter*, bei $x > 1$ *über* der Parabel liegt (Fig. 57).

Fig. 57.

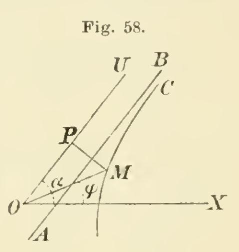


142. Asymptoten im Polarsystem. Um für eine auf ein *Polarkoordinatensystem* bezogene Kurve

$$r = f(\varphi) \tag{18}$$

die *Asymptoten* zu bestimmen, beachte man zunächst, daß für einen unendlich fernen Punkt r unendlich wird; man hat also jene Werte von φ zu bestimmen, für welche $\lim r = \infty$ sich ergibt; die diesen Werten entsprechenden Strahlen weisen nach den unendlich fernen Punkten hin.

Fig. 58.



Sei $\varphi = \alpha$ ein solcher Wert und OU (Fig. 58) der zugehörige Strahl; entspricht demselben eine Asymptote AB, so handelt es sich noch um ihre Entfernung von OU. Um diese zu bestimmen, fälle man MP senkrecht zu OU; aus dem rechtwinkligen Dreieck OMP folgt dann

$$MP = r \sin(\alpha - \varphi),$$

und konvergiert dieser Ausdruck für $\lim \varphi = \alpha$ gegen eine bestimmte Grenze c, so stellt diese die Entfernung der Asymptote von OU dar, so daß

$$c = \lim_{\varphi = \alpha} r \sin(\alpha - \varphi). \tag{19}$$

In dem Falle, wo OX selbst die Richtung nach dem unendlich fernen Punkte bezeichnet, ist

$$c = \lim_{\varphi = 0} r \sin\varphi. \tag{20}$$

Aus dem Vorzeichen von c schließt man, auf welcher Seite von OU die Asymptote gelegen ist; ist beispielsweise $\lim\limits_{\varphi = \alpha} r = +\infty$ und fällt c positiv aus, so war und blieb schließlich $\alpha > \varphi$, die Asymptote liegt rechts von OU wie in der Figur; bei negativem c und unter sonst gleichen Umständen wäre sie links aufzutragen.

Beispiele. 1) Bei der hyperbolischen Spirale (133, 2))

$$r = \frac{a}{\varphi} \qquad (a > 0)$$

Fig. 59.

wird $\lim r = +\infty$ für $\lim \varphi = +0$; und da

$$\lim r \sin\varphi = a \lim_{\varphi = 0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = a$$

ist, so besitzt die Kurve eine zur Polarachse parallele Asymptote im Abstande a (Fig. 59).

2) Die Kurve, deren Gleichung lautet:

$$r = \frac{a\varphi}{\varphi - 1}, \qquad (a > 0)$$

hat einen unendlich fernen Punkt in der durch $\varphi = 1$ $(57^0 \cdot 29577\ldots)$ bestimmten Richtung; und da

$$\lim r \sin(1 - \varphi) = -a \lim_{\varphi=1} \varphi \frac{\sin(\varphi - 1)}{\varphi - 1} = -a$$

ist, so hat sie eine links von dem Strahle OU im Abstande a gelegene Asymptote. Um die Anordnung der unendlichen Zweige gegen die Asymptote zu erkennen, setzen wir, unter δ eine sehr kleine positive Größe uns vorstellend, einmal $\varphi = 1 - \delta$, ein zweites Mal $\varphi = 1 + \delta$ und finden im ersten Falle

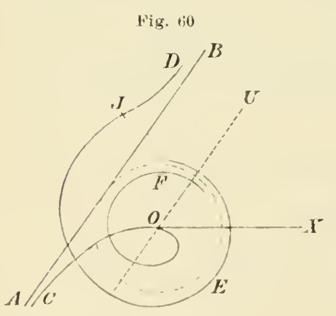
$$r \sin(1 - \varphi) = \frac{a(1 - \delta)}{-\delta} \sin \delta = -a(1 - \delta)\frac{\sin \delta}{\delta},$$

also $|r \sin(1 - \varphi)| < a$, weil $1 - \delta < 1$ und $\frac{\sin \delta}{\delta} < 1$ ist; der betreffende Zweig OC (Fig. 60) liegt rechts von der Asymptote AD; im zweiten Falle ist

$$r \sin(1 - \varphi) = \frac{a(1 + \delta)}{\delta} \sin(-\delta) = -a(1 + \delta)\frac{\sin \delta}{\delta}$$

$$= -a(1 + \delta)\left(1 - \frac{\delta^2}{6} + \cdots\right) = -a\left(1 + \delta - \frac{\delta^2}{6} \cdots\right),$$

Fig. 60



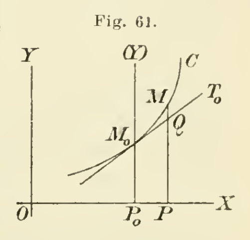
also $|r \sin(1 - \varphi)| > a$; der betreffende Zweig DE liegt demnach links von AB.

Für positive, 1 übersteigende φ ist $r > a$ und konvergiert mit wachsendem φ gegen a als Grenzwert; für negative φ ist $r < a$ und konvergiert mit wachsendem Betrage von φ ebenfalls gegen die Grenze a; infolgedessen beschreibt der Zweig DE unzählig viele dem Kreise vom Halbmesser a von außen beständig sich nähernde Windungen, und der Zweig OF ebensolche Windungen von innen; der genannte Kreis bildet also eine krummlinige Asymptote.

§ 3. Gestaltung einer Kurve in der Umgebung eines Punktes.

143. Konkavität, Konvexität und Wendepunkte (in rechtwinkligen Koordinaten). Eine Kurve MC (Fig. 61) sei, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, durch ihre Gleichung $y = f(x)$ gegeben. Auf derselben werde ein Punkt M_0 mit den Koordinaten x_0 y_0 ins Auge gefaßt und in demselben die Tangente $M_0 T_0$ konstruiert, deren Richtungskoeffizient mit y_0' bezeichnet werden möge. Die zu einer Abszisse $x = OP$ gehörige Ordinate der Kurve heiße y, die zu derselben Abszisse gehörige Ordinate der Tangente Y; die Differenz

Fig. 61.



$$\delta = y - Y \tag{1}$$

ist eine Funktion von x, bezüglich deren vorläufig bemerkt werden kann, daß sie für $x = x_0$ verschwindet. Der Variablen x weisen wir zunächst ein Intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ zu, innerhalb dessen δ an keiner anderen Stelle außer x_0 Null wird, so daß die Tangente außer M_0 keinen anderen Punkt mit der Kurve gemein hat.

Für Y ergibt sich aus der Tangentengleichung

$$Y - y_0 = y_0' (x - x_0)$$

die Bestimmung

$$Y = y_0 + y_0' (x - x_0)$$

und hiermit nimmt δ den Ausdruck

$$\delta = y - y_0 - y_0' (x - x_0)$$

an.

Der Differentialquotient von δ in bezug auf x, d. i.

$$\delta' = y' - y_0', \tag{2}$$

verschwindet gleichfalls an der Stelle $x = x_0$; die höheren Differentialquotienten von δ stimmen mit den entsprechenden Differentialquotienten von y überein, indem

$$\delta'' = y'', \qquad \delta''' = y''', \ldots$$

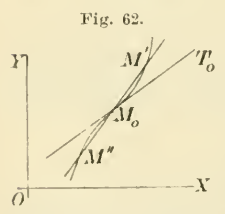
Angenommen, $\delta'' = y''$ besitze an der Stelle $x = x_0$ einen von Null verschiedenen Wert y_0''; ist dieser positiv, so sind die Kriterien für ein Minimum von δ an der Stelle $x = x_0$

erfüllt; da aber δ an dieser Stelle den Wert Null hat, so läßt sich eine Umgebung von x_0 feststellen, innerhalb welcher δ, die Stelle x_0 selbst ausgenommen, beständig positiv ist. Vermöge der Definition von δ heißt dies, es sei in dieser Umgebung $y > Y$, die Punkte der Kurve lägen also *über* der Tangente, d. h. auf derselben Seite der Tangente, auf welcher eine aus M_0 gezogene Parallele $M_0(Y)$ zur positiven Ordinatenachse gelegen ist. Man sagt dann, die Kurve sei in der Umgebung des Punktes M_0 oder kurz im Punkte M_0 *konkav nach oben* (konvex nach unten).

Ist y_0'' negativ, so sind bezüglich δ an der Stelle $x = x_0$ die Kriterien des Maximums erfüllt; und weil δ an dieser Stelle selbst Null ist, so ist es in einer angebbaren Umgebung negativ, infolgedessen $y < Y$; die Punkte der Kurve liegen dann in dieser Umgebung *unter* der Tangente oder auf entgegengesetzter Seite in bezug auf $M\ (Y)$; man sagt, die Kurve sei in der Umgebung von M_0 oder in M_0 selbst *konkav nach unten* (konvex nach oben).

Nun aber sei $y_0'' = 0$, dagegen y_0''' von Null verschieden. Dann hat δ an der Stelle x_0 keinen extremen Wert (116), und da es an dieser Stelle verschwindet, so hat es innerhalb einer gewissen Umgebung zu beiden Seiten von M_0 entgegengesetzte Zeichen. Demnach ist auf der einen Seite $y > Y$, auf der anderen $y < Y$, die Kurve also einerseits über, andererseits unter der Tangente. Einen solchen Punkt, bei dessen Überschreitung die Richtung der Konkavität sich ändert, nennt man einen *Wende-* oder *Inflexionspunkt*, die zugehörige Tangente eine *Wende-* oder *Inflexionstangente* der Kurve. Eine solche Tangente *berührt* und *schneidet* die Kurve zugleich. Geometrisch ist sie dadurch gekennzeichnet, daß sie mit der Kurve in M_0 drei vereinigt liegende Punkte gemein hat; der Sinn dieser Ausdrucksweise gründet sich auf die Auffassung der Tangente als Grenze einer um M_0 gedrehten Sekante $M''M_0M'$ (Fig. 62), wenn bei der Drehung die Punkte M', M'' unaufhörlich dem Punkte M_0 sich nähern (22, 2)).

Fig. 62.



Die Beziehungen $y_0'' = 0$, $y_0''' \neq 0$ bedingen aber einen

extremen Wert von $\delta' = y' - y_0'$, also auch von y', weil y_0' konstant ist; ist daher $y_0''' < 0$, so ist y' ein Maximum, und ist $y_0''' > 0$, so bedeutet y' ein Minimum. Im Wendepunkte hat also der Richtungskoeffizient, somit auch der Neigungswinkel der Tangente gegen die positive X-Achse, einen extremen Wert.

Um alle Fälle, die möglich sind, zu erschöpfen, nehmen wir nun an, daß an der Stelle x_0 alle Differentialquotienten von δ bis zum $(p-1)$-ten einschließlich verschwinden; von dem Vorzeichen des nächsten Differentialquotienten, von $y_0^{(p)}$, hängt nun das Verhalten der Kurve in der Umgebung von M_0 ab wie folgt (117):

Ist p *gerad* und $y_0^{(p)} > 0$, so ist δ an der Stelle $x = x_0$ ein Minimum, in einer angebbaren Umgebung von M_0 also $y > Y$, die Kurve konkav nach oben.

Ist p *gerad* und $y_0^{(p)} < 0$, so ist δ an der Stelle $x = x_0$ ein Maximum, in einer angebbaren Umgebung von M_0 also $y < Y$, die Kurve konkav nach unten.

Ist p *ungerad*, so hat δ an der Stelle x_0 keinen extremen Wert und ist der Punkt M_0 ein Wendepunkt.

In diesen Sätzen sind die oben entwickelten Spezialfälle $p = 2$ und $p = 3$ mit inbegriffen.

Soll also eine Kurve $y = f(x)$ auf etwa vorhandene Wendepunkte geprüft werden, so bilde man den zweiten Differentialquotienten $f''(x)$ und löse die Gleichung

$$f''(x) = 0$$

auf; sind Wendepunkte vorhanden, so befinden sich ihre Abszissen unter den Wurzeln dieser Gleichung; die weitere Entscheidung hat auf Grund der obigen Sätze zu erfolgen.

Weil ein Wendepunkt dadurch charakterisiert ist, daß für ihn y' einen extremen Wert annimmt, so sind auch solche Stellen x in die Betrachtung einzubeziehen, an welchen y'' unendlich wird; ändert y'' bei Überschreitung einer solchen Stelle sein Vorzeichen, so ist an derselben y' ein Extrem und hat die Kurve einen Wendepunkt (119, 2).

Wenn die Kurve durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

gegeben ist, so hat man mittels der Gleichungen (**57**):

$$f'_x + f'_y y' = 0,$$

$$f''_{x^2} + 2f''_{xy} y' + f''_{y^2} y'^2 + f'_y y'' = 0$$

y'' zu bestimmen und erhält dafür den Ausdruck

$$y'' = -\frac{f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}f'_x f'_y + f''_{y^2}(f'_x)^2}{(f'_y)^3};$$

die Koordinaten etwa vorhandener Wendepunkte sind dann unter den Wurzeln des Gleichungenpaares

$$f(x, y) = 0, \qquad f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}f'_x f'_y + f''_{y^2}(f'_x)^2 = 0$$

zu suchen.

Beispiele. 1) Die durch die Gleichung

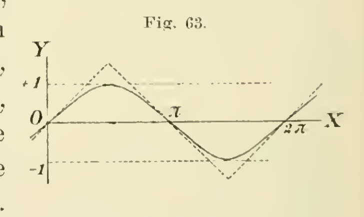
$$y = \sin x$$

dargestellte transzendente Kurve heißt *Sinuslinie.* Vermöge der Periodizität des Sinus genügt es, ihren Verlauf in dem Intervalle $(0, 2\pi)$ festzustellen. Aus dem Vorzeichen von

$$y'' = -\sin x,$$

das negativ ist in $(0, \pi)$, positiv in $(\pi, 2\pi)$, folgt, daß im ersten Abschnitte die Kurve konkav nach unten, im zweiten Abschnitte konkav nach oben ist; an den Stellen $0, \pi, 2\pi$ findet ein Wechsel im Vorzeichen von y'' statt, die betreffenden Punkte $0/0$, $\pi/0$, $2\pi/0$ sind Wendepunkte und die Richtungskoeffizienten der Tangente dortselbst sind $1, -1, 1$ (Fig. 63).

Fig. 63.



2) Um die Wendepunkte der kubischen Kurve

$$y(x^2 + a^2) = a^2(a - x) \qquad (\alpha)$$

zu finden, kann man den folgenden Weg einschlagen. Zweimalige Differentiation ergibt:

$$y'(x^2 + a^2) + 2xy = -a^2, \qquad (\beta)$$

$$y''(x^2 + a^2) + 4xy' + 2y = 0. \qquad (\gamma)$$

Da für einen Wendepunkt $y'' = 0$ ist, so hat man zur Bestimmung seiner Koordinaten und des Richtungskoeffi-

zienten seiner Tangente die Gleichungen (α), (β) und die folgende:

$$4xy' + 2y = 0. \tag{γ'}$$

Elimination von y' zwischen (β) und (γ') liefert:

$$y(3x^2 - a^2) + 2a^2x = 0;$$

addiert man hierzu die mit -3 multiplizierte Gleichung (α), so entsteht:

$$x + 4y = 3a. \tag{δ}$$

Die Wendepunkte der Kurve (α) liegen also auf einer Geraden (allgemeine Eigenschaft kubischer Kurven).

Eliminiert man y mittels (δ) aus (α), so ergibt sich zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = 0,$$

an der man alsbald erkennt, daß sie durch $x = -a$ befriedigt wird; die beiden anderen Wurzeln berechnen sich dann aus einer quadratischen Gleichung und sind $x = a(2 + \sqrt{3})$ $x = a(2 - \sqrt{3})$; die zugehörigen y ergeben sich aus (δ): $y = a$, $\frac{a}{4}(1 - \sqrt{3})$, $\frac{a}{4}(1 + \sqrt{3})$; ($\gamma'$) endlich führt zu den Richtungskoeffizienten der Wendetangenten: $y' = \frac{1}{2}$, $\frac{3\sqrt{3} - 5}{8}$, $-\frac{3\sqrt{3} + 5}{8}$.

3) Für die transzendente Kurve

$$y = be^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

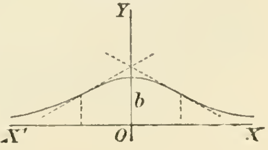
deren Ordinaten, bei positivem b durchwegs positiv, mit wachsendem Betrage von x gegen Null konvergieren, ist

$$y' = -\frac{2bx}{a^2} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$y'' = \frac{2b}{a^4} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \{2x^2 - a^2\};$$

y'' ändert sein Vorzeichen bei Überschreitung der Stellen $x = \mp \frac{a}{\sqrt{2}}$, indem es durch Null geht; daselbst ist $y = \frac{b}{\sqrt{e}}$, $y' = \pm \frac{b}{a}\sqrt{\frac{2}{e}}$; die so bestimmten Punkte sind Wendepunkte der Kurve (Fig. 64).

Fig. 64.



4) Die Lemniskate
$$(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$$
hat nach 129, 2) die parametrische Darstellung:
$$x = \pm a\frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u^2}$$
$$y = \pm a\frac{u\sqrt{1-u^2}}{1+u^2},$$
daraus ist weiter
$$y' = \frac{1-3u^2}{u(u^2-3)}$$
gefunden worden; differentiiert man nochmals in bezug auf u, so ergibt sich
$$y''\frac{dx}{du} = \frac{3(u^2+1)^2}{u^2(u^2-3)^2}$$
und daraus
$$y'' = \pm\frac{3(u^2+1)^4\sqrt{1-u^2}}{a u^3(u^2-3)^3};$$
zu je zwei Punkten, welche der Gleichung $y = ux$ entsprechen, also in einer durch O gehenden Geraden liegen, gehören demnach entgegengesetzt bezeichnete Werte von y'', und da für $u = \pm 1$ y'' verschwindet, so sind die beiden Punkte der Kurve, welche in O (Fig. 38, pag. 346) vereinigt liegen, Wendepunkte; einen Kurvenpunkt von dieser Beschaffenheit nennt man einen *Inflexionsknoten*.

5) Für die durch die Gleichung
$$y = b\left(1-\frac{x}{a}\right)^4$$
dargestellte Kurve verschwindet
$$y'' = \frac{12b}{a^2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2$$
für $x = a$; indessen ist der Punkt $a/0$ kein Wendepunkt, weil dort auch y''' verschwindet, während y^{IV} einen von Null verschiedenen Wert hat.

6) Bei der Kurve $(y-cx)^3 = b^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^5$ oder
$$y = cx + b\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\frac{5}{3}}$$
ist
$$y'' = \frac{10b}{9a^2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{10b}{9a^2\sqrt[3]{1-\frac{x}{a}}}.$$

Dieser Ausdruck wird an der Stelle $x = a$, welcher die endliche Ordinate ca entspricht, unendlich und ändert bei Überschreitung der Stelle sein Vorzeichen; daher ist a/ca ein Wendepunkt der Kurve.

7) Man weise nach, daß die kubischen Kurven a), c) des Beispiels **140**, 3) und ebenso die Kurve in **141** nur je einen Wendepunkt, und zwar im Ursprung, besitzen.

8) Man bestimme die Wendepunkte folgender Kurven:

a) $y = \dfrac{x^3}{a^2 + x^2}$

b) $xy = a^2 l \dfrac{x}{a}$

c) $x = (ly)^3$.

144. Konkavität, Konvexität und Wendepunkte (in Polarkoordinaten). Auf einer Kurve MC (Fig. 65), die auf ein Polarkoordinatensystem bezogen ist, werde ein Punkt M_0 mit den Koordinaten r_0, φ_0 angenommen und in demselben an die Kurve die Tangente $M_0 T_0$ konstruiert; sie möge mit der Verlängerung $M_0 L_0$ des Leitstrahls den Winkel θ_0 einschließen; α_0 sei der Winkel, welchen das Lot $OP = p$ vom Pol zur Tangente mit der Polarachse bestimmt. Zu einer beliebigen Amplitude φ gehöre in bezug auf die Kurve der Radiusvektor r, in bezug auf die Tangente $M_0 T_0$ der Radiusvektor R; dadurch sind zwei Punkte, M und Q, mit den Koordinaten r/φ, R/φ festgelegt. Wir befassen uns nun mit der Differenz $r - R$ oder, was hier zweckmäßiger erscheint, mit der Differenz

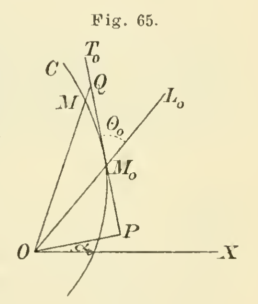


Fig. 65.

$$\delta = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}; \tag{3}$$

welche als Funktion von φ zunächst die Eigenschaft hat, an der Stelle $\varphi = \varphi_0$ zu verschwinden. Die Variable φ beschränken wir zunächst auf ein so enges Intervall $(\varphi - h, \varphi + h)$, daß δ innerhalb desselben an keiner anderen Stelle verschwindet.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OPM_0 folgt:

$$p = r_0 \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \tag{4}$$

und mit Hilfe dieses Wertes aus dem Dreieck OPQ:

$$R = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha_0)}, \tag{5}$$

so daß weiter

$$\delta = \frac{1}{r} - \frac{\cos(\varphi - \alpha_0)}{p};$$

daraus ergibt sich durch Differentiation in bezug auf φ

$$\delta' = -\frac{r'}{r^2} + \frac{\sin(\varphi - \alpha_0)}{p},$$

und auch der Differentialquotient δ' verschwindet für $\varphi = \varphi_0$; denn sein erster Teil nimmt den Wert $-\frac{r_0'}{r_0^2} = -\frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \theta_0}$ (**132**, (31)) an, und der zweite Teil wegen (4) den Wert

$$\frac{\sin(\varphi_0 - \alpha_0)}{p} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_0 - \alpha_0)}{r_0} = \frac{\operatorname{cotg} \theta_0}{r_0} = \frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \theta_0}.$$

Wenn daher der zweite Differentialquotient

$$\delta'' = -\frac{r^2 r'' - 2 r r'^2}{r^4} + \frac{\cos(\varphi - \alpha_0)}{p}$$

einen von Null verschiedenen Wert besitzt, so hat δ an der Stelle $\varphi = \varphi_0$ einen extremen Wert; es ist aber

$$\frac{\cos(\varphi - \alpha_0)}{p} = \frac{1}{r},$$

daher

$$\delta'' = \frac{r^2 + 2 r'^2 - r r''}{r^3}.$$

Ist also $r_0 > 0$ und

$$r_0^2 + 2 r_0'^2 - r_0 r_0'' > 0,$$

so ist δ an der Stelle $\varphi = \varphi_0$ ein Minimum, und weil es dort den Wert Null hat, so läßt sich eine Umgebung von φ_0 feststellen, innerhalb deren $\delta > 0$, also $\frac{1}{r} > \frac{1}{R}$ oder

$$r < R,$$

so daß die Punkte M der Kurve näherliegen dem Pole als die korrespondierenden Punkte Q der Tangente; man bezeichnet dann die Kurve im Punkte M_0 *als konkav gegen den Pol.*

Ist dagegen $r_0 > 0$ und

$$r_0^2 + 2 r_0'^2 - r_0 r_0'' < 0,$$

so ist δ ein Maximum für $\varphi = \varphi_0$, und weil es hier den Wert Null hat, so ist es in einer entsprechend festgestellten Umgebung negativ, daher $\frac{1}{r} < \frac{1}{R}$ oder

$$r > R,$$

so daß die Kurve in dieser Umgebung vom Pole weiter entfernt ist als ihre Tangente; man bezeichnet sie dann in M_0 als *konvex gegen den Pol.*

Umgekehrt verhält es sich, wenn $r_0 < 0$.

Es bleibt noch der Fall

$$r_0^2 + 2r_0'^2 - r_0 r_0'' = 0$$

übrig; tritt dieser ein und wechselt $r^2 + 2r'^2 - rr''$ bei dem Durchgange durch φ_0 sein Vorzeichen, so ist der Punkt M_0 ein *Wendepunkt.* Zur Bestimmung der Wendepunkte einer Kurve hat man also vor allem die Gleichung

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0 \tag{6}$$

in bezug auf φ aufzulösen und dann das Vorzeichen der linken Seite in der Umgebung der Wurzeln zu prüfen.

Beispiele. 1) Die hyperbolische Spirale

$$r = \frac{a}{\varphi}$$

gibt für $r^2 + 2r'^2 - rr''$ den Wert $\frac{a^2}{\varphi^2}$, der beständig positiv ist; die Kurve ist in ihrem ganzen Verlaufe konkav gegen den Pol.

2) Bei der in **142**, 2) betrachteten Kurve

$$r = \frac{a\varphi}{\varphi - 1}$$

ist

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = a^2 \frac{(\varphi - 1)(\varphi^3 - \varphi^2 - 2)}{(\varphi - 1)^4}.$$

Das Vorzeichen dieses Ausdruckes hängt lediglich vom Zähler ab, und dieser ist zunächst positiv für alle negativen Werte von φ, daher der Kurventeil OF (Fig. 60) gegen den Pol beständig konkav. Für positive Werte wechselt der Zähler sein Vorzeichen an der Stelle $\varphi = 1$ (Durchgang durch den unendlich fernen Punkt) und ferner an der einzigen reellen Stelle

$$\varphi_0 = 1{,}695\ldots(97^0\,11),$$

an welcher $\varphi^3 - \varphi^2 - 2$ verschwindet; und zwar ist er in dem Intervalle $(0, 1-0)$ positiv, der zugehörige Kurventeil OC gegen den Pol konkav; in dem Intervalle $(1+0, \varphi_0)$ negativ, der zugehörige Kurventeil DJ gegen den Pol konvex; von φ_0 an bleibt der Zähler positiv, der Kurventeil JE gegen den Pol konkav. J selbst ist also ein Wendepunkt der Kurve.

3) Es ist festzustellen, unter welcher Voraussetzung die parabolische Spirale (vgl. **131**, 1))

$$r = a\varphi^n$$

Wendepunkte besitzt.

In diesem Falle ist

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = a^2\varphi^{2n-2}(\varphi^2 + n^2 + n);$$

dies erfährt zunächst einen Zeichenwechsel bei dem Durchgange durch Null, wenn $2n-2$ eine ungerade ganze Zahl oder einen Bruch mit ungeradem Zähler und Nenner bedeutet; in beiden Fällen ist aber n ein Bruch mit geradem Nenner und ungeradem Zähler, r daher nur für positive Werte von φ reell. Der Pol ist also in keinem Falle ein Wendepunkt.

Bleibt nur die Möglichkeit eines Zeichenwechsels in $\varphi^2 + n^2 + n$ übrig, und ein solcher tritt an den Stellen $\varphi = \pm\sqrt{-n-n^2}$ ein, wenn n negativ und dem Betrage nach kleiner als 1 ist; hiernach hat z. B. die Kurve $r = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$ einen Wendepunkt an der Stelle $\varphi = \frac{1}{2}$ (zu der Stelle $\varphi = -\frac{1}{2}$ gehört ein imaginärer Radiusvektor), die Kurve $r = \frac{a}{\sqrt[3]{\varphi}}$ deren zwei an den Stellen $\varphi = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$.

§ 4. Verhalten zweier Kurven in der Umgebung eines gemeinsamen Punktes.

145. Begriff und Bedingungen einer Berührung n-ter Ordnung. Zwei Kurven C' und C'' (Fig. 66) auf ein und dasselbe Koordinatensystem bezogen, seien durch die Gleichungen

$$(C) \qquad y = f(x)$$

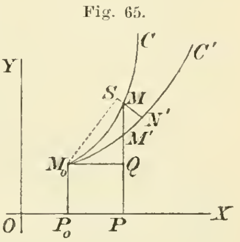
$$(C') \qquad y = \varphi(x)$$

gegeben; beiden Kurven sei der Punkt M_0 mit den Koordinaten x_0/y_0 gemeinschaftlich, so daß

$$(1) \qquad \begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ y_0 = \varphi(x_0). \end{cases}$$

Die nachfolgende Betrachtung erstreckt sich auf ein solches Gebiet der Variablen x, innerhalb dessen es außer x_0 keine Stelle mehr gibt, an welcher die Ordinaten beider Kurven einander gleich sind. Von den Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ wird vorausgesetzt, daß sie auf dem betrachteten Gebiete endliche Differentialquotienten aller Ordnungen besitzen, die in Betracht kommen werden, und daher nach der Taylorschen Formel entwickelbar sind.

Fig. 65.



Um das Verhalten der Kurven in der Umgebung des Punktes M_0 zu untersuchen, betrachten wir den Abschnitt MN', welchen die Kurven auf einer Sekante von bestimmter Richtung bilden, und vergleichen ihn mit dem Abstande M_0S dieser Sekante von dem Punkte M_0; beide Größen, MN' und M_0S, konvergieren gleichzeitig gegen die Grenze Null oder werden gleichzeitig unendlich klein, wenn der Punkt M auf der Kurve C unaufhörlich dem Punkte M_0 sich nähert; die Ordnung, in welcher MN' unendlich klein wird im Vergleiche zu M_0S, das als unendlich kleine Größe erster Ordnung gelten soll, ist maßgebend für die gegenseitige Anordnung der Kurven in der Nähe von M_0.

Diese Kleinheitsordnung ist unter einer gewissen Voraussetzung unabhängig von der Richtung der Sekante; führt man nämlich durch M eine andere Sekante, auf welcher die Strecke MM' abgeschnitten werden möge, so ist das Verhältnis $\frac{MM'}{MN'}$ gleich dem Sinusverhältnis der Winkel $MN'M'$, $MM'N'$; wenn aber der Punkt M gegen M_0 konvergiert, so nähert sich die Verbindungsgerade der Punkte M', N' der Tangente an die Kurve C' in M_0, und wenn daher keine der beiden

Sekantenrichtungen dieser Tangente parallel ist, so nähern sich jene Winkel und somit auch das Verhältnis ihrer Sinus endlichen Grenzen und sind daher MM', MN' Größen gleicher Ordnung (16).

Man kann also unter der Voraussetzung, daß die Tangenten an die beiden Kurven in M_0 eine von der Ordinatenachse verschiedene Richtung haben*), die Sekante der Ordinatenachse parallel annehmen; alsdann ist

$$\overline{M'M} = \delta$$

der Unterschied der zur Abszisse

$$OP = x = x_0 + h$$

gehörigen Ordinate der Kurven C und C', und

$$M_0 Q = P_0 P = h$$

die Vergleichsgröße, deren Ordnung mit 1 festgesetzt wird.

Nun ergeben sich für die Ordinaten PM und PM' die Entwickelungen:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1} h + \frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{1 \cdot 2 \cdots n} h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} h^{n+1}$$
$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_0)}{1} h + \frac{\varphi''(x_0)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{1 \cdot 2 \cdots n} h^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} h^{n+1},$$

und daraus mit Rücksicht auf (1):

$$(2) \quad \begin{cases} \delta = [f'(x_0) - \varphi'(x_0)] h + [f''(x_0) - \varphi''(x_0)] \dfrac{h^2}{1 \cdot 2} + \cdots \\ \qquad + [f^{(n)}(x_0) - \varphi^{(n)}(x_0)] \dfrac{h^n}{1 \cdot 2 \cdots n} \\ \quad + [f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) - \varphi^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)] \dfrac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)}. \end{cases}$$

Wenn also die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ außer (1) keine weitere Beziehung aufweisen, so ist δ eine Größe erster Ord-

*) Diese Voraussetzung ist schon in der oben gemachten Annahme enthalten, daß $f(x)$, $\varphi(x)$ in der betrachteten Umgebung von M_0 endliche Differentialquotienten besitzen.

nung, weil $\frac{\delta}{h}$ für $\lim h = 0$ gegen die endliche von Null verschiedene Grenze $f''(x_0) - \varphi'(x_0)$ konvergiert, und für dem Betrage nach genügend kleine h wechselt δ mit h zugleich das Vorzeichen; infolgedessen haben die Kurven zu beiden Seiten von M_0 entgegengesetzte Lage gegeneinander. Man bezeichnet ein solches Verhalten der Kurven als einfaches *Schneiden.*

Tritt zu (1) die weitere Beziehung

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0), \tag{3}$$

welche besagt, daß die Kurven im Punkte M_0 dieselbe Tangente haben, so beginnt der Ausdruck für δ mit dem Gliede zweiter Ordnung, δ wird eine Größe der zweiten Ordnung und ändert innerhalb entsprechend enger Grenzen sein Vorzeichen nicht, wenn h es ändert; die Kurven haben also zu beiden Seiten von M_0 gleiche Lage gegeneinander.

Kommt zu (1) und (2) die weitere Relation

$$f''(x_0) = \varphi''(x_0), \tag{4}$$

so beginnt die Entwickelung von δ mit dem Gliede dritter Ordnung, von dieser Ordnung ist also auch δ und ändert diesmal innerhalb entsprechend enger Grenzen mit h zugleich sein Vorzeichen; die Kurven haben daher zu beiden Seiten von M_0 entgegengesetzte Lage gegeneinander wie bei dem einfachen Schneiden.

Um zu einem allgemeinen Ergebnis zu gelangen, nehmen wir an, daß die Differentialquotienten der Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$ an der Stelle x_0 bis zur Ordnung n übereinstimmen, so daß weiter noch

$$f'''(x_0) = \varphi'''(x_0), \ldots f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0); \tag{5}$$

dann reduziert sich δ auf den Ausdruck:

$$\delta = [f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) - \varphi^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)] \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)},$$

und ist eine Größe der $(n+1)$-ten Ordnung; denn, wofern $f^{(n+1)}(x)$, $\varphi^{(n+1)}(x)$ in dem Intervalle $(x_0 - h,\, x_0 + h)$ stetig verlaufen, konvergiert das Verhältnis $\frac{\delta}{h^{n+1}}$ für $\lim h = 0$ gegen die endliche von Null verschiedene Grenze

$$[f^{(n+1)}(x_0) - \varphi^{(n+1)}(x_0)]\,\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)}.$$

Ist nun n ungerad, so ändert δ sein Vorzeichen nicht, wenn h es ändert, die Kurven haben also zu beiden Seiten von M_0 gleiche Lage gegeneinander; ist dagegen n gerad, so wechselt δ mit h zugleich sein Vorzeichen, die Kurven haben zu beiden Seiten von M_0 entgegengesetzte Lage gegeneinander wie beim einfachen Schneiden.

Sobald zu der Bedingung $f(x_0) = \varphi(x_0)$ noch jene (3) hinzutritt, haben die Kurven in M_0 eine gemeinsame Tangente und man sagt, daß sie einander dort *berühren*. Der Grad oder die Innigkeit der Berührung hängt ab von den weiter hinzutretenden Beziehungen. *Man bezeichnet die Berührung als eine solche von der n-ten Ordnung, wenn δ in bezug auf h von der $(n+1)$-ten Ordnung oder der Quotient $\frac{\delta}{h^n}$ von der ersten Ordnung ist.*

Auf Grund dieser Definition läßt sich der folgende Satz aussprechen: *Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß die Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ in einem Punkte von der Abszisse x_0 eine Berührung n-ter Ordnung aufweisen, besteht darin, daß die Ordinaten und deren Differentialquotienten bis zur n-ten Ordnung einschließlich an der Stelle x_0 einander gleich sind.*

Die Bedingungen für eine Berührung n-ter Ordnung drücken sich also analytisch in den $n+1$ Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0), \quad f''(x_0) = \varphi''(x_0), \cdots \\ \qquad\qquad f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

aus.

Zu bemerken ist noch, daß mit einer Berührung von gerader Ordnung ein Schneiden der Kurven verbunden ist, und daß das einfache Schneiden als eine Berührung der 0-ten Ordnung der Definition gemäß sich darstellt.

146. Geometrische Interpretation einer Berührung n-ter Ordnung. Man kann der analytischen Definition einer Berührung n-ter Ordnung eine geometrische zur Seite stellen, zu welcher folgende Betrachtung führt.

Die beiden Kurven C, C' mögen außer dem Punkte M_0 noch n weitere Punkte $M_1, M_2, \ldots M_n$ mit den (arithmetisch aufsteigenden) Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gemein haben, so daß

(7) $$f(x_\lambda) = \varphi(x_\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Weil die Funktion $f(x) - \varphi(x)$ an den Grenzen eines jeden der Intervalle $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots (x_{n-1}, x_n)$ verschwindet, so existiert innerhalb eines jeden dieser Intervalle eine Stelle $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \ldots x_{n-1}^{(1)}$ beziehungsweise, an welcher auch ihr Differentialquotient $f'(x) - \varphi'(x)$ verschwindet (36), d. h. es ist

(8) $$f'(x_\lambda^{(1)}) = \varphi'(x_\lambda^{(1)}) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

Weil die Funktion $f'(x) - \varphi'(x)$ an den Grenzen eines jeden der Intervalle $(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}), (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \ldots (x_{n-2}^{(1)}, x_{n-1}^{(1)})$ Null ist, so gibt es innerhalb eines jeden mindestens eine Stelle $x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \ldots x_{n-2}^{(2)}$ beziehungsweise, an der ihr Differentialquotient $f''(x) - \varphi''(x)$ verschwindet, so daß

(9) $$f''(x_\lambda^{(2)}) = \varphi''(x_\lambda^{(2)}) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots n-2).$$

Indem man diese Schlußweise wiederholt anwendet, kommt man schließlich zu einer jedenfalls in dem Bereiche der Werte $x_0, x_1, \ldots x_n$ gelegenen Stelle $x_0^{(n)}$, an welcher auch noch

(10) $$f^{(n)}(x_0^{(n)}) = \varphi^{(n)}(x_0^{(n)})$$

ist.

Wenn aber die Punkte $M_1, M_2, \ldots M_n$ in beliebiger Weise sämtlich gegen den Punkt M_0 als Grenze sich hinbewegen, so konvergieren $x_1, x_2, \ldots x_n$ und alle die sukzessiven Zwischenwerte $x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \ldots; x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \ldots; \ldots x_0^{(n)}$ gegen den Grenzwert x_0, an der Grenze wird also laut (7), (8), (9), (10):

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0), \quad f''(x_0) = \varphi''(x_0), \ldots$$
$$f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0);$$

hierdurch sind aber die Bedingungen für eine Berührung n-ter Ordnung erfüllt.

Das Ergebnis kann in dem folgenden Satze ausgesprochen werden: *Wenn zwei Kurven C und C' in einem Punkte M_0 $n+1$ vereinigt liegende Punkte miteinander gemein haben, so weisen sie dort eine Berührung n-ter Ordnung auf.*

Die Ausdrucksweisen: „$n+1$-punktige Berührung" und „Berührung n-ter Ordnung" haben also denselben Inhalt.

147. Oskulation. Von den beiden Kurven sei die eine, C, vollständig gegeben, die Gleichung der anderen, C', enthalte aber $n+1$ unbestimmte Konstanten oder Parameter, welche auf die Lage der Kurve in der Ebene und ihre spezielle Form von Einfluß sind.

Man kann der Kurve C' höchstens $n+1$ voneinander unabhängige Bedingungen auferlegen; bestehen diese darin, daß für eine Abszisse x_0 ihre Ordinate und deren Ableitungen bis zur n-ten Ordnung einschließlich mit den entsprechenden auf die Kurve C bezüglichen Größen übereinstimmen sollen, so hat die Kurve C' mit der Kurve C in dem zur Abszisse x_0 gehörigen Punkte eine Berührung der n-ten, zugleich der höchstmöglichen Ordnung, welcher sie nach der Zahl ihrer Parameter im allgemeinen fähig ist. Man sagt, die Kurve C' *oskuliere* die Kurve C oder stehe mit ihr in *Oskulation* im Punkte M_0.

Nach den Ausführungen von **146** ist die oskulierende Kurve C' im Punkte M_0 von C die Grenze, welcher sich eine Kurve von der Gleichungsform C', die außer durch M_0 noch durch n Punkte $M_1, M_2, \ldots M_n$ von C hindurchgeht, nähert, wenn die letztgenannten Punkte insgesamt gegen M_0 als Grenze konvergieren.

Da die Gleichung einer Geraden zwei Parameter enthält, so weist die oskulierende Gerade eine Berührung erster Ordnung auf; der Kreis eine solche von zweiter Ordnung, weil in der allgemeinen Gleichung des Kreises drei Parameter erscheinen; ein Kegelschnitt im allgemeinen wird, wenn er eine Kurve oskuliert, mit ihr in einer Berührung vierter Ordnung stehen, weil seine Gleichung fünf Parameter enthält.

Es kann in einzelnen Punkten der Kurve C geschehen, daß nach Erfüllung der zur Oskulation mit C' erforderlichen Bedingungen auch noch die Ableitungen der Ordinate von der $(n+1)$-ten Ordnung, eventuell noch höhere Ableitungen für beide Kurven übereinstimmen; an solchen Stellen von C findet dann eine Berührung von höherer Ordnung statt, als es im allgemeinen möglich ist; man sagt, es bestehe hier *Superoskulation.*

148. Die oskulierende Gerade. Um für die Kurve

$$(C) \qquad y = f(x)$$

im Punkte M mit den Koordinaten x, y die oskulierende Gerade

$$(C') \qquad \eta = a\xi + b$$

zu bestimmen, bilde man die Gleichungen

$$y = ax + b$$
$$y' = a,$$

welche aus (C′) hervorgehen, wenn man in bezug auf ξ differentiiert und sodann in beiden Gleichungen ξ durch x, η, η' durch die aus (C) gefundenen Werte y, y' ersetzt. Hieraus ergibt sich

$$a = y'$$
$$b = y - xy';$$

somit ist

$$(C') \qquad \eta - y = y'(\xi - x)$$

die Gleichung der oskulierenden Geraden.

Oskulierende Gerade in einem Punkte einer Kurve ist demnach die Tangente.

Superoskulation findet statt, wenn auch höhere Differentialquotienten aus (C) und (C′) übereinstimmen; nun folgt aus (C′) $\eta'' = 0$, daher muß, soll Superoskulation bestehen, der Punkt M auf (C) so gewählt werden, daß $y'' = 0$ ist. Diese Bedingung erfüllt beispielsweise ein Wendepunkt: darum ist eine Wendetangente superoskulierend, und zwar in einer Berührung zweiter Ordnung, sofern nicht auch noch höhere Differentialquotienten von y verschwinden.

149. Der Oskulationskreis. Unter den eine Kurve in einem Punkte oskulierenden Linien ist der Kreis von größter Wichtigkeit; da nämlich oskulierende Linien in einer Zeichnung selbst auf eine ziemlich beträchtliche Umgebung des Berührungspunktes nur sehr wenig voneinander abweichen, so kann man sich von der Gestaltung einer Kurve in der Umgebung einer Stelle durch Konstruktion des oskulierenden Kreises am bequemsten eine Vorstellung verschaffen.

An die Kurve

$$(C) \qquad y = f(x)$$

ist im Punkte M mit den Koordinaten x, y der Oskulationskreis zu legen. Schreibt man seine Gleichung in der Form

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = r^2$$

und differentiiert dieselbe zweimal nacheinander in bezug auf ξ:

$$(11) \qquad \begin{cases} \xi - \alpha + (\eta - \beta)\eta' = 0 \\ 1 + \eta'^2 + (\eta - \beta)\eta'' = 0, \end{cases}$$

so hat man nur in den drei letzten Gleichungen $\xi = x$ zu setzen und an die Stelle von η, η', η'' die aus (C) gezogenen Werte y, y', y'' treten zu lassen, um die zur Bestimmung der Parameter des Oskulationskreises führenden Gleichungen:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$
$$x - \alpha + (y - \beta)y' = 0$$
$$1 + y'^2 + (y - \beta)y'' = 0$$

zu erhalten. Aus denselben ergibt sich sukzessive

$$(12) \qquad \begin{cases} \beta = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''} \\ \alpha = x - \dfrac{(1 + y'^2)y'}{y''} \\ r = \dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \end{cases}$$

Der Oskulationskreis, der durch die Parameter (12) bestimmt ist, hat mit der Kurve im Punkte M im allgemeinen eine Berührung zweiter Ordnung und eine solche ist mit einem Schneiden verbunden; Kurve und Oskulationskreis haben also zu beiden Seiten des Berührungspunktes entgegengesetzte Lage gegeneinander.

Weil für den Oskulationskreis und die Kurve in M die zweiten Differentialquotienten der Ordinate einander gleich sind, also auch im Vorzeichen übereinstimmen, so wendet hier der Oskulationskreis seine Konkavität nach derselben Seite wie die Kurve.

Wenn zwei Kurven C und C' in einem Punkte M sich nach der zweiten oder einer höheren Ordnung berühren, so haben sie hier einen gemeinschaftlichen Oskulationskreis, weil sie in den Stücken, welche die Parameter des Oskulationskreises bedingen, übereinstimmen.

Ist für die Kurve C im Punkte M $y'' = 0$, so werden die Parameter des Oskulationskreises, nämlich die Koordinaten α, β

seines Mittelpunktes und der Radius r unendlich; der Kreis degeneriert in die Tangente der Kurve in M; dies ist beispielsweise auch dann der Fall, wenn der Punkt M Inflexionspunkt ist; in der Tat wurde auch gezeigt (148), daß die Inflexionstangente eine Berührung zweiter Ordnung aufweist.

Beispiel. Es sei

$$y = ax^2 + 2bx + c$$

die gegebene Kurve — eine Parabel, deren Achse der Ordinatenachse parallel ist —, und für den Punkt, dessen Abszisse x ist, sei der Oskulationskreis zu bestimmen.

Setzt man die Werte für y,

$$y' = 2ax + 2b$$
$$y'' = 2a$$

in die Formeln (12) ein, so ergeben sich als Parameter des Oskulationskreises:

$$\alpha = -\frac{4(ax+b)^3 + b}{a}$$

$$\beta = \frac{6(ax+b)^2 + 2(ac-b^2) + 1}{2a}$$

$$r = \frac{[1 + 4(ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}{2a}$$

Für den Punkt M als Punkt der Parabel ist, weil $y'' = 2a$,

$$y''' = 0;$$

für denselben Punkt, als dem Oskulationskreise angehörend, ergibt sich der dritte Differentialquotient der Ordinate, indem man die zweite Gleichung (11) nochmals differentiiert und η, η', η'' durch $y, y'\, y''$ ersetzt, also aus der Gleichung

$$3y'y'' + (y - \beta)\eta''' = 0;$$

η''' hat demnach auch den Wert Null, wenn

$$y'y'' = 4a(ax+b) = 0$$

ist, also für $x = -\frac{b}{a}$, wofür $y = c - \frac{b^2}{a}$; im Scheitel der Parabel (118, 2)) und nur hier findet demnach Superoskulation statt, und die Parameter des bezüglichen Oskulationskreises sind:

$$\alpha = -\frac{b}{a}; \quad \beta = \frac{2(ac-b^2)+1}{2a}, \quad r = \frac{1}{2a}.$$

§ 5. Die Länge eines Kurvenbogens und das Bogendifferential.

150. Definition der Länge eines Kurvenbogens. Der Begriff der *Länge eines Kurvenbogens* gründet sich auf die Vorstellung, daß es möglich sei, einem biegsamen nicht dehnbaren Faden die Form des Bogens zu geben und ihn dann auszuspannen; in diesem Zustande gestattet er die Vergleichung mit einer Längeneinheit, was zur Bestimmung seiner *Länge* führt; diese Länge wird auch als Länge des Bogen erklärt.

Diese Vorstellung läßt sich aber nicht analytisch verwerten. Um daher den Begriff der analytischen Behandlung zugänglich zu machen, bedarf er einer von jener Vorstellung unabhängigen Definition, die aber notwendig zu der allein direkt ausführbaren Messung gerader Linien zurückleiten muß. Wir formulieren diese Definition folgendermaßen:

Ein Kurvenbogen besitzt dann eine Länge, wenn die Länge eines von dem einen Endpunkte des Bogens zum anderen verlaufenden Sehnenzuges einem bestimmten Grenzwerte sich nähert, sobald die Zahl der Seiten dieses Zuges beständig wächst und jede einzelne Seite der Grenze Null zustrebt; dieser Grenzwert soll als Länge des Kurvenbogens erklärt werden.

Der Nachweis, daß der Grenzwert besteht, sobald gewisse Bedingungen erfüllt sind, fällt in das Gebiet der Integralrechnung. Wir nehmen für die Kurven, welche wir in Betracht ziehen werden, diesen Grenzwert als vorhanden an.

151. Das Bogendifferential in rechtwinkligen Koordinaten. Es sei

$$y = f(x) \tag{1}$$

Fig. 66.

die Gleichung einer gegebenen, auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen Kurve MC (Fig. 66); die Länge s des Bogens M_0M, welcher von einem festen Punkte M_0 und einem variablen Punkte M mit der Abszisse x begrenzt wird, ist eine eindeutige Funktion von x:

$$s = F(x). \tag{2}$$

Obwohl wir diese Funktion nicht kennen, sind wir imstande, ihren Differentialquotienten in bezug auf x auf Grund der Gleichung der Kurve zu bestimmen.

Der Abszisse $x + h = OP'$ entspreche der Punkt M' der Kurve und der Bogen $MM' = \varDelta s$ sei einförmig gekrümmt in dem Sinne, daß er beständig nach derselben Seite konkav ist. Konstruiert man in den Punkten M und M' die Tangenten MT und $M'T'$, so begrenzen diese mit der Sehne MM' ein Dreieck $MM'Q$, und nach einem Satze des Archimedes gilt:

$$MM' < \varDelta s < MQ + QM':$$

da ferner $MQ + QM' < MR' + R'M'$, so ist in verstärktem Maße

$$MM' < \varDelta s < MR' + R'M'.$$

Nun ist (38, (2))

$$MM' = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{NM'}^2} = \sqrt{h^2 + \{f(x+h) - f(x)\}^2}$$
$$= h\sqrt{1 + f'(x + \theta h)^2}:$$

$$MR' = MN \cdot \sec NMT = h\sqrt{1 + f'(x)^2}: \tag{3}$$

und weiter, wenn $f(x)$ an der Stelle x auch einen endlichen zweiten Differentialquotienten hat,

$$R'M' = NM' - NR' = f(x+h) - f(x) - MN \cdot \operatorname{tg} NMT$$
$$= hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x + \vartheta h) - hf'(x) = \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x + \vartheta h),$$

wobei θ, ϑ unbestimmte positive echte Brüche bedeuten; durch Einsetzung dieser Ausdrücke verwandelt sich die obige Relation in

$$h\sqrt{1 + f'(x + \theta h)^2} < \varDelta s < h\sqrt{1 + f'(x)^2} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x + \vartheta h), \tag{4}$$

woraus

$$\sqrt{1 + f'(x + \theta h)^2} < \frac{\varDelta s}{h} < \sqrt{1 + f'(x)^2} + \frac{h}{2} f''(x + \vartheta h).$$

Unter der Voraussetzung, daß sich eine Umgebung von x angeben läßt, innerhalb welcher $f'(x)$ stetig sich ändert, konvergieren die beiden äußeren Ausdrücke für $\lim h = 0$ gegen die gemeinsame Grenze $\sqrt{1 + f'(x)^2}$, und dies ist auch der

Grenzwert des eingeschlossenen Quotienten, also der Differentialquotient des Bogens in bezug auf die Abszisse, so daß

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2}. \tag{5}$$

Die Quadratwurzel ist positiv zu nehmen, wenn die Anordnung so getroffen ist, daß der Bogen s mit der Abszisse x zugleich wächst und abnimmt.

Durch Multiplikation mit dx ergibt sich daraus das *Bogendifferential in rechtwinkligen Koordinaten*

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx; \tag{6}$$

demselben kann eine allgemeinere Form verliehen werden, wenn man $f'(x)$ durch den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ der Differentiale ersetzt; es wird dann

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}; \tag{7}$$

während die Formel (6) zu gebrauchen sein wird, so oft die Kurve in der Form (1) gegeben ist, kommt (7) zur Anwendung, wenn x, y als Funktionen eines Parameters u dargestellt sind.

Die geometrische Bedeutung des Bogendifferentials (6) geht aus der Gleichung (3) unmittelbar hervor; *es drückt jenen Abschnitt der Tangente im Punkte M aus, welcher sich auf der Abszissenachse in dieselbe Strecke $PP' = dx$ projiziert, wie der Bogen MM' selbst.*

Für diesen Bogen aber folgt aus (4), daß

$$\Delta s < \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx + \frac{f''(x + \vartheta dx)}{1 \cdot 2} dx^2;$$

verbindet man diese Beziehung mit (6) durch Subtraktion, so ergibt sich

$$\Delta s - ds < \frac{f''(x + \vartheta dx)}{1 \cdot 2} dx^2;$$

daß also, dx als unendlich kleine Größe erster Ordnung angesehen, Δs und ds selbst Größen erster Ordnung bedeuten, deren Unterschied jedoch eine Größe mindestens der zweiten Ordnung ist. Daraus ist der Schluß zu ziehen, daß das Verhältnis aus dem Bogen Δs und dem Bogendifferential ds den Grenzwert 1 besitzt.

Denselben Grenzwert hat auch der Quotient aus dem Bogen Δs und der zugehörigen Sehne $MM' = c$; denn aus dem oben angeführten Werte für MM' und der Relation (4) folgt

$$1 < \frac{\Delta s}{c} < \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{1 + f'(x + \theta h)^2}} + \frac{h}{2} \frac{f''(x + \vartheta h)}{\sqrt{1 + f'(x + \theta h)^2}};$$

der Ausdruck rechts konvergiert aber für $\lim h = 0$ gegen die Grenze 1, daher ist bei demselben Grenzübergange auch

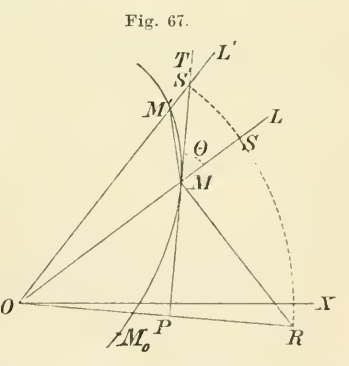
$$\lim \frac{\Delta s}{c} = 1; \tag{8}$$

dies führt zu dem weiteren Schlusse, daß auch der Unterschied zwischen dem Bogen und der Sehne eine Größe mindestens der zweiten Ordnung in bezug auf h oder dx ist.

152. Das Bogendifferential in Polarkoordinaten. Von dieser letzten Tatsache wollen wir Gebrauch machen, um für eine auf ein Polarkoordinatensystem bezogene Kurve die Aufgabe zu lösen, den Differentialquotienten des Bogens in bezug auf die Amplitude zu bestimmen.

Sei s die Länge des Bogens M_0M (Fig. 67), der in einem festen Punkte M_0 beginnend bei dem variablen Punkte M mit den Koordinaten r, φ endet; über den Bogen $MM' = \Delta s$, dessen Endpunkt M' die Amplitude $\varphi + \Delta\varphi$ hat, machen wir eine ähnliche Voraussetzung wie im vorigen Artikel und sprechen sie hier dahin aus, daß derselbe gegen den Pol entweder beständig konkav oder beständig konvex sei; die Sehne MM' dieses Bogens werde wieder mit c und der Winkel LMM', welchen sie mit der Verlängerung des Radiusvektors bildet, mit ω bezeichnet.

Fig. 67.



Aus der Formel (8) folgt nun, daß auch

$$\lim_{\Delta\varphi = 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \lim \frac{c}{\Delta\varphi},$$

d. h. daß

$$\frac{ds}{d\varphi} = \lim_{\Delta\varphi = 0} \frac{c}{\Delta\varphi}.$$

Aus dem Dreieck OMM' aber ergibt sich

$$c : r = \sin \Delta\varphi : \sin(\omega - \Delta\varphi);$$

daraus ist

$$c = r \frac{\sin \Delta\varphi}{\sin(\omega - \Delta\varphi)}$$

und weiter

$$\frac{c}{\Delta\varphi} = r \frac{\frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi}}{\sin(\omega - \Delta\varphi)};$$

für $\lim \Delta\varphi = 0$ konvergiert $\frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi}$ gegen die Grenze 1 und ω gegen den Winkel Θ, welchen die Tangente MT mit der Verlängerung des Radiusvektors einschließt (**132**); demnach ist

$$\lim_{\Delta\varphi = 0} \frac{c}{\Delta\varphi} = \frac{r}{\sin \Theta},$$

und hiermit

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{r}{\sin \Theta}, \tag{9}$$

und wenn man für $\sin \Theta$ den Wert aus **132** (32) einträgt,

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + r'^2}. \tag{10}$$

Daraus erhält man für das *Bogendifferential in Polarkoordinaten* den Ausdruck

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi, \tag{11}$$

der auch in der Gestalt

$$ds = \sqrt{(r\, d\varphi)^2 + dr^2} \tag{12}$$

geschrieben werden kann.

Die geometrische Bedeutung des Bogendifferentials aber ergibt sich am einfachsten aus der Formel (9), vermöge deren

$$ds = \frac{r}{\sin \Theta} d\varphi$$

ist; danach ist das Bogendifferential durch einen Kreisbogen vom Halbmesser $\frac{r}{\sin \Theta}$ und vom Zentriwinkel $d\varphi$ darstellbar. Wenn man also OP senkrecht zur Tangente MT und MR senkrecht zum Radiusvektor zieht und mit dem Halbmesser

OR (der übrigens mit der Länge der Normale übereinstimmt) in den Winkel LOL' den Bogen SS' beschreibt, so ist

$$ds = \text{arc } SS'.$$

§ 6. Krümmung ebener Kurven.

153. Begriff der Krümmung, des Krümmungshalbmessers, Krümmungsmittelpunktes und Krümmungskreises. Eine Kurve M_0C (Fig. 68) sei auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen. Für jeden Punkt M derselben ist nicht allein die Ordinate $y = PM$, sondern auch der von einem festen Punkte M_0 an gezählte Bogen $s = M_0M$ wie auch der Winkel τ, welchen die Tangente MT mit der positiven Richtung der Abszissenachse einschließt, als bekannte Funktion von x anzusehen; insbesondere ist

Fig. 68.

$$(1) \qquad \tau = \operatorname{Arctg} y',$$

unter $\operatorname{Arctg} y'$ den aus dem Intervall $(0, \pi)$ genommenen zur Tangens y' gehörigen Bogen verstanden.

Wird x um Δx geändert, was dem Übergange vom Punkte M zum Punkte M' entsprechen möge, so ändern sich s und τ um die Größen $\Delta s = \text{arc } MM'$ und $\Delta\tau = T'QT$, und es bedeutet

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$$

die *Geschwindigkeit der Änderung des Bogens* an der Stelle M, ebenso

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta x}$$

die *Geschwindigkeit der Änderung des Winkels oder der Richtung der Tangente*, beide bei gleichförmiger Änderung von x mit der Geschwindigkeit 1 (22, 1)).

Je rascher sich nun τ *im Verhältnis* zu s ändert, um so stärker, sagt man, sei die Kurve an der Stelle M gekrümmt, und man definiert geradezu das Verhältnis der Geschwindig-

keiten in der Änderung des Winkels τ zu jener des Bogens s als *Maß der Krümmung* oder kurzweg als *Krümmung* der Kurve im Punkte M. Bezeichnet man die Krümmung mit k, so ist hiernach

$$k = \frac{\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\frac{d\tau}{dx}}{\frac{ds}{dx}}, \tag{2}$$

wofür auch kürzer geschrieben werden kann

$$k = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}. \tag{3}$$

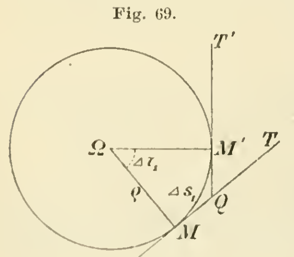
Man nennt das Differential des Winkels τ den *Kontingenzwinkel* des zu dx gehörigen Bogenelements, weil $d\tau$ bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung als dx den Winkel bestimmt, welchen die Tangenten in den Endpunkten dieses Bogenelements miteinander einschließen. Damit ist die *von dem Koordinatensystem unabhängige* Definition gewonnen, *die Krümmung einer Kurve in einem Punkte sei der Quotient aus dem Kontingenzwinkel durch das zugehörige Bogendifferential an der betreffenden Stelle der Kurve* oder der Grenzwert, dem der Quotient aus dem Winkel $\Delta\tau$ der Tangenten in M und M' durch den Bogen MM' selbst bei beständiger Annäherung von M' an M zustrebt.

Aus der Gleichung (3) folgt:

$$ds = \frac{1}{k}\, d\tau; \tag{4}$$

dies besagt, daß das Bogendifferential und daher bis auf Größen höherer Ordnung auch das Bogenelement MM' selbst als Bogen eines Kreises vom Halbmesser $\frac{1}{k}$ und vom Zentriwinkel $d\tau$ angesehen werden kann. Bezeichnet man den Halbmesser dieses Kreises mit ϱ und seine Krümmung in irgend einem Punkte mit k_1, so ist (Fig. 69)

Fig. 69.



$$\Delta s_1 = \varrho\, \Delta \tau_1,$$

daher

$$k_1 = \lim \frac{\Delta \tau_1}{\Delta s_1} = \frac{1}{\varrho}$$

und vermöge

(5) $$\varrho = \frac{1}{k}$$

ist

$$k = k_1;$$

d. h. der betrachtete Kreis hat in allen seinen Punkten dieselbe Krümmung, wie sie der Kurve im Punkte M zukommt. Aus diesem Grunde wird sein Radius ϱ, welcher das Reziprok der Krümmung bedeutet, *Krümmungsradius der Kurve im Punkte M* genannt.

Trägt man (Fig. 69) ϱ auf der Normale in M vom Punkte M aus nach derjenigen Seite ab, nach welcher die Kurve ihre Konkavität wendet, und beschreibt man aus dem so erhaltenen Punkte Ω einen Kreis vom Halbmesser ϱ in der Ebene der Kurve, so wird der dem Punkte M zunächst gelegene Bogen dieses Kreises sich nur sehr wenig von dem angrenzenden Bogenelement der Kurve unterscheiden; man bezeichnet den so gezeichneten Kreis als den *Krümmungskreis* und seinen Mittelpunkt Ω als den *Krümmungsmittelpunkt* der Kurve im Punkte M.

154. Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten. Der analytische Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ergibt sich auf Grund der Gleichungen (2) und (5) wie folgt. Aus (1) erhält man

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2},$$

nach **151**, (5) ist

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 + y'^2};$$

daraus folgt die Krümmung

(6) $$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und der Krümmungshalbmesser

(7) $$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Hierzu ist folgendes zu bemerken. Die Zählung des Bogens s erfolgt derart, daß er mit der Abszisse x zugleich wächst; dann ist die Quadratwurzel in dem Ausdrucke (7) positiv (**151**) und stimmt das Vorzeichen von ϱ mit jenem von y'' überein. Es ergibt sich also unter dieser Voraussetzung ϱ positiv in einem

Punkte, in welchem die Kurve konkav nach oben, und negativ in einem Punkte, wo sie konkav nach unten ist (143). In einem Wendepunkte ist $y'' = 0$ und der Krümmungsradius wird dort unendlich, die Krümmung Null, der Krümmungskreis geht in eine Gerade, die Wendetangente, über.

Zur Feststellung des Krümmungsmittelpunktes Ω, dessen Koordinaten x_0/y_0 heißen mögen, stellen wir folgende Betrachtung an. Als positiv gelte diejenige Richtung der Normale in M, welche in bezug auf die Tangente daselbst auf derselben Seite liegt, wie die Parallele $M(Y)$ zur positiven Richtung der Ordinatenachse (Fig. 69), und der (auf das Intervall $(0, \pi)$ beschränkte) Winkel, welchen diese Normalenrichtung mit der positiven Richtung der Abszissenachse einschließt, heiße ν. Dann hat die Strecke $M\Omega$ die positive oder negative Richtung der Normale, je nachdem ϱ positiv oder negativ ist, und es ist immer

$$(8) \qquad \begin{cases} x_0 - x = \varrho \cos \nu, \\ y_0 - y = \varrho \sin \nu; \end{cases}$$

da ferner

$$\operatorname{tg} \nu = -\frac{1}{y'},$$

so ergibt sich

$$\sin \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \cos \nu = -\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

die Wurzel positiv, weil $\sin \nu$ positiv ist; hiermit und mit Benutzung von (7) hat man aus (8):

$$(9) \qquad \begin{cases} x_0 = x - \dfrac{(1 + y'^2) y'}{y''} \\[2ex] y_0 = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}. \end{cases}$$

Die Vergleichung der Formeln (7) und (9) mit jenen 149, (12) führt zu dem Satze: *Der Krümmungskreis einer Kurve in einem ihrer Punkte fällt mit dem Oskulationskreise zusammen.*

Die Formeln (6), (7) und (9) sind unter der Annahme abgeleitet worden, daß die Abszisse x als unabhängige Variable gelte. Um die Formeln für eine beliebige unabhängige Variable zu erhalten, braucht man nur an die Formel (3) sich zu halten

und y' durch den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ der Differentiale zu ersetzen Dann erhält man aus

$$\tau = \operatorname{Arctg} \frac{dy}{dx}$$

durch Differentiation

$$d\tau = \frac{\frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 + dy^2};$$

ferner ist laut **151**, (7)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

daher nach (3) und (5):

$$k = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6*}$$

und

$$\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}. \tag{7*}$$

Aus

$$\operatorname{tg} \nu = -\frac{dx}{dy}$$

erhält man weiter

$$\sin \nu = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad \cos \nu = -\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

und hiermit auf Grund von (8):

$$\begin{cases} x_0 = x - \dfrac{(dx^2 + dy^2)\, dy}{dx\, d^2y - dy\, d^2x} \\ y_0 = y + \dfrac{(dx^2 + dy^2)\, dx}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}. \end{cases} \tag{9*}$$

In allen diesen Formeln hat die Quadratwurzel das nämliche Vorzeichen wie dx zu bekommen, damit $\sin \nu$ positiv sei; das Differential der unabhängigen Variablen wird dabei immer als positiv angesehen.

Ist die Kurve in der Form $f(x, y) = 0$ gegeben, so ersetze man in (7) und (9) y' und y'' durch die aus **57**, (9) und (10) resultierenden Werte und erhält so die Formeln:

$$\varrho = \frac{(f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}{-f_{xx} f_y^2 + 2 f_{xy} f_x f_y - f_{yy} f_x^2} \tag{7**}$$

$$(9^{**})\qquad \begin{cases} x_0 = x - \dfrac{(f_x^2 + f_y^2) f_x}{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2} \\ y_0 = y - \dfrac{(f_x^2 + f_y^2) f_y}{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}. \end{cases}$$

155. Der Krümmungsmittelpunkt als letzter Schnitt zweier benachbarten Normalen. Der Krümmungsmittelpunkt kann geometrisch noch in anderer Weise charakterisiert werden. *Es ist nämlich der Krümmungsmittelpunkt zu dem Punkte M die Grenze, gegen welche sich der Schnittpunkt der Normale in M mit der Normale in M' hinbewegt, wenn M' auf der Kurve unaufhörlich dem Punkte M sich nähert.*

Wir wollen dies gleich unter der allgemeinen Voraussetzung nachweisen, daß x, y als Funktionen eines Parameters u gegeben sind. Dann ist die linke Seite der Gleichung der Normale im Punkte M (**130**), (23)):

$$(10)\qquad (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0$$

nach Unterdrückung des Faktors du eine Funktion von ξ, η, u und werde als solche durch $V(\xi, \eta, u)$ bezeichnet, so daß an Stelle von (10) geschrieben werden kann

$$(11)\qquad V(\xi, \eta, u) = 0;$$

die Normale in M', welchem Punkte der Parameter $u + \Delta u$ zukommen möge, ist durch

$$(12)\qquad V(\xi, \eta, u + \Delta u) = 0$$

dargestellt. An Stelle der Gleichung (12) kann auch

$$(13)\qquad \frac{V(\xi, \eta, u + \Delta u) - V(\xi, \eta, u)}{\Delta u} = 0$$

gesetzt werden. Aus (11) und (13) wäre der Schnittpunkt der beiden Normalen zu bestimmen; da es sich aber um seine Grenzlage handelt, so lasse man in (13) Δu gegen Null konvergieren; dadurch geht diese Gleichung über in

$$\frac{\partial V(\xi, \eta, u)}{\partial u} = 0,$$

oder aber in

$$(13^*)\qquad d_u V(\xi, \eta, u) = 0$$

und bestimmt mit (11) zusammen den Grenzpunkt. Seine Koordinaten ergeben sich also aus

$$(14) \qquad \begin{cases} (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy = 0 \\ (\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y = dx^2 + dy^2 \end{cases}$$

durch Auflösung in bezug auf ξ und η; diese liefert aber

$$\xi = x - \frac{(dx^2 + dy^2)\,dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

$$\eta = y + \frac{(dx^2 + dy^2)\,dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

Werte, welche in der Tat mit den in (9*) gefundenen Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes übereinstimmen.

156. Die Evolute einer Kurve. Evolventen. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer gegebenen Kurve ist eine neue Kurve, welche man als *Evolute* der gegebenen bezeichnet, während diese eine *Evolvente* von jener genannt wird. Die Namen sind in gewissen Eigenschaften dieser Linien begründet, welche alsbald nachgewiesen werden sollen.

Was zunächst die Gewinnung der Gleichung der Ortskurve der Krümmungsmittelpunkte oder der Evolute anlangt, so ist folgendes zu bemerken. Ist die Kurve in einer der Formen $y = F(x)$ oder $f(x, y) = 0$ gegeben, so hat man zwischen ihrer Gleichung und den beiden Gleichungen (9), beziehungsweise (9**), die Koordinaten x, y zu eliminieren, um die Relation zwischen x_0, y_0, d. i. die Gleichung der Evolute zu erhalten. Wenn hingegen die Kurve durch einen Parameter, also in der Form $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ dargestellt ist, so hat man zwischen diesen und den beiden Gleichungen (9*) die Variablen x, y, u zu eliminieren, um zu demselben Ziele zu gelangen.

Um nun die charakteristischen Eigenschaften der Evolute zu erweisen, gehen wir von den Gleichungen (14) aus, welche zwischen den Koordinaten x/y eines Punktes der gegebenen Kurve und den Koordinaten x_0/y_0 des Krümmungsmittelpunktes, also des ihm zugeordneten Punktes der Evolute, die folgenden Beziehungen zum Ausdruck bringen:

$$(x_0 - x)\,dx + (y_0 - y)\,dy = 0,$$

$$(x_0 - x)\,d^2x + (y_0 - y)\,d^2y = dx^2 + dy^2.$$

Differentiiert man die erste dieser Gleichungen, so ergibt sich zunächst

$$(dx_0 - dx)dx + (dy_0 - dy)dy + (x_0 - x)d^2x + (y_0 - y)d^2y = 0,$$

und dies reduziert sich im Hinblicke auf die zweite Gleichung auf

$$dx_0\,dx + dy_0\,dy = 0, \tag{15}$$

woraus

$$\frac{dy_0}{dx_0} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \tag{16}$$

Diese Gleichung besagt, daß die Tangenten in zusammengehörigen Punkten der gegebenen Kurve und ihrer Evolute senkrecht aufeinander stehen; da nun der Punkt x_0/y_0 in der Normale des Punktes x/y liegt, so folgt daraus der Satz: *Die Normalen der gegebenen Kurve sind Tangenten der Evolute.*

Aus den Gleichungen **154**, (8):

$$x_0 - x = \varrho \cos \nu$$
$$y_0 - y = \varrho \sin \nu,$$

welche die Beziehungen zwischen den Koordinaten, dem Krümmungshalbmesser und dem Richtungswinkel der Normale eines Punktes der gegebenen Kurve und den Koordinaten des zugeordneten Punktes der Evolute darstellen, erhält man durch Differentiation:

$$dx_0 - dx = d\varrho \cos \nu - \varrho \sin \nu\, d\nu$$
$$dy_0 - dy = d\varrho \sin \nu + \varrho \cos \nu\, d\nu;$$

bildet man die Summe dieser Gleichungen, nachdem man sie vorher quadriert hat, unter Rücksichtnahme auf (15), so entsteht:

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dx^2 + dy^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\nu^2;$$

nun ist aber $dx_0^2 + dy_0^2$ das Quadrat des Bogendifferentials ds_0 der Evolute, $dx^2 + dy^2$ das Quadrat der zugeordneten Bogendifferentials ds der gegebenen Kurve; da ferner der Winkel ν der Normale mit der Abszissenachse dem Betrage nach um ebensoviel sich ändert wie der Winkel τ der Tangente, so ist $d\nu^2 = d\tau^2$; daher läßt sich die letzte Gleichung in der Form

$$ds_0^2 + ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\tau^2$$

schreiben, vermöge der Formeln 153, (3), (5) ist aber $\varrho = \frac{ds}{d\tau}$, infolgedessen reduziert sich diese Beziehung auf

$$ds_0^2 = d\varrho^2$$

oder

$$ds_0 = \pm\, d\varrho. \tag{17}$$

In zusammengehörigen Punkten der Evolute und der gegebenen Kurve haben die Funktionen, welche den Bogen der ersteren und den Krümmungshalbmesser der letzteren ausdrücken, dem Betrage nach gleiche Differentiale, bei demselben Differential der unabhängigen Variablen.

Von den beiden Vorzeichen gilt das obere oder untere, je nachdem s_0 und ϱ in gleichem oder im entgegengesetzten Sinne sich ändern.

Fig. 70.

Solange ein und dasselbe, z. B. das positive Vorzeichen gilt, können sich die Funktionen s_0 und ϱ nur um eine Konstante unterscheiden (38); also ist dann

$$s_0 = \varrho + c;$$

wendet man diese Gleichung auf den Anfangspunkt Ω_1 der Zählung für die Bögen der Evolute an, welchem auf der gegegebenen Kurve C (Fig. 70) der Punkt M_1 mit dem Krümmungsradius ϱ_1 entsprechen möge, so lautet sie:

$$0 = \varrho_1 + c$$

und gibt in Verbindung mit der obigen:

$$s_0 = \varrho - \varrho_1. \tag{18}$$

Hiernach ist ein Bogen $\Omega_1\Omega$ der Evolute gleich der Differenz der in seinen Endpunkten endigenden Krümmungsradien $M_1\Omega_1$, $M\Omega$ der gegebenen Kurve, vorausgesetzt, daß der Krümmungsradius von M_1 bis M in gleichem Sinne sich ändert.

Weil die Bestimmung von ϱ nur Differentiationen erfordert, so ist es zufolge der Beziehung (18) möglich, einen beliebigen Bogen der Evolute einer gegebenen Kurve bloß mit Hilfe der Differentialrechnung zu bestimmen.

Auf die durch (18) ausgedrückte Eigenschaft gründen sich die Namen Evolute und Evolvente. Befestigt man näm-

lich einen biegsamen nicht dehnbaren Faden von der Länge $\varrho = M\Omega$ mit dem einen Endpunkte in Ω, legt ihn an den Bogen $\Omega\Omega_1$ so an, daß er ihn bei Ω_1 in tangentialer Richtung verläßt, so kommt der andere Endpunkt des Fadens nach M_1. Wird nun der Faden bei fortwährender Spannung von der Kurve $\Omega\Omega_1$ abgewickelt, so beschreibt sein freier Endpunkt den Bogen $M_1 M$ der gegebenen Kurve. Auf die Evolute ist also der Faden *aufgewickelt* und die Evolvente entsteht durch seine *Abwickelung*.

Treffen Evolute und Evolvente in einem Punkte Ω_2 zusammen, so ist

$$\Omega_1 M_1 = \text{arc}\, \Omega_1 \Omega_2$$

$$\Omega M = \text{arc}\, \Omega \Omega_2$$

usw.

Diese Gleichungen charakterisieren die Kurve $M_1 M$ als eine Evolvente der Kurve $\Omega_1 \Omega$.

Hat die gegebene Kurve einen Wendepunkt, so ist die zugehörige Normale Tangente der Evolute in einem unendlich fernen Punkte, also Asymptote derselben. Erlangt der Krümmungsradius der gegebenen Kurve in einem Punkte einen extremen Wert, so ist die Normale in diesem Punkte Tangente an zwei Äste der Evolute und weist diese also eine Spitze auf.

157. Beispiele. 1) Für die *Parabel* $y^2 = 2px$ ist $y' = \frac{p}{y}$, $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$ und hiermit ergibt sich der Krümmungshalbmesser, je nachdem man ihn durch die Ordinate oder durch die Abszisse ausdrückt:

$$\varrho = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}, \quad \varrho = \frac{(p + 2x)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}};$$

vom Vorzeichen, das für $y > 0$ negativ und für $y < 0$ positiv ausfällt, ist dabei abgesehen worden.

Die Ausführung der Gleichungen **154**, (9) gibt:

$$x_0 = p + 3x$$

$$y_0 = -\frac{y^3}{p^2}$$

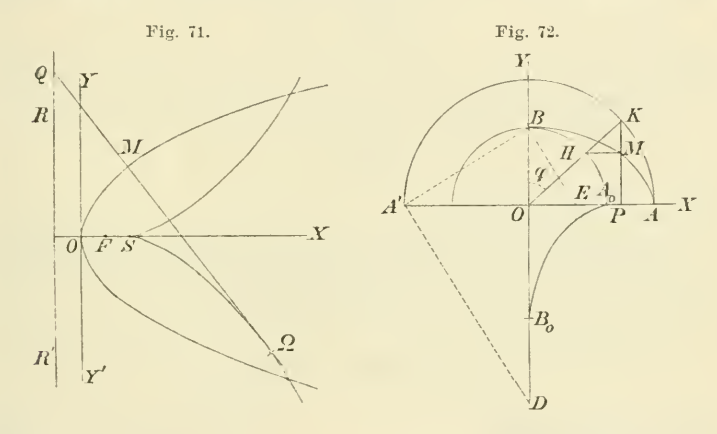
eliminiert man mit Zuhilfenahme der Kurvengleichung x und y, so kommt man zu der Gleichung

$$y_0^2 = \frac{8}{27\,p}(x_0 - p)^3,$$

welche die Evolute darstellt; diese ist also eine algebraische Kurve von der dritten Ordnung und führt den Namen semikubische oder Neilsche Parabel (131, 1)).

Der Krümmungsradius hat im Scheitel den kleinsten Wert $= p$; der Punkt $p/0$ ist also eine Spitze der Evolute.

Weil $x_0 - x = 2\left(x + \frac{p}{2}\right)$ die Projektion der Strecke $M\Omega$ (Fig. 71) auf der Abszissenachse und $x + \frac{p}{2}$ die Projektion der Strecke QM der Normale zwischen der Leitlinie RR' und dem Punkte M auf derselben Achse ist, so ist auch $M\Omega = 2\,QM$.



Man erhält demnach den Krümmungshalbmesser eines Punktes der Parabel durch Verdoppelung des Abschnittes der Normale, welcher durch die Leitlinie der Parabel gebildet wird.

Der Bogen $S\Omega$ der Neilschen Parabel, als Differenz zwischen $M\Omega$ und OS, hat den Ausdruck $\frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} - p$.*)

2) Aus der bekannten Konstruktion der *Ellipse* mittels zweier mit den Radien a, b beschriebenen konzentrischen Kreise (Fig. 72) ergibt sich folgende Darstellung derselben. Wählt man den Winkel $BOK = \varphi$, welchen der Halbmesser OK,

*) Dies ist das erste Beispiel einer algebraischen Berechnung eines Kurvenbogens, von Neil 1657 (Philos. Trans. 1673) ausgeführt.

aus dem sich der Punkt M der Ellipse ableitet, mit der kleinen Achse einschließt, als veränderlichen Parameter, so drücken sich die Koordinaten OP, PM von M wie folgt aus:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a \sin \varphi \\ y = b \cos \varphi ; \end{array}\right. \tag{20}$$

man nennt φ die *exzentrische Anomalie* des Punktes M.

Auf Grund dieser Gleichungen ergibt die Formel **154**, (7*), den Krümmungsradius (seinem absoluten Werte nach)

$$\varrho = \frac{[a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

woraus sich seine extremen Werte unmittelbar erkennen lassen: der größte für $\varphi = 0$ gleich $\frac{a^2}{b}$, der kleinste für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gleich $\frac{b^2}{a}$; man konstruiert sie, indem man zu $A'B$ die Senkrechten $A'D$ und BE errichtet, wodurch $OD = \frac{a^2}{b}$ und $OE = \frac{b^2}{a}$ erhalten wird.

In Ausführung der Formeln **154**, (9*) findet man ferner:

$$x_0 = \frac{a^2 - b^2}{a} \sin^3 \varphi$$

$$y_0 = -\frac{a^2 - b^2}{b} \cos^3 \varphi;$$

wird zur Abkürzung

$$\frac{a^2 - b^2}{a} = OA - OE = OA_0 = a_0$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b} = OD - BO = OB_0 = b_0$$

gesetzt und φ eliminiert, so folgt

$$\left(\frac{x_0}{a_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_0}{b_0}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \tag{21}$$

als Gleichung der Evolute der Ellipse. Es ist eine aus vier gleichen Quadranten von der Form A_0B_0 zusammengesetzte Kurve mit vier Spitzen; auf rationale Form gebracht lautet ihre Gleichung:

$$\left\{\left(\frac{x_0}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b_0}\right)^2 - 1\right\}^3 = -27\left(\frac{x_0}{a_0}\right)^2\left(\frac{y_0}{b_0}\right)^2$$

und läßt erkennen, daß es eine Kurve sechster Ordnung ist.

Die Länge des Quadranten A_0B_0 der Evolute ergibt sich als Differenz zwischen dem größten und kleinsten Krümmungshalbmesser, ist also gleich $\frac{a^3-b^3}{ab}$.

Setzt man in den Ausdrücken für a_0, b_0 an Stelle von b das Produkt $b\sqrt{-1}$, so daß

$$a_0 = \frac{a^2+b^2}{a} = \alpha_0, \qquad b_0 = \frac{a^2+b^2}{b\sqrt{-1}} = -\beta_0\sqrt{-1}$$

wird, so geht die Gleichung (21) über in

$$\left(\frac{x_0}{\alpha_0}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_0}{\beta_0}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

und dies stellt die Evolute der Hyperbel von den Halbachsen a, b dar, weil durch den gleichen Prozeß die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der Ellipse in die Gleichung der Hyperbel sich verwandelt.

3) Man weise allgemein nach, daß in jenen Punkten, in welchen der Krümmungsradius einen extremen Wert annimmt — den *Scheiteln* einer Kurve —, der Krümmungskreis eine Berührung dritter Ordnung eingeht (**149** und **154**, (7)).

Fig. 73.

4) Für die *Zykloide* (**128**, 1)) ergibt sich auf Grund der Gleichungen

$$x = a(u - \sin u)$$
$$y = a(1 - \cos u)$$

mit Zuhilfenahme derselben Formeln wie im vorigen Beispiel zunächst der absolute Wert des Krümmungshalbmessers

$$\varrho = 4a \sin\frac{u}{2};$$

da die Länge der Normale $\mathsf{N} = MA = 2a \sin\frac{u}{2}$ (Fig. 73) ist,

so wird der Krümmungshalbmesser durch Verdoppelung der Normale erhalten.

Weiter findet man

$$x_0 = \quad a(u + \sin u)$$
$$y_0 = -a(1 - \cos u);$$

wird eine Translation des Koordinatensystems ausgeführt gemäß den Gleichungen

$$x_0 = x_0' + \pi a$$
$$y_0 = y_0' - 2a,$$

so hat man für die neuen Koordinaten die Ausdrücke:

$$x_0' = a(u - \pi + \sin u) = a(u - \pi - \sin(u - \pi))$$
$$y_0' = a(1 + \cos u) \qquad = a(1 - \cos(u - \pi)),$$

oder, wenn noch $u - \pi = u'$ gesetzt wird:

$$x_0' = a(u' - \sin u')$$
$$y_0' = a(1 - \cos u').$$

Daraus geht hervor, daß die Evolute der Zykloide eine ihr kongruente Zykloide ist, gegen sie verschoben im Sinne der x-Achse um πa, im Sinne der Ordinatenachse um $-2a$.

Die Länge des Bogens OC_0 der Evolute ist gleich dem Unterschiede der Krümmungsradien in C und O; der erste ist $4a$, der zweite 0, daher arc $OC_0 =$ arc $OC = 4a$ und arc $OCB = 8a$.

158. Krümmungsmittelpunkt einer Roulette. Als Beispiel einer infinitesimal-geometrischen Betrachtung wollen wir die Bestimmung des Krümmungshalbmessers und Krümmungsmittelpunktes einer Roulette vornehmen, eine Aufgabe zugleich, die wegen ihrer Allgemeinheit und Tragweite von Bedeutung ist.

Unter einer Roulette versteht man die Bahn, die ein mit einer starren Figur fest verbundener Punkt P beschreibt, wenn diese mit einer ihr angehörigen Polkurve K auf einer festen Polbahn K_1 *abrollt*.

Wie sich zeigen wird, genügt es, die Betrachtung auf den Fall zu beschränken, daß Polkurve und Polbahn *Kreise* sind,

in welchem Falle man die Bahn von P als *zyklische Kurve* bezeichnet.

In Fig. 74 seien O, O_1 die Mittelpunkte von K, K_1, A_0 der Berührungspunkt der beiden Kreise, der „momentane Pol", P der beschreibende Punkt. Bei einer Fortsetzung der rollenden Bewegung wird der Punkt A des beweglichen Kreises auf den Punkt A_1 des festen zu liegen kommen; dabei ist

$$A_0 A = A_0 A_1 = \Delta \sigma$$

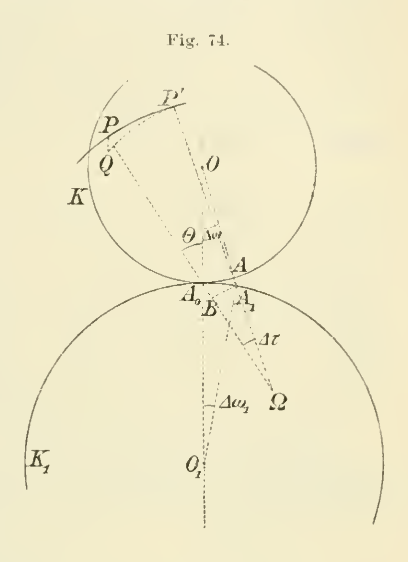


Fig. 74.

und kommt AO in die Verlängerung von $O_1 A_1$; man kann diese Endlage auch durch Translation der Figur K um die Strecke AA_1 und nachherige Drehung um die Summe $\Delta\omega + \Delta\omega_1$ der Winkel bei O und O_1 bewerkstelligen; hierbei kommt P zuerst nach Q, so daß PQ parallel und gleich AA_1, und hierauf nach P' durch Drehung von Q um A_1 durch den ebengenannten Winkel. Das Element $PP' = \Delta s$ der Bahn kann aber bis auf Größen höherer Kleinheitsordnung als Kreisbogen vom Radius $A_0 P$ und dem Zentriwinkel $\Delta\omega + \Delta\omega_1$ gerechnet werden. Da ferner der *Beginn* der Bewegung als Rotation um A_0 erscheint, so ist ihre *Anfangsrichtung* senkrecht zu $A_0 P$, daher ist PA_0 die Normale der Bahn im Punkte P. In gleicher Weise ist $P'A_1$ die Normale in P', folglich der Schnittpunkt Ω der beiden letztgenannten Linien der Krümmungsmittelpunkt der Bahn im Punkte P. Bezeichnet man den Winkel bei Ω mit $\Delta\tau$, so ist der Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{\Delta s}{\Delta \tau} = \frac{p(\Delta\omega + \Delta\omega_1)}{\Delta\tau}$$

wenn $A_0 P = p$ gesetzt wird. Wenn weiter $A_0 O = R$, $A_0 O_1 = R_1$, Winkel $PA_0 O = \theta$, und wenn aus Ω der Kreisbogen $A_1 B$ beschrieben wird, so hat man:

$$\varDelta\omega = \frac{\varDelta\sigma}{R}, \quad \varDelta\omega_1 = \frac{\varDelta\sigma}{R_1}$$

und bis auf Größen höherer Ordnung:

$$\varDelta\tau = \frac{A_1 B}{\Omega A_0} = \frac{\varDelta\sigma \cdot \cos\theta}{\varrho - p};$$

dies alles in den obigen Ausdruck eingesetzt, gibt:

$$\varrho = \frac{\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) p(\varrho - p)}{\cos\theta},$$

welche Gleichung sich in die Form bringen läßt:

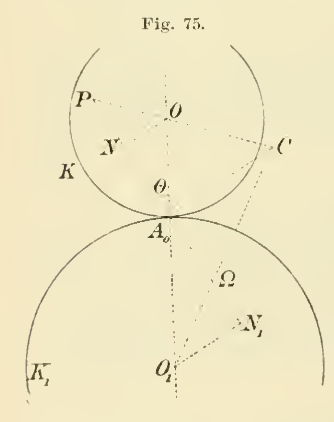
$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\varrho - p}\right)\cos\theta = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}, \tag{22}$$

die ihr Savary*) gegeben hat. Bei Berücksichtigung der Vorzeichen von R, R_1 und ϱ läßt sie sich auf alle gegenseitigen Lagen von K und K_1 übertragen. Aus ihr ergibt sich

$$\varrho - p = \frac{\cos\theta}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} - \frac{\cos\theta}{p}}. \tag{23}$$

Der Krümmungsmittelpunkt ergibt sich durch folgende Konstruktion. Nachdem man die Normale PA_0 des Punktes P (Fig. 75) gezogen und zu ihr in A_0 das Lot A_0C errichtet hat, verbinde man P mit O und verlängere bis zum Schnittpunkt C mit dem eben erwähnten Lote; diesen verbinde man mit O_1, wodurch auf der Normale der Krümmungsmittelpunkt Ω ausgeschnitten wird. Zum Zwecke des Beweises nehme man an, daß Ω tatsächlich der Krümmungsmittelpunkt sei: dann bleibt zu zeigen, daß die Geraden PO und $O_1\Omega$ das genannte Lot in *einem* Punkte schneiden. Angenommen, sie schnitten es in den Punkten C und C_1;

Fig. 75.



zieht man ON und O_1N_1 normal zu $P\Omega$, so ergeben sich aus den beiderseits entstehenden Paaren ähnlicher Dreiecke die Ansätze:

*) Journal de Mathématiques, 1845, p. 205.

$$\frac{A_0 C}{R \sin \theta} = \frac{p}{p - R \cos \theta},$$

$$\frac{A_0 C_1}{R_1 \sin \theta} = \frac{\varrho - p}{R_1 \cos \theta - (\varrho - p)};$$

beide Gleichungen ergeben aber unter Zuziehung von (23) den gleichen Wert für $A_0 C$ wie für $A_0 C_1$.

Alle Ergebnisse bleiben aufrecht, wenn Polkurve und Polbahn beliebige Linien sind; denn das Ergebnis eines infinitesimalen Abrollens bleibt dasselbe, wenn man die beiden Kurven durch ihre Oskulations-(Krümmungs)-Kreise im gemeinsamen Berührungspunkte A_0 ersetzt.

Man wende die Formel (23) und die vorgeführte Konstruktion auf die Zykloide, die Trochoiden, Epi- und Hypozykloiden an (**128**).

159. Darstellung in Polarkoordinaten. Die Bestimmung des Krümmungshalbmessers und Krümmungsmittelpunktes für eine auf ein Polarsystem bezogene Kurve gestaltet sich folgendermaßen.

Die Tangente MT des betrachteten Punktes M (Fig. 76) mit den Koordinaten r/φ bilde mit der Verlängerung des Radiusvektors den Winkel θ, mit der Polarachse den Winkel τ; vermöge der Beziehung

Fig. 76.

$$\tau = \theta + \varphi$$

ist der Kontingenzwinkel

$$d\tau = d\theta + d\varphi;$$

und da $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{r}{r'}$ (**132**), weiter:

$$d\tau = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\, d\varphi + d\varphi = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}\, d\varphi;$$

ferner ergab sich für das Bogendifferential der Ausdruck (**152**, (11))

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

Mithin ist der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \tag{24}$$

(vgl. 65, 1)); er ergibt sich, falls man die Wurzel im Zähler positiv nimmt, positiv oder negativ, je nachdem die Kurve im Punkte M gegen den Pol konkav oder konvex ist (144).

Der erstere dieser beiden Fälle liegt der Fig. 76 zugrunde; die nach der konkaven Seite der Kurve gezogene Normale schließt mit der Leitstrahlverlängerung den Winkel $\theta + \frac{\pi}{2}$ ein; wird ϱ von M aus gegen Ω abgetragen, so ergibt sich der Krümmungsmittelpunkt Ω, dessen Koordinaten r_0/φ_0 sein mögen. Durch Projizieren des Linienzuges $O\Omega M$ auf den Radiusvektor ergibt sich die Gleichung:

$$r_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) - \varrho \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = r, \tag{25}$$

und durch Projizieren auf die zum Leitstrahl senkrechte Gerade ΩQ die Gleichung:

$$r_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) - \varrho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{26}$$

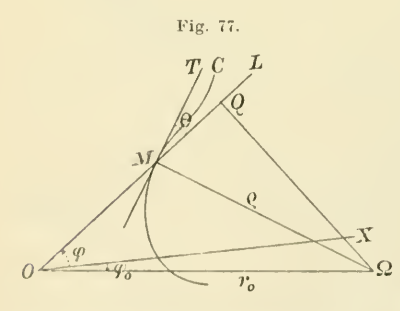
Aus diesen Gleichungen erhält man unter Zuziehung von (24) und 132, (32):

$$\left\{\begin{aligned} r_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) &= \frac{(r'^2 - rr'')r}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \\ r_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) &= \frac{(r^2 + r'^2)r'}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \end{aligned}\right. \tag{27}$$

zur Bestimmuug von r_0, φ_0.

Eliminiert man zwischen den Gleichungen (27) und der Gleichung der zugrundeliegenden Kurve r, φ, so ergibt sich die Polargleichung der Evolute.

Fig. 77.



Die Gleichungen (27) bleiben auch dann aufrecht, wenn die Kurve in M gegen den Pol konvex, ϱ also negativ ist (Fig. 77); dann nämlich schließt die nach der konkaven Seite gezogene Normale mit der Verlängerung des Radiusvektors den Winkel $\theta - \frac{\pi}{2}$ ein und an die Stelle von (25), (26) treten die Gleichungen:

$$r_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) - (-\varrho) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = r$$

$$r_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) - (-\varrho) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

die aber mit jenen sich decken.

160. Beispiele. 1) Bei der Archimedischen Spirale (**133**, 1))

$$r = a\varphi$$

hat man für den Krümmungshalbmesser den Ausdruck:

$$\varrho = \frac{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}$$

und für den Krümmungsmittelpunkt die Gleichungen:

$$r_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) = \frac{a^2 r}{2a^2 + r^2}$$

$$r_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) = \frac{(a^2 + r^2)a}{2a^2 + r^2}.$$

Aus den letzteren ergibt sich

$$r_0^2 = \frac{r^4 + 3a^2r^2 + a^4}{r^4 + 4a^2r^2 + 4a^4}\, a^2;$$

daraus geht hervor, daß r_0 zwischen den Grenzen $\frac{a}{2}$ und a gelegen ist, die untere Grenze für $r = 0$ annimmt und der oberen für $\lim r = \infty$ sich nähert; infolgedessen ist die Evolute der Archimedischen Spirale zwischen den beiden Kreislinien $r = \frac{a}{2}$ und $r = a$ eingeschlossen und nähert sich der letzteren asymptotisch.

2) Die logarithmische Spirale (**133**, 3))

$$r = ae^{m\varphi} \qquad (a > 0)$$

hat den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = r\sqrt{1 + m^2},$$

und für den Krümmungsmittelpunkt gelten die Gleichungen:

$$r_0 \cos(\varphi_0 - \varphi) = 0$$

$$r_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) = mr,$$

aus welchen sich zunächst

$$\varphi_0 - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

ergibt, je nachdem m positiv oder negativ ist; hiermit liefert die zweite

$$r_0 = \pm mr.$$

Die Elimination von r, φ gibt

$$r_0 = \pm mae^{m\left(\varphi_0 \mp \frac{\pi}{2}\right)};$$

setzt man $\pm mae^{\mp m\frac{\pi}{2}} = A$, so schreibt sich diese Gleichung

$$r_0 = Ae^{m\varphi_0}$$

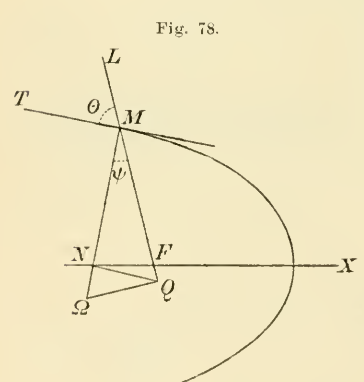
und läßt erkennen, daß die Evolute der logarithmischen Spirale eine ihr kongruente Kurve ist.

3) Die gemeinsame Polargleichung der Kegelschnittslinien lautet:

(28) $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi};$$

dabei dient ein Brennpunkt F (Fig. 78) als Pol, die Brennpunktsachse als Polarachse und bedeutet p den Halbparameter, ε die numerische Exzentrizität, welche ein echter Bruch, die Einheit, ein unechter Bruch ist bzw. bei der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel; $\varepsilon = 0$ entspräche der Kreis.

Fig. 78.



Mit Hilfe der Ableitungen

$$r' = \frac{p\varepsilon \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2},$$

$$r'' = \frac{p\varepsilon(\varepsilon + \cos \varphi + \varepsilon \sin^2 \varphi)}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^3}$$

ergibt sich der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = p\left\{\frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}}{1 + \varepsilon \cos \varphi}\right\}^3.$$

Weil die Kurve konkav ist gegen den Pol, so bildet ihre Normale mit der Verlängerung des Radiusvektors den Winkel $\theta + \frac{\pi}{2}$, mit dem Radiusvektor selbst also den Winkel

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

und ist somit

$$\cot\psi = \operatorname{tg}\theta = \frac{r}{r'} = \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{\varepsilon\sin\varphi},$$

woraus

$$\sin\psi = \frac{\varepsilon\sin\varphi}{\sqrt{1+2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}}, \quad \cos\psi = \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{\sqrt{1+2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}}.$$

Hiernach ist zunächst

$$\varrho = \frac{p}{\cos^3\psi}.$$

Bezeichnet man ferner die Länge der Normale MN mit N, so folgt aus dem Dreieck NFM:

$$\frac{\mathsf{N}}{r} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)},$$

und da

$$\sin(\varphi-\psi) = \sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}},$$

so ist

$$\mathsf{N} = p\,\frac{\sqrt{1+2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2}}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{p}{\cos\psi}.$$

Demnach hat man auch

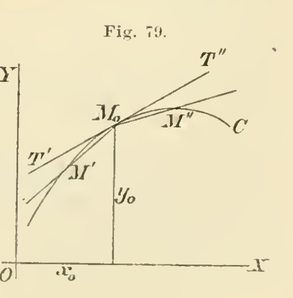
$$\varrho = \frac{\mathsf{N}}{\cos^2\psi}$$

und kann auf Grund dieser Gleichung ϱ und somit auch den Krümmungsmittelpunkt leicht konstruieren, indem man NQ senkrecht zu MN und hierauf $Q\Omega$ senkrecht zu MF führt; es ist dann $M\Omega = \varrho$ und Ω der Krümmungsmittelpunkt.

§ 7. Die singulären Punkte ebener Kurven.

161. Die einfachen Singularitäten algebraischer Kurven. Wenn die Ordinate y als eindeutige stetige Funktion von x definiert ist und an der Stelle x_0 einen vollständigen endlichen Differentialquotienten besitzt, so heißt der Punkt x_0/y_0 ein *gewöhnlicher Punkt* der betreffenden Kurve. Das geometrische Merkmal eines solchen Punktes M_0 (Fig. 79) besteht darin, daß die Kurve in demselben eine Tangente $T'T''$ besitzt und daß die Strahlen M_0M', M_0M'',

Fig. 79.



welche ihn mit den beiderseits benachbarten Punkten M', M'' verbinden, mit den Strahlen $M_0 T'$, $M_0 T''$ kleine Winkel, miteinander also einen nahezu gestreckten Winkel einschließen. Diese Merkmale bleiben auch bestehen, wenn M_0 ein Wendepunkt ist.

Zu besonderen Erscheinungen ist dann Anlaß gegeben, wenn y oder sein Differentialquotient oder beide zugleich für einzelne Werte von x aufhören definiert zu sein, oder wenn y als mehrdeutige Funktion von x gegeben ist.

Wir fassen zunächst den letzten Fall ins Auge und nehmen an, eine algebraische Kurve n-ter Ordnung sei durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

gegeben, deren linke Seite eine ganze Funktion von x, y (13) ist.

Ist m $(\leq n)$ der Grad der Gleichung in bezug auf y, so entsprechen jedem besonderen Werte von x m Werte von y, die reell oder imaginär sein können. Sind sie sämtlich untereinander verschieden und erteilt man dem x einen genügend kleinen Zuwachs h, so werden auch die zu $x + h$ gehörigen Werte von y untereinander verschieden sein und den früheren sehr naheliegen, in der Weise, daß jedem Werte y der ersten Gruppe ein bestimmter Wert der zweiten Gruppe sich wird zuordnen lassen, der sich umsoweniger von ihm unterscheidet, je kleiner h angenommen ward. In solcher Weise lassen sich die Wurzeln y der Gleichung (1) nach dem Prinzip der Stetigkeit zu Funktionszweigen zusammenstellen, und jedem Funktionszweige entspricht ein Zweig der algebraischen Kurve; die geometrische Darstellung berücksichtigt nur die *reellen Zweige*, indessen können auch die *imaginären Zweige* in dieser Darstellung in gewissem Sinne zum Ausdruck gelangen.

Stellt

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

einen für einen Bereich von x reellen Zweig von (1) und

$$y = \psi(x) \tag{3}$$

einen anderen zumindest in demselben Bereich reellen Zweig dar, so werden diese beiden gemeinsame Punkte aufweisen, sofern die Gleichung

$$\varphi(x) = \psi(x)$$

innerhalb jenes Bereichs reelle Wurzeln besitzt; ist x_0 eine solche Wurzel, so ist

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$$

eine doppelte zu x_0 gehörige Wurzel von (1), die beiden Äste (2), (3) schneiden sich in x_0/y_0 oder berühren einander dort (Fig. 80 a) und b)); die erste Erscheinung bezeichnet man als Selbstdurchschnitt oder *Knotenpunkt*, die zweite als *Selbstberührung* des ganzen durch (1) dargestellten Gebildes.

Fig. 80.

Bedeutet

$$y = \varphi(x)$$

einen Zweig, welcher beispielsweise in dem Intervalle $(-\infty, x_0)$ komplexe und in dem Intervalle $(x_0, +\infty)$ reelle Werte von y gibt, also nur in dem letzteren Intervalle reell ist, so gehört zu ihm notwendig ein anderer Zweig

$$y = \psi(x)$$

mit denselben Reellitätsverhältnissen, weil in einer Gleichung mit reellen Koeffizienten komplexe Wurzeln paarweise vorkommen; und da die Paare konjugiert sind, so haben $\varphi(x)$, $\psi(x)$ in dem Intervalle $(-\infty, x_0)$ die Formen

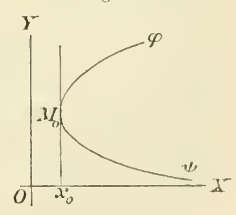
$$\tilde{\omega}_1(x) + i\,\tilde{\omega}_2(x)$$
$$\tilde{\omega}_1(x) - i\,\tilde{\omega}_2(x),$$

wobei $\tilde{\omega}_1(x)$, $\tilde{\omega}_2(x)$ stetige reelle Funktionen bedeuten; an der Stelle x_0 werden beide Funktionen reell in der Weise, daß $\tilde{\omega}_2(x_0) = 0$ wird; in demselben Augenblicke wird

$$y_0 = \varphi(x_0) = \psi(x_0) = \tilde{\omega}_1(x_0),$$

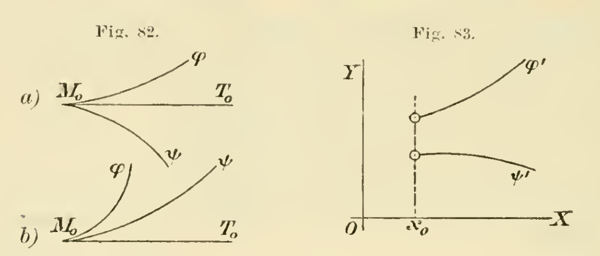
so daß die reellen Teile der Zweige im Punkte x_0/y_0 zugleich beginnen. Dies kann, wie in Fig. 81, so geschehen, daß der

Fig. 81.



Punkt M_0 den Charakter eines gewöhnlichen Punktes aufweist, und er würde sich als solcher auch analytisch zu erkennen geben, wenn man in der Gleichung (1) x statt y als abhängige

Variable auffaßte. Schließen sich die reellen Teile der Zweige in anderer Weise zusammen, so geschieht dies immer so, daß sie hier eine und dieselbe Tangente haben (Fig. 82 a) und b));



die Erscheinung, welche dadurch zustande kommt, heißt *Spitze**) der Kurve (1), und zwar Spitze erster Art, wenn sie die Form a) hat, und Spitze zweiter Art im Falle b).

Daß die reellen Teile der Zweige nicht mit verschiedenen Tangenten von M_0 ausgehen können, läßt sich folgendermaßen erkennen. Es ist eben gezeigt worden, daß bei einer algebraischen Kurve dort, wo *ein* reeller Ast beginnt, notwendig zugleich ein *zweiter* beginnen müsse. Differentiiert man die Gleichung (1) nach x, wodurch

$$f_x' + f_y' y' = 0$$

erhalten wird, und eliminiert man zwischen dieser Gleichung und (1) y, so ergibt sich wieder eine algebraische Gleichung:

$$F(x, y') = 0,$$

welche den Verlauf der Tangente bei (1) darstellt; faßt man hier y' als Ordinate auf, so kommt man wieder zu einer algebraischen Kurve. Dem Zweige φ (Fig. 82) entspricht ein Zweig φ' dieser neuen Kurve und ebenso dem Zweige ψ ein Zweig ψ', und hätten φ, ψ in M_0 verschiedene Tangenten, so begännen die zugehörigen Zweige von $F(x, y') = 0$ bei x_0 an verschiedenen Stellen wie in Fig. 83, eine Erscheinung, die oben als unmöglich bei einer algebraischen Kurve erkannt wurde.

---

*) Für die Spitze sind auch die Benennungen Rückkehrpunkt und stationärer Punkt gebräuchlich, von der geometrischen Anschauung hergeleitet, daß ein die Kurve stetig durchlaufender Punkt dort angekommen umkehren, vorher einen Augenblick stillstehen muß.

Ist der Zweig

$$y = \varphi(x)$$

im ganzen Verlaufe imaginär, hat also $\varphi(x)$ beständig die Form:

$$u(x) + iv(x),$$

wobei $u(x)$, $v(x)$ reelle Funktionen bedeuten, so gehört zu ihm aus bereits angeführten Gründen ein zweiter imaginärer Zweig

$$y = \psi(x)$$

derart, daß $\psi(x)$ die Form

$$u(x) - iv(x)$$

hat, so daß die zu einem speziellen Werte von x gehörigen Werte von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ jedesmal konjugiert komplex sind. Hat nun die Gleichung

$$v(x) = 0$$

reelle Wurzeln, und ist x_0 eine solche, so wird für sie sowohl $\varphi(x)$ wie $\psi(x)$ reell und überdies

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0) = u(x_0) = y_0,$$

so daß die imaginären Zweige den vereinzelten *reellen* Punkt x_0/y_0 gemein haben; ein solcher Punkt wird als *isolierter* oder *konjugierter Punkt* der Kurve (1) bezeichnet.

Damit sind die einfachsten besonderen Erscheinungen angedeutet, welche bei algebraischen Kurven auftreten können. Man gibt den Punkten, welche hier als Knotenpunkt (oder Selbstberührungspunkt), Spitze und isolierter Punkt bezeichnet worden sind, den gemeinsamen Namen *singuläre Punkte*, welchen Namen alle Punkte erhalten, in welchen eine Kurve ein anderes Verhalten zeigt als das bei dem gewöhnlichen Punkte beschriebene.*)

162. Analytische Charakteristik der singulären Punkte. Um die Natur eines Punktes x_0/y_0, welcher dem durch (1) dargestellten Gebilde angehört, festzustellen, schlagen wir folgenden Weg ein.

*) Man zählt vielfach auch den Wendepunkt zu den singulären Punkten.

Durch Translation des Koordinatensystems werde die Gleichung (1) derart transformiert, daß der Punkt x_0/y_0 Ursprung wird; die bezüglichen Transformationsgleichungen lauten:

$$x = x_0 + \xi \qquad y = y_0 + \eta$$

und die transformierte Gleichung (**100**, (41)):

$$f(x_0 + \xi, y_0 + \eta)$$

$$= f(x_0, y_0) + f'_{x_0}\xi + f'_{y_0}\eta + \frac{1}{2}(f''_{x_0^2}\xi^2 + 2f''_{x_0y_0}\xi\eta + f''_{y_0^2}\eta^2) + \cdots = 0,$$

oder aber, weil $f(x_0, y_0) = 0$ ist:

$$(4) \qquad f'_{x_0}\xi + f'_{y_0}\eta + \frac{1}{2}(f''_{x_0^2}\xi^2 + 2f''_{x_0y_0}\xi\eta + f''_{y_0^2}\eta^2) + \cdots = 0.$$

Die Abszissen der Schnittpunkte, welche die durch den neuen Ursprung, also durch den betrachteten Punkt M_0 der Kurve, gelegte Gerade

$$(5) \qquad \eta = t\xi$$

mit der Kurve bestimmt, ergeben sich aus der Gleichung

$$(6) \qquad (f'_{x_0} + tf'_{y_0})\xi + \frac{1}{2}(f''_{x_0^2} + 2f''_{x_0y_0}t + f''_{y_0^2}t^2)\xi^2 + \cdots = 0.$$

Sind f'_{x_0}, f'_{y_0} nicht gleichzeitig Null, so hat diese Gleichung $\xi = 0$ zur einfachen Wurzel, die Gerade (5) also mit der Kurve in M_0 im allgemeinen nur einen Punkt gemein, und man bezeichnet daher M_0 als *einfachen Punkt* der Kurve. Nur wenn der Richtungskoeffizient t so bestimmt wird, daß

$$(7) \qquad f'_{x_0} + f'_{y_0}t = 0$$

ist, hat die Gerade (5) in M_0 mit der Kurve mindestens zwei vereinigt liegende Punkte gemein und ist Tangente der Kurve in diesem Punkte; der Punkt ist damit zugleich als gewöhnlicher Punkt gekennzeichnet. Aus (7) ergibt sich, wenn $f'_{y_0} \neq 0$,

$$t = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}$$

und hiermit

$$(8) \qquad f'_{x_0}\xi + f'_{y_0}\eta = 0$$

als Gleichung der Tangente (**128**, (8)). Mit Rücksicht auf (4) kann also der Satz ausgesprochen werden: *Geht eine algebraische Kurve durch den Ursprung des Koordinatensystems und ist*

dieser ein einfacher Punkt derselben, so erhält man durch Nullsetzen der Gliedergruppe erster Ordnung unmittelbar die Gleichung der Tangente im Ursprung.

Wäre $f'_{y_0} = 0$, dagegen $f'_{x_0} \neq 0$, so ersetze man t durch $\frac{1}{\tau}$ und findet $\tau = 0$, so daß $\xi = 0$ oder die Ordinatenachse zur Tangente wird.

Wir gehen nun zu dem Falle über, wo gleichzeitig

$$f'_{x_0} = 0 \qquad f'_{y_0} = 0 \tag{9}$$

ist; wenn nicht auch alle drei Differentialquotienten zweiter Ordnung zugleich verschwinden, so beginnt nunmehr die Gleichung (6) mit einem Gliede zweiten Grades in bezug auf ξ und lautet allgemein:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 2}(f''_{x_0^2} + 2 f''_{x_0 y_0} t + f''_{y_0^2} t^2)\xi^2 \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(f'''_{x_0^3} + 3 f'''_{x_0^2 y_0} t + 3 f'''_{x_0 y_0^2} t^2 + f'''_{y_0^3} t^3)\xi^3 + \cdots = 0; \end{aligned}\right. \tag{10}$$

sie hat $\xi = 0$ zur zweifachen Wurzel, die Gerade (5) schneidet also die Kurve im Punkte M_0 zweifach, mit anderen Worten: sie schneidet dort zwei — reelle oder imaginäre — Äste der Kurve, und deshalb wird nun M_0 ein *zweifacher* oder ein *Doppelpunkt* der letzteren genannt. Für diejenigen Geraden, deren Richtungskoeffizient die Bedingung

$$f''_{x_0^2} + 2 f''_{x_0 y_0} t + f''_{y_0^2} t^2 = 0 \tag{11}$$

erfüllt, fallen in M_0 mehr als zwei Punkte der Kurve zusammen, diese Geraden sind die Tangenten an die durch M_0 verlaufenden Kurvenzweige.

In betreff der Wurzeln der Gleichung (11) sind aber mehrere Fälle zu unterscheiden.

a) Ist die Diskriminante

$$f''_{x_0^2} f''_{y_0^2} - f''^{\,2}_{x_0 y_0} < 0,$$

so hat (11) zwei verschiedene reelle Lösungen, durch M_0 gehen zwei reelle Zweige mit verschiedenen Tangenten, M_0 ist also ein *Knotenpunkt* (Fig. 80, a)).

b) Ist die Diskriminante

$$f''_{x_0^2} f''_{y_0^2} - f''^{\,2}_{x_0 y_0} = 0,$$

so besitzt (11) zwei gleiche reelle Lösungen, die beiden durch M_0 laufenden Kurvenzweige haben hier eine gemeinsame Tangente; dies kann verschiedene Erscheinungen an der Kurve bedingen: einen *Selbstberührungspunkt* (Fig. 80, b)) oder eine *Spitze* (Fig. 82) oder einen *isolierten Punkt**). Ob das eine oder das andere zutrifft, muß eine weitere Untersuchung feststellen. Gibt es zu beiden Seiten von M_0 reelle Werte von x und y, so ist Selbstberührung vorhanden; sind nur zu einer Seite von M_0 reelle y oder reelle x vorhanden, so hat man es mit einer Spitze zu tun — ob mit einer der ersten oder der zweiten Art, darüber entscheidet die Richtung der Konkavität der beiden Äste in M_0 (143) —; gibt es in der Umgebung von M_0 auf keiner Seite reelle y, so ist M_0 ein isolierter Punkt.

c) Ist endlich die Diskriminante

$$f''_{x_0^2} f''_{y_0^2} - f''^{\,2}_{x_0 y_0} > 0,$$

so hat (11) imaginäre Wurzeln und es gehen durch M_0 zwei imaginäre Kurvenzweige, M_0 ist also ein *isolierter Punkt*.

An dieser Stelle genüge der Hinweis auf die Analogie zwischen den Kriterien eines Doppelpunktes der Kurve $f(x, y) = 0$ und denjenigen für einen extremen Wert der Funktion $f(x, y)$ (121); später wird diese Analogie eine geometrische Deutung erfahren.

---

*) Daß in einem isolierten Punkte eine reelle Tangente existieren kann, ist analytisch so zu erkennen. Sind

$$y = u(x) + i\,v(x)$$
$$y = u(x) - i\,v(x)$$

zwei konjugiert imaginäre Zweige, so ist für einen isolierten Punkt $x_0\, y_0$, der aus diesen Zweigen sich ergibt,

$$v(x_0) = 0;$$

die Tangenten an diesen Punkt im neuen Koordinatensysteme haben die Gleichungen

$$\eta = (u'(x_0) + i v'(x_0))\,\xi$$
$$\eta = (u'(x_0) - i v'(x_0))\,\xi;$$

im allgemeinen sind diese Tangenten imaginär: sie werden reell und fallen gleichzeitig zusammen, wenn

$$v'(x_0) = 0,$$

wenn also x_0 eine mehrfache Wurzel der Gleichung $v(x) = 0$ ist.

Ersetzt man in (11) t durch den Wert aus (5), so ergibt sich für das System der beiden Tangenten im Punkte M_0 die Gleichung:

$$f''_{x_0^2}\xi^2 + 2f''_{x_0y_0}\xi\eta + f''_{y_0^2}\eta^2 = 0. \tag{12}$$

Würden im Punkte M_0 auch die drei Differentialquotienten zweiter Ordnung, nicht aber auch alle vier Differentialquotienten dritter Ordnung verschwinden, so ergäbe eine der obigen analoge Erwägung, daß der Punkt M_0 ein *dreifacher* Punkt der Kurve sei und daß das System der Tangenten in diesem Punkte die Gleichung

$$f'''_{x_0^3}\xi^3 + 3f'''_{x_0^2y_0}\xi^2\eta + 3f'''_{x_0y_0^2}\xi\eta^2 + f'''_{y_0^3}\eta^3 = 0 \tag{13}$$

habe. Bezüglich dieser Tangenten gibt die Diskussion der kubischen Gleichung (13) oder der Gleichung

$$f'''_{x_0^3} + 3f'''_{x_0^2y_0}t + 3f'''_{x_0y_0^2}t^2 + f'''_{y_0^3}t^3 = 0$$

Aufschluß, welche die Richtungskoeffizienten bestimmt; der größeren Zahl zu unterscheidender Fälle entspricht eine größere Mannigfaltigkeit von Formen dreifacher Punkte.

Aus der geführten Untersuchung sind folgende Ergebnisse zusammenzufassen:

Die singulären Punkte einer Kurve $f(x, y) = 0$ befriedigen außer der Gleichung der Kurve selbst auch noch die Gleichungen $f'_x = 0$ und $f'_y = 0$.

Geht eine algebraische Kurve durch den Ursprung, so belehrt der Grad der Gliedergruppe niedrigster Dimension darüber, ein wievielfacher Punkt der Kurve der Ursprung ist; diese Gliedergruppe gleich Null gesetzt bestimmt das System der Tangenten im Ursprung.

Das erläuterte Verfahren ist auch auf transzendente Kurven anwendbar, sofern die Funktion $f(x, y)$, welche die linke Seite der auf Null reduzierten Kurvengleichung bildet, in einem Punkte x_0/y_0, welcher den Gleichungen $f = 0$, $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ zugleich genügt, die Taylorsche Entwicklung zuläßt.

Ist eine Kurve mit Hilfe eines Parameters u dargestellt, also in der Form

$$x = \varphi(u) \qquad y = \psi(u)$$

gegeben, dann hat die Prüfung auf singuläre Punkte mit der

Aufsuchung solcher Punkte x, y zu beginnen, welche mehreren verschiedenen Werten des Parameters u zugleich entsprechen; das weitere entscheidet die Untersuchung des Quotienten $\frac{\varphi'(u)}{\psi'(u)}$, welcher die Richtung der Tangente bestimmt, in dem betreffenden Punkte. (Vgl. **128**, 1) bis 4), **129**, 2).)

163. Beispiele. 1) Aus der Gleichung des Cartesischen Blattes

$$x^3 - 3\,axy + y^3 = 0$$

ist unmittelbar zu entnehmen, daß der Ursprung Doppelpunkt ist mit den Tangenten $x = 0$, $y = 0$; die Kurve bildet also dort einen Knoten, der die Koordinatenachsen zu Tangenten hat. (Vgl. **128**, 4) und Fig. 35; die drei Zweige der Kurve sind AOB, OCB, OD; der erste trifft mit dem zweiten in B, der zweite mit dem dritten in O zu einem gewöhnlichen Punkte zusammen.)

Daß die Kurve außerdem keinen anderen singulären Punkt hat, geht daraus hervor, daß die Gleichungen

$$x^3 - 3\,axy + y^3 = 0 \qquad 3\,x^2 - 3\,ay = 0 \qquad -3\,ax + 3\,y^2 = 0$$

außer $0/0$ keine andere gemeinsame Lösung besitzen.

2) Die Lemniskate

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

hat den Ursprung zum Doppelpunkt, und die Tangenten daselbst sind durch

$$x^2 - y^2 = 0$$

bestimmt; sie sind reell und einzeln durch

$$x - y = 0 \qquad x + y = 0$$

dargestellt; folglich ist der Ursprung Knotenpunkt und die Tangenten in ihm halbieren die Winkel der Koordinatenachsen (vgl. **129**, 2) und Fig. 37).

3) Die Zissoide

$$(x^2 + y^2)x = 2\,ay^2 \qquad (a > 0)$$

hat im Ursprung einen Doppelpunkt, die Tangenten in demselben sind durch

$$y^2 = 0$$

bestimmt, fallen also beide mit der Abszissenachse zusammen: da nur zu positiven Werten von x reelle Werte von y gehören, so ist der Doppelpunkt eine Spitze, und zwar eine der ersten Art, weil vermöge der Symmetrie der Kurve in bezug auf die Abszissenachse die beiden Äste zu verschiedenen Seiten der Tangente im Rückkehrpunkte liegen.

4) Die Kurve fünfter Ordnung, welche durch die Gleichung

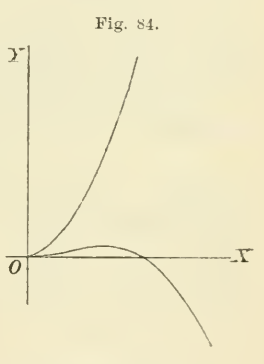
$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0$$

dargestellt ist, hat im Ursprung einen Doppelpunkt; denn nach Entwicklung der Potenz ist y^2 das Glied niedrigster Dimension. Die Gleichung

$$y^2 = 0$$

bestimmt die Tangenten, die beide wieder mit der Abszissenachse zusammenfallen. Man erkennt unmittelbar, daß zu negativen x kein reelles y gehört, wohl aber zu allen positiven, infolgedessen ist der Doppelpunkt eine Spitze. Die Auflösung

Fig. 84.



$$y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$$

läßt erkennen, daß es eine Spitze der zweiten Art ist; denn solange $0 < x < 1$, sind beide Werte von y positiv, liegen also beide Äste der Kurve über der Abszissenachse; erst bei $x = 1$ tritt der zum unteren Zeichen gehörige Ast unter die Abszissenachse, wo er dann verbleibt, während der andere beständig über ihr liegt. Der untere Ast hat an der Stelle $x = \frac{64}{225}$ einen Wendepunkt und erreicht bei $x = \frac{16}{25}$ seine größte Ordinate $y = \frac{256}{3125}$ (Fig. 84; man nennt eine Spitze zweiter Art auch Schnabelspitze).

5) Die Fußpunktkurve (129) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ in bezug auf den Mittelpunkt als Pol ist eine Kurve vierter Ordnung mit der Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Der Ursprung ist ein Doppelpunkt der Kurve und die Tangenten in demselben sind durch

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0$$

bestimmt; da die linke Seite eine Zerlegung in reelle lineare Faktoren nicht zuläßt, so ist der Doppelpunkt ein isolierter Punkt.

Die Entstehung dieses Punktes ist, solange man bloß die reellen Tangenten der Ellipse im Auge behält, geometrisch nicht zu erklären; nimmt man aber die imaginären Asymptoten der Ellipse als Tangenten in den unendlich fernen imaginären Punkten hinzu, so klärt sich das Auftreten des isolierten Punktes auf.*)

6) Die Kurve fünfter Ordnung

$$2\,y^5 - 5\,xy^2 + x^5 = 0$$

hat, da das Glied niedrigster Dimension vom dritten Grade ist, im Ursprung einen dreifachen Punkt; die Tangenten in demselben sind durch

$$xy^2 = 0$$

bestimmt, eine davon ist die Ordinatenachse, die zwei übrigen fallen in die Abszissenachse.

Über die Gestaltung der Kurve gibt die Einführung des Parameters u mittels der Gleichung

$$y = ux$$

bequemsten Aufschluß; man erhält so die Darstellung:

$$x^2 = \frac{5\,u^2}{2\,u^5 + 1}$$

$$y^2 = \frac{5\,u^4}{2\,u^5 + 1},$$

*) Wenn man die in 140 zur Bestimmung der Asymptoten einer algebraischen Kurve vorgeschriebene Rechnung durchführt, so erhält man für die Ellipse die beiden imaginären Asymptoten

$$y = \pm \frac{b}{a}\,ix$$

und für die durch den Ursprung zu ihnen gelegten, ebenfalls imaginären Lote die korrespondierenden Gleichungen

$$y = \pm \frac{a}{b}\,ix;$$

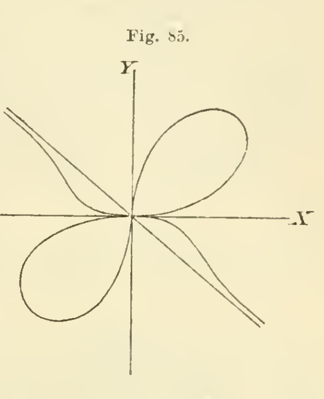
in der Tat ist nun

$$x = 0, \qquad y = 0$$

der gemeinsame Fußpunkt dieser Lote und daher ein Punkt der Kurve.

aus welcher die zentrale Symmetrie der Kurve hervorgeht. In dem Intervalle $(0, +\infty)$ von u bleiben x, y endlich und ihre Werte beginnen und enden mit $0/0$; die Kurve beschreibt also im ersten und dritten Quadranten je eine Schleife. In dem Intervalle $\left(0, -\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)$ sind x, y reell, beginnen mit $0/0$ und enden mit unendlichen Werten; die Kurve hat die Gerade $y = -\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\, x$, welche mit der positiven Abszissenachse den negativen Winkel von $41^0\, 2, 4' \ldots$ einschließt, zur Asymptote. In dem Intervalle $\left(-\sqrt[5]{\frac{1}{2}}, -\infty\right)$ bleiben x, y imaginär (Fig. 85).

Fig. 85.



7) Man prüfe folgende Kurven auf singuläre Punkte:

$$\alpha)\ (x^2 + y^2)(x - a)^2 - b^2x^2 = 0$$
$$\beta)\ x^4 - 2ay^3 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$$
$$\gamma)\ ay^2 = (x - a)^2(x - b)$$
$$\delta)\ x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = 0.$$

164. Endpunkt und Eckpunkt. Bei transzendenten Kurven können neben den bisher besprochenen noch andere Singularitäten auftreten, deren algebraische Kurven nicht fähig sind. Erscheinungen solcher Art sind der *Endpunkt* und die *Ecke.*

Als Endpunkt bezeichnet man einen Punkt, in welchem die Kurve abbricht. Bei einer algebraischen Kurve tritt ein solcher Punkt nie auf, weil dort, wo ein Zweig derselben endet, notwendig ein zweiter enden muß, wodurch eine Spitze sich ausbildet.

Als Eckpunkt bezeichnet man einen Punkt, in welchem zwei Äste enden und voneinander verschiedene Tangenten daselbst besitzen. Der analytische Grund, weshalb diese Erscheinung bei einer algebraischen Kurve nicht auftreten kann, ist nach den Ausführungen in **161** der nämliche, welcher für die

Unmöglichkeit eines Endpunktes bei einer solchen Kurve erkannt worden ist.

In einem Endpunkte kann nur von einem einseitigen Differentialquotienten der Ordinate die Rede sein, in einem Eckpunkte muß zwischen dem vorwärts und rückwärts genommenen Differentialquotienten unterschieden werden (20).

Beispiele. 1) Bei der transzendenten Kurve

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

ist die Ordinate im Ursprung nicht definiert; da jedoch

$$\lim_{x=-0} e^{\frac{1}{x}} = 0 \qquad \lim_{x=+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

ist, so nimmt man an, der zu negativen Abszissen gehörige Kurvenast entspringe im Ursprung; der zu positiven Abszissen gehörige Ast dagegen hat die Ordinatenachse zur Asymptote. Hiernach hat der erstgenannte Ast im Ursprung einen Endpunkt; die Tangente in diesem Punkte ergibt sich mittels

$$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}};$$

da (110) $\lim\limits_{x=-0} y' = 0$, so fällt sie mit der Abszissenachse zusammen.

Weil ferner $\lim\limits_{x=\pm\infty} y = 1$, so ist die Gerade $y = 1$ Asymptote für beide Kurvenäste.

Der linke Ast hat, wie man aus

$$y'' = \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

erkennt, an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ einen Wendepunkt (Fig. 86).

2) Bei der transzendenten Kurve

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

ist die Ordinate im Ursprung gleichfalls nicht definiert; es ist aber

$$\lim_{x=\pm 0} y = 0$$

und daher nimmt man an, daß sowohl der Ast mit negativen, wie der mit positiven Abszissen im Ursprung beginnt.

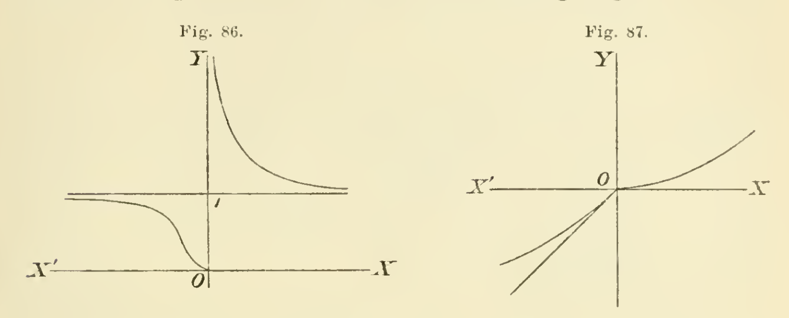


Fig. 86. Fig. 87.

Die Richtung der Tangenten an diese Äste ergibt sich ohne Zuhilfenahme des Differentialquotienten direkt durch Untersuchung von

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$$

und da $\lim\limits_{x=-0} \frac{y}{x} = 1$, $\lim\limits_{x=+0} \frac{y}{x} = 0$, so hat der erstgenannte Ast die Halbierungslinie des Winkels $X'OY'$, der andere die Abszissenachse zur Tangente; die Kurve bildet daher im Ursprung eine Ecke mit dem stumpfen Winkel von 135^0 (Fig. 87).

§ 8. **Einhüllende Kurven.**

165. Begriff und analytische Bestimmung der Einhüllenden. Es sei $f(x, y, u)$ eine eindeutige stetige Funktion der Argumente x, y, u; die Gleichung

$$f(x, y, u) = 0 \tag{1}$$

stellt dann ein einfach unendliches System oder eine Schar ebener Kurven oder ein *Kurvenkontinuum* dar; mit der Festsetzung eines besonderen Wertes für u wird ein Element des Kontinuums oder eine Kurve der Schar herausgehoben.

Wir nehmen zunächst an, die Gleichung (1) sei algebraisch sowohl in bezug auf x, y wie in bezug auf den Parameter u und bezüglich des letzteren vom Grade p. Erteilt man x, y besondere Werte x_0, y_0 und löst die Gleichung

$$f(x_0, y_0, u) = 0$$

nach u auf, so erhält man die Parameter jener Kurven des Systems, welche durch den Punkt x_0/y_0 gehen; ist die Zahl der reellen unter diesen Kurven $q\,(\leqq p)$, so sagt man, die Ebene werde durch das Kurvensystem im Punkte x_0/y_0 q-fach bedeckt. Ist die Bedeckung in allen Punkten der Ebene gleich vielfältig, so bedeckt das Kurvensystem die Ebene gleichförmig.

Wenn dagegen die Multiplizität der Bedeckung wechselt, so teilt sich die Ebene in Regionen, die durch Kurven voneinander geschieden werden; und diese Kurven sind es, welche uns nun beschäftigen werden.

Bei dem Übergange von einer Region zur benachbarten ändert sich die Zahl der reellen Wurzeln u, und da bei einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten immer gleichzeitig zwei Wurzeln aus dem reellen ins komplexe Gebiet oder umgekehrt übergehen und im Augenblicke des Überganges reell und gleich werden, so unterscheiden sich die Multiplizitätsfaktoren der Bedeckung zweier benachbarten Regionen um eine gerade Zahl und werden an der Begrenzung der Regionen mindestens zwei Wurzeln der Gleichung (1) einander gleich.

Daraus geht schon hervor, daß man, um die Grenzlinien der Gebiete zu erhalten, nur die Bedingung aufzustellen hat, unter welcher die Gleichung (1) nach u aufgelöst mehrfache Wurzeln ergibt; diese Bedingung erhält man aber, wenn man zwischen den beiden Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x, y, u) = 0 \\ f'_u(x, y, u) = 0 \end{cases}$$

u eliminiert; das Resultat dieser Elimination wird Diskriminante der Gleichung (1) in bezug auf u genannt und soll symbolisch durch

$$(3) \qquad \mathrm{Dskr}_u f(x, y, u) = 0$$

dargestellt werden. Man kann sich dasselbe auch durch die erste der beiden Gleichungen (2) vertreten denken, wenn darin für u jene Funktion von x, y gesetzt wird, welche die Auflösung der zweiten Gleichung liefert.

Im Sinne dieser Ableitung ist die Gleichung (3) der Ort solcher Punkte der Ebene, für welche die Gleichung (1) eine mehrfache Wurzel für u ergibt. Solche Punkte sind aber auch

die mehrfachen Punkte der Kurven des Systems; denn da durch einen solchen Punkt eine und dieselbe Kurve des Systems mehrere Male hindurchgeht, so gibt für ihn die Gleichung (1) notwendig mehrere gleiche Lösungen in bezug auf u.

Wenn also die Kurven des Systems mehrfache Punkte besitzen, so ist der geometrische Ort dieser Punkte mit in dem geometrischen Gebilde enthalten, welches die Gleichung (3) darstellt, unter Umständen bedeutet die Gleichung (3) diesen Ort allein.

Um die volle Bedeutung dieser Gleichung, damit zugleich ihren Inhalt für den Fall kennen zu lernen, wenn die Kurven des Systems singuläre Punkte nicht aufweisen, gehen wir auf den geometrischen Sinn der Gleichungen (2) näher ein.

Bei feststehendem u stellt die erste eine spezielle Kurve des Systems vor. Die linke Seite der zweiten Gleichung ist der Grenzwert des Quotienten

$$\frac{f(x, y, u+h) - f(x, y, u)}{h}$$

für lim h = 0; nun bestimmen die beiden Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} (fx, y, u) = 0 \\ f(x, y, u+h) = 0 \end{cases}$$

zusammen die Schnittpunkte der Kurve u mit jener $u + h$, und

$$(5) \qquad f(x, y, u+h) - f(x, y, u) = 0$$

ist die Gleichung einer dritten Kurve, welche auch durch diese Schnittpunkte geht und daher, soweit es sich um diese handelt, statt der zweiten Gleichung in (4) genommen werden kann; vermöge **38** aber kann (5) weiter ersetzt werden durch

$$h f'_u(x, y, u + \theta h) = 0$$

oder schließlich durch

$$(5^*) \qquad f'_u(x, y, u + \theta h) = 0,$$

wobei θ einen positiven echten Bruch bedeutet. Demnach sind die Schnittpunkte der beiden Kurven (4) des Systems durch das Gleichungspaar

$$f(x, y, u) = 0$$
$$f'_u(x, y, u + \theta h) = 0$$

bestimmt. Hält man die erste Kurve fest und läßt die zweite sich ihr unaufhörlich nähern, indem man h zur Grenze Null

führt, so bewegen sich die Schnittpunkte auf der ersten Kurve im allgemeinen gegen gewisse Grenzlagen hin, und diese *Grenzpunkte* oder *letzten Schnittpunkte* auf der Kurve u sind durch die Gleichungen

$$f(x, y, u) = 0$$
$$f'_u(x, y, u) = 0$$

bestimmt. Der Ort dieser Grenzpunkte, durch diese selben Gleichungen, jedoch bei variablem u dargestellt, ist eine Kurve, welche man als *Einhüllende* oder *Enveloppe**) des Kurvensystems (1) bezeichnet, während man die Kurven dieses Systems die *Eingehüllten* nennt.

Damit ist der volle Inhalt der Gleichung (3), wenn sie ein geometrisches Gebilde vertritt, erkannt: dieses Gebilde setzt sich zusammen aus dem Orte mehrfacher Punkte der Kurven des Systems und aus ihrer Einhüllenden, oder es bedeutet auch nur das eine oder nur das andere. Die Entscheidung darüber, welcher von diesen Fällen zutrifft, wird sich aus einem Satze des nächsten Artikels ergeben.

Vorher mögen noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden.

Die Ergebnisse beschränken sich nicht nur auf den Fall algebraischer Gleichungen, sie gelten, sobald $f(x, y, u)$ und die in Betracht gekommenen Ableitungen dieser Funktion stetig sind in einem Bereiche, welchem die Punkte der Kurven angehören.

Dem Sinne der Herleitung gemäß existiert eine Kurve (3) nur dann, wenn die Gleichung (1) in bezug auf den Parameter u zum mindesten vom zweiten Grade ist, die Ebene also durch die Kurvenschar im allgemeinen wenigstens doppelt bedeckt wird. Tritt u linear auf, so daß (1) die Gestalt erhält:

$$\varphi(x, y) + u\psi(x, y) = 0, \tag{6}$$

so ergibt die Differentiation nach u

$$\psi(x, y) = 0$$

*) Von G. Monge herstammende Bezeichnung. Vgl. die durch Liouville 1850 besorgte Ausgabe seiner „Application de l'Analyse à la Géométrie", p. 30.

und dies hat weiter auch

$$\varphi(x, y) = 0$$

zur Folge; die beiden letzten Gleichungen bestimmen eine Anzahl von Punkten und durch diese Punkte gehen alle Kurven des Systems (6); diese Punkte vertreten also das Gebilde (3). In der Tat bilden die Kurven (6) ein Büschel, das die Ebene durchaus einfach und nur in den genannten Punkten mehrfach, und zwar unendlich vielfach, bedeckt.

Haben die Kurven (1) keine singulären Punkte, so bedeutet (3) nur die Einhüllende. Dies ist insbesondere der Fall, wenn (1) ein System von Geraden ist.

Man kann die Gleichungen (2) auch als analytische Bestimmung des Gebildes (3) ansehen, indem man x, y als Funktionen von u auffaßt; dann ergeben sich zur Bestimmung des Richtungskoeffizienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$$

der Tangente in einem Punkte dieses Gebildes die Gleichungen:

$$f'_u + f'_x \frac{dx}{du} + f'_y \frac{dy}{du} = 0$$

$$f''_{u^2} + f''_{ux} \frac{dx}{du} + f''_{uy} \frac{dy}{du} = 0,$$

deren erste sich vermöge der zweiten Gleichung in (2) reduziert, so daß man schließlich zu dem gedachten Zwecke die Gleichungen hat:

$$f'_x \frac{dx}{du} + f'_y \frac{dy}{du} = 0$$

$$f''_{ux} \frac{dx}{du} + f''_{uy} \frac{dy}{du} = -f''_{u^2};$$

diese aber geben eine Bestimmung für $\frac{dx}{du}$ und $\frac{dy}{du}$ nur dann, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ f''_{ux} & f''_{uy} \end{vmatrix} \tag{7}$$

nicht identisch Null ist.

166. Beziehung zwischen der Einhüllenden und den Eingehüllten. Die Einhüllende steht zu den Eingehüllten in

einer geometrischen Beziehung, welche sich in folgendem Satze ausspricht: *Die Einhüllende berührt jede Eingehüllte in deren Grenzpunkten.*

Für einen Punkt x/y der Kurve u des Systems ergibt sich der Richtungskoeffizient der Tangente aus der Gleichung

$$f'_x + f'_y \frac{dy}{dx} = 0; \tag{8}$$

ist der Punkt Grenzpunkt, so gehört er auch der Einhüllenden an, erfüllt die Gleichung $f'_u = 0$, und der Richtungskoeffizient der Tangente an die Einhüllende in ihm folgt nach der unter (3) gemachten Bemerkung aus der Gleichung

$$f'_x + f'_y \frac{dy}{dx} + f'_u \left(\frac{du}{dx}\right) = 0, \tag{9}$$

in welcher $\left(\frac{du}{dx}\right)$ den vollständigen Differentialquotienten von u, das jetzt Funktion von x, y ist, in bezug auf x bedeutet; vermöge $f'_u = 0$ aber fällt die Gleichung (9) mit (8) und infolgedessen auch im Grenzpunkte x/y die Tangente an die Einhüllende mit der Tangente an die Eingehüllte zusammen.

Zwischen der Ortskurve der mehrfachen Punkte und den Kurven des Systems findet Berührung im allgemeinen nicht statt; nur ausnahmsweise kann jene Ortskurve auch Einhüllende sein.

Sind die Linien des Systems (1) Gerade, so bilden sie die Tangenten der Einhüllenden. Die Evolute einer Kurve kann hiernach auch als die Einhüllende der Normalen erklärt werden (**156**).

167. Fall zweier voneinander abhängigen Parameter. Enthält die Gleichung des Kurvensystems zwei Parameter u, v, so daß sie die Form

$$f(x, y, u, v) = 0 \tag{10}$$

hat, und besteht zwischen den Parametern eine Gleichung

$$\varphi(u, v) = 0, \tag{11}$$

so kann man, wenn es nicht leicht angeht, den einen Parameter mittels (11) durch den anderen auszudrücken und aus (10) zu beseitigen, den folgenden Weg einschlagen.

Man betrachte u als den unabhängigen Parameter; dann gibt die Differentation von (10) nach ihm das Resultat:

$$f_u' + f_v' \frac{dv}{du} = 0;$$

der Differentialquotient $\frac{dv}{du}$ aber ergibt sich mittels (11) aus

$$\varphi_u' + \varphi_v' \frac{dv}{du} = 0;$$

vollzieht man seine Elimination, so kommt die Gleichung

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} f_u' & f_v' \\ \varphi_u' & \varphi_v' \end{vmatrix} = 0$$

zustande. Die Elimination von u, v zwischen den drei Gleichungen (10), (11), (12) liefert das durch (3) bezeichnete Gebilde.

Ähnlich hätte man vorzugehen, wenn n durch $n-1$ Gleichungen verbundene Parameter vorhanden wären.

168. Beispiele. 1) Die Evolute der Parabel $y^2 = 2px$ als Einhüllende der Normalen ergibt sich in folgender Weise. Die Gleichung der Normale im Punkte x/y

$$\eta - y = -\frac{y}{p}(\xi - x),$$

auf die Form

$$y^3 - 2p(\xi - p)y - 2p^2\eta = 0$$

gebracht, enthält nur den Parameter y; bildet man die Diskriminante in bezug auf diesen, so entsteht

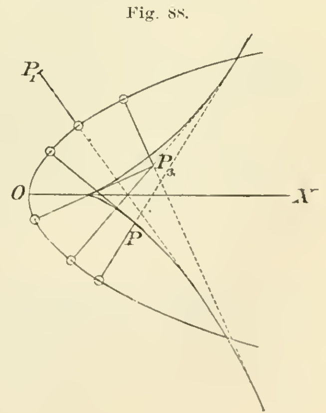
$$-\frac{8p^3}{27}(\xi - p)^3 + p^4\eta^2 = 0$$

oder

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3$$

als Gleichung der Evolute (157, 1)). Die Evolute teilt die Ebene in zwei Gebiete, wovon das eine, dem der Punkt P_3 (Fig. 88) angehört, durch die Normalen der Parabel dreifach, das andere, in welchem

Fig. 88.



P_1 liegt, einfach bedeckt wird; in den Punkten P der Evolute selbst findet dreifache Bedeckung statt, jedoch so, daß zwei der Normalen in eine zusammenfallen.

2) Eine Strecke AB (Fig. 89) von konstanter Länge a gleitet mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels; es ist ihre Einhüllende zu bestimmen.

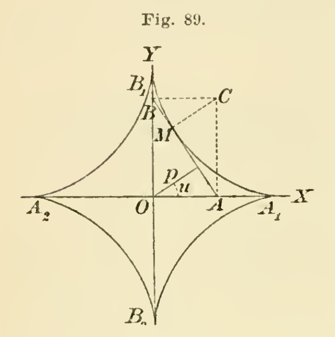


Fig. 89.

Macht man die Schenkel des rechten Winkels zu Koordinatenachsen, bezeichnet mit p die Länge des aus O auf AB gefällten Lotes und mit u seinen Neigungswinkel gegen OX, so ist

$$x \cos u + y \sin u - p = 0$$

die Gleichung der Geraden AB; da aber $p = OA \cos u = a \sin u \cos u$, so nimmt diese Gleichung, wenn alle Bedingungen der Aufgabe ausgedrückt werden, die endgültige Form

$$x \cos u + y \sin u - a \sin u \cos u = 0$$

an. Differentiiert man sie in bezug auf den Parameter, so entsteht:

$$-x \sin u + y \cos u - a(\cos^2 u - \sin^2 u) = 0$$

und diese Gleichung stellt wieder eine Gerade dar, welche die AB im Grenzpunkte schneidet; schreibt man sie in der Gestalt

$$-(x - a \sin u) \sin u + (y - a \cos u) \cos u = 0,$$

so erkennt man, daß diese Gerade auf AB normal steht und durch den Punkt C geht, welcher die vierte Ecke des über AOB verzeichneten Rechtecks bildet.

Löst man die beiden vorhandenen Gleichungen nach x, y auf, so kommt

$$x = a \sin^3 u$$

$$y = a \cos^3 u;$$

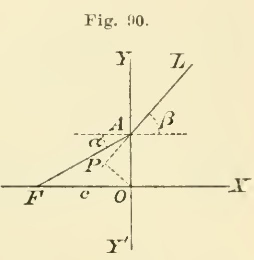
zum Zwecke der Elimination von u erhebe man beides zur Potenz $\frac{2}{3}$ und bilde die Summe; dadurch entsteht

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \tag{13}$$

als Gleichung der Einhüllenden. Dieselbe ist eine Kurve sechster Ordnung (157, 2)) mit vier vom Ursprung um a abstehenden Spitzen in den Koordinatenachsen und führt den Namen *Astroide.*

3) Die von einem leuchtenden Punkte F (Fig. 90) ausgehenden Strahlen werden an der Trennungslinie YY' zweier heterogenen Medien gebrochen; es ist die Einhüllende der gebrochenen Strahlen zu bestimmen.

Fig. 90.



Als Abszissenachse diene die Senkrechte zu YY' durch den Punkt F; der Einfallswinkel des Strahles FA heiße α, der Brechungswinkel β, der Brechungsexponent bei dem Übergange vom Medium links zu jenem rechts von YY' sei n; dann ist

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n.$$

Die Gleichung des gebrochenen Strahls in der Hesseschen Normalform, $FO = c$ gesetzt, lautet:

$$x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) + y\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) - c\operatorname{tg}\alpha\cos\beta = 0$$

und mit Rücksicht auf obige Gleichung ausgeführt:

$$-x\sin\beta + y\cos\beta - \frac{nc\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1-n^2\sin^2\beta}} = 0.$$

Differentiiert man sie in bezug auf β, so entsteht

$$-x\cos\beta - y\sin\beta - \frac{nc(\cos^2\beta - \sin^2\beta + n^2\sin^4\beta)}{(1-n^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Durch Auflösung beider Gleichungen in bezug auf x, y ergibt sich

$$x = -\frac{nc\cos^3\beta}{(1-n^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y = \frac{nc(1-n^2)\sin^3\beta}{(1-n^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

und hieraus folgt zunächst

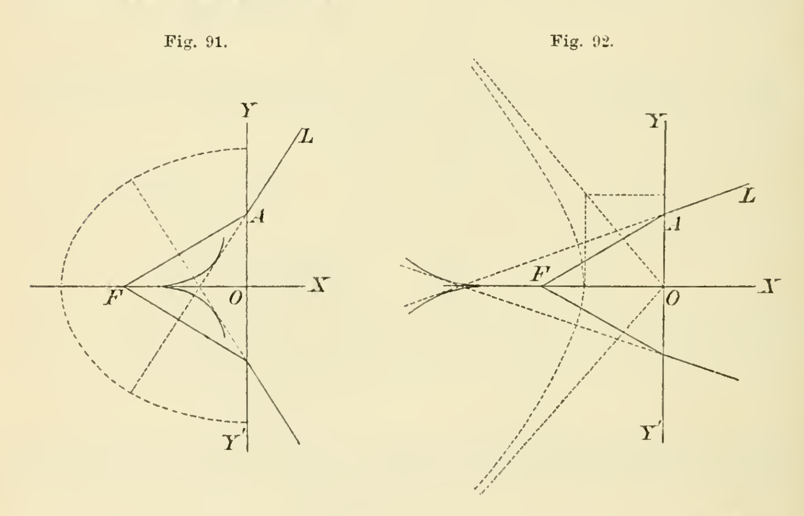
$$\frac{x}{nc} = -\frac{\cos^3\beta}{(1-n^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\sqrt{1-n^2}\,y}{nc} = \frac{(1-n^2)^{\frac{3}{2}}\sin^3\beta}{(1-n^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}};$$

erhebt man beides auf die Potenz $\frac{2}{3}$, so findet sich durch Summierung als Gleichung der Einhüllenden:

$$\left(\frac{x}{nc}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\sqrt{1-n^2}\,y}{nc}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Diese Linie ist also für $n < 1$ die Evolute einer gewissen Ellipse, die gebrochenen Strahlen sind Normalen dieser Ellipse; für $n > 1$ ist sie die Evolute einer Hyperbel, zu der die gebrochenen Strahlen daher normal sind (157, 2)); der leuchtende Punkt ist jedesmal ein Brennpunkt des betreffenden Kegelschnitts. Die Figuren 91 und 92 bringen die Fälle $n = \frac{2}{3}$ und $n = \frac{3}{2}$ zur Anschauung. Die Einhüllende führt hier den Namen *katakaustische Linie.*



4) Aus den Punkten einer gegebenen Parabel als Mittelpunkten werden Kreise beschrieben, welche durch den Scheitel der Parabel gehen; es soll die Einhüllende dieser Kreise bestimmt werden.

Ist $y^2 + 4ax = 0$ die Gleichung der gegebenen Parabel und bezeichnet man die Koordinaten des Mittelpunktes eines der Kreise mit α, β, so ist die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0,$$

wobei jedoch

$$\beta^2 + 4a\alpha = 0$$

sein muß. Differentiiert man beide Gleichungen nach α, so entsteht:

$$x + y\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

$$2a + \beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

und hieraus durch Elimination des Differentialquotienten:

$$\beta x - 2ay = 0;$$

die schließliche Elimination von α, β zwischen dieser und den beiden ersten Gleichungen gibt als Einhüllende:

$$(x^2 + y^2)x = 2ay^2,$$

also die Zissoide (**128**, 3) und **129**, 1)); es ist leicht, den Zusammenhang dieser Zissoide mit derjenigen nachzuweisen, welche sich als Fußpunktkurve der nämlichen Parabel in bezug auf den Scheitel als Pol ergibt.

5) Über den zu einer festen Richtung parallelen Sehnen eines gegebenen Kreises als Durchmessern werden Kreise beschrieben; es ist die Einhüllende derselben zu bestimmen.

Wählt man den Mittelpunkt des Kreises zum Ursprung und den zu den Sehnen konjugierten Durchmesser zur Abszissenachse, so hat ein Kreis des Systems die Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = \beta^2,$$

wobei

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

wenn r der Halbmesser des gegebenen Kreises ist. Eliminiert man aus der ersten Gleichung β mit Hilfe der zweiten, so lautet jene:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2\alpha^2 - r^2 = 0$$

und enthält nur mehr einen Parameter; differentiiert man nach demselben, so ergibt sich

$$x = 2\alpha;$$

dies ist die Gleichung einer zur Ordinatenachse parallelen Geraden, welche die Grenzpunkte aus dem Kreise, also seine Berührungspunkte mit der Einhüllenden ausschneidet; die

Gleichung der letzteren erhält man durch Elimination von α zwischen den beiden letzten Gleichungen, sie lautet:

$$\frac{x^2}{2r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

und stellt eine Ellipse dar, welche den in der Ordinatenachse liegenden Durchmesser des gegebenen Kreises zur kleinen Achse und die Endpunkte des dazu senkrechten Durchmessers zu Brennpunkten hat.

Aber nicht alle Kreise des Systems stehen mit der Ellipse in reeller Berührung; dies findet nur so lange statt, als die Gerade $x = 2\alpha$ den Kreis schneidet, solange also

$$2\alpha \leqq \alpha + \beta$$

oder

$$\alpha^2 \leqq r^2 - \alpha^2$$

oder schließlich

$$|\alpha| < \frac{r}{\sqrt{2}};$$

der kleinste wirklich berührende Kreis hat demnach die Mittelpunktsabszisse $\frac{r}{\sqrt{2}}$ und den Radius $\frac{r}{\sqrt{2}}$; alle kleineren Kreise haben mit der Ellipse nur ideelle Doppelberührung; die kleinsten unter diesen sind die Nullkreise um die Brennpunkte.

6) Es ist die Einhüllende des Kurvensystems

$$x^3 + (x + a)(y - u)^2 - ax^2 = 0$$

zu bestimmen, wenn u der veränderliche Parameter ist.

Wenn man nach diesem differentiiert, so entsteht

$$(x + a)(y - u) = 0,$$

und wenn man mit Hilfe dessen u aus obiger Gleichung eliminiert, so ergibt sich das Gebilde

$$x^2(x - a) = 0,$$

das aus der doppelt gelegten Ordinatenachse und aus der Geraden

$$x = a$$

besteht.

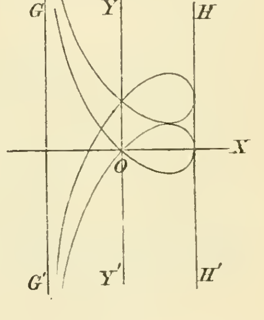
Bezeichnet man die linke Seite der vorgelegten Gleichung mit $f(x, y, u)$, so ist

$$f'_u = -2(x+a)(y-u)$$
$$f'_x = 3x^2 + (y-u)^2 - 2ax$$
$$f'_y = 2(x+a)(y-u)$$
$$f''_{ux} = -2(y-u)$$
$$f''_{uy} = -2(x+a);$$

für $y = u$, $x = 0$ verschwindet die Determinante 165, (7) identisch, es verschwinden aber auch f_x', f_y'; daher ist die Ordinatenachse nicht Einhüllende, sondern Ortslinie von mehrfachen Punkten. Für $y = u$, $x = a$ hingegen sind f_x', f_y' nicht gleichzeitig Null, die Gerade $x = a$ ist somit Einhüllende.

Die vorgelegte Gleichung stellt ein System von Strophoiden (128, 2)) dar, welche sich nur durch ihre Lage gegen die Abszissenachse unterscheiden (Fig. 93); GG' ist ihre gemeinsame Asymptote, YY' der Ort ihrer Doppelpunkte und HH' die Einhüllende.

Fig. 93.



7) Die Einhüllende der Bahnen zu bestimmen, die ein Punkt beschreibt, wenn er von O aus unter verschiedenen Elevationen mit gegebener Geschwindigkeit v geworfen wird.

8) Es ist die Einhüllende der Kurven

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$$

zu bestimmen, deren Parameter a, b der Gleichung genügen:

$$a^n + b^n = c^n.$$

9) Die Einhüllende (Hüllbahn) eines festen Kreisdurchmessers beim Abrollen des Kreises auf einer festen Geraden zu ermitteln.

10) Zu den Normalen der Parabel $y^2 = 2px$ werden in den Punkten, wo sie die Abszissenachse schneiden, Lote errichtet; es ist die Einhüllende dieser Lote zu suchen und zu konstruieren.

B. Raumkurven und krumme Flächen.

§ 1. Tangente und Normalebene einer Raumkurve. Die erste Krümmung oder Flexion.

169. Analytische Darstellung der Raumkurven. Sind die veränderlichen rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes M im Raume als eindeutige stetige Funktionen einer Hilfsvariablen, des Parameters, u gegeben:

$$x = x(u) \qquad y = y(u) \qquad z = z(u), \tag{1}$$

so beschreibt, während u seinen Bereich stetig durchläuft, der Punkt M eine *Kurve im Raume*, sofern nicht eine der drei Funktionen beständig den Wert Null hat; in letzterem Falle würde in einer der Koordinatenebenen eine Kurve beschrieben werden. Von den Funktionen $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ setzen wir weiter noch voraus, daß sie bis zu Gliedern der jeweilen erforderlichen Ordnung nach der Taylorschen Formel entwickelbar seien.

Besteht zwischen den drei Funktionen eine lineare Beziehung mit konstanten Koeffizienten

$$Ax(u) + By(u) + Cz(u) + D \equiv 0,$$

so liegen alle Punkte der Kurve in einer Ebene, die Kurve ist eine Plankurve; findet eine derartige Beziehung nicht statt, so heißt die Kurve eine *Raumkurve*.

Zwei von den Gleichungen (1) für sich betrachtet (127), z. B.

$$y = y(u), \qquad z = z(u),$$

bestimmen eine Kurve in der yz-Ebene; dieselbe wird gleichzeitig mit der Raumkurve von dem Fußpunkte des Lotes aus M auf die yz-Ebene beschrieben, ist also die *Projektion* der Raumkurve auf dieser Ebene. Diese Projektion kann, wenn man u eliminiert, auch durch *eine* Gleichung der Form $\varphi(y, z) = 0$ dargestellt werden; verfährt man mit den anderen Paaren aus (1) ebenso, so ergeben sich drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(y, z) &= 0 \\ \psi(z, x) &= 0 \\ \chi(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

welche die drei Projektionen der Raumkurve bestimmen; zur Charakterisierung der Raumkurve reichen *zwei* von diesen Gleichungen hin, die dritte ist jedesmal eine Folge der beiden anderen. Dies stimmt mit der geometrischen Tatsache überein, daß eine Linie im Raume durch zwei Projektionen (auf nicht parallele Ebenen) bestimmt ist. Jede dieser drei Gleichungen kann aber auch als Gleichung des zur betreffenden Koordinatenebene normalen projizierenden Zylinders aufgefaßt werden und in diesem Sinne bestimmt das Gleichungspaar

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi(x, z) = 0 \\ \varphi(y, z) = 0 \end{cases}$$

die Kurve als Durchschnitt zweier Zylinder, wovon der eine parallel zur y-Achse, der andere parallel zur x-Achse ist.

Die Gleichungen (2) können aber so angesehen werden, als wären sie hervorgegangen aus zwei Gleichungen von der Form:

$$(3) \qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

indem einmal y, ein zweites Mal x eliminiert wurde; jede dieser Gleichungen bestimmt z als Funktion von x, y und repräsentiert eine Fläche (45); die Raumkurve erscheint so als Durchschnitt zweier Flächen im allgemeinen gegeben.

Beispiele. 1) Ein Punkt rotiere gleichförmig um eine feste Gerade und führe gleichzeitig eine gleichförmige fortschreitende Bewegung in der Richtung jener Geraden aus. Die von dem Punkte beschriebene Raumkurve heißt *Schraubenlinie* oder *Helix* schlechtweg.

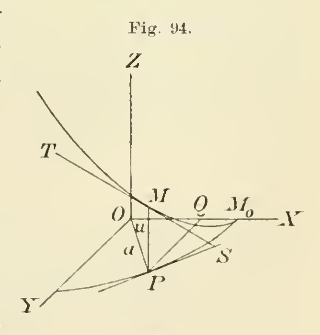


Fig. 94.

Wird die feste Gerade zur z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems genommen und die x-Achse durch eine Lage M_0 (Fig. 94) des beweglichen Punktes gelegt, dessen Abstand von der festen Geraden $= a$ sei; so ist für eine neue Lage M, welche aus M_0 durch Rotation um den Winkel u und durch eine fortschreitende Bewegung von der Größe z hervorging,

$$\frac{z}{au} = k,$$

wo k eine Konstante bedeutet; auf Grund dessen sind

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= a \cos u \\ y &= a \sin u \\ z &= bu \end{aligned}$$

die Gleichungen der Kurve, wobei $b = ka$ gesetzt wurde. Das dem Werte $u = 2\pi$ entsprechende z heißt die *Ganghöhe* der Schraubenlinie; ihr Ausdruck ist also $2\pi b$.

Durch Elimination von u zwischen je zweien der Gleichungen (4) erhält man:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ x &= a \cos \frac{z}{b} \\ y &= a \sin \frac{z}{b}; \end{aligned}$$

die Projektion der Kurve auf der xy-Ebene ist ein Kreis; die Kurve liegt auf einem Kreiszylinder, welcher als Schraubenzylinder bezeichnet wird. Die beiden anderen Projektionen sind kongruente transzendente Kurven.

2) Das Gleichungspaar

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4a^2 \\ x^2 + y^2 &= 2ax \end{aligned}$$

bestimmt eine Raumkurve als Durchschnitt einer Kugel mit einem Kreiszylinder. Die zweite dieser Gleichungen gibt zugleich deren Projektion auf der xy-Ebene. Für die beiden anderen Projektionen erhält man durch Elimination von x, bzw. y die Gleichungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} z^4 = 4a^2(z^2 - y^2) \\ z^2 + 2a(x - 2a) = 0; \end{cases}$$

die erste gehört zu einer Kurve 4. Ordnung, welche im Ursprung einen Knotenpunkt mit den Tangenten $z + y = 0$, $z - y = 0$ hat und symmetrisch ist zu beiden Achsen (Fig. 95a); die zweite entspricht einer Parabel (Fig. 95b)*).

*) Von der Parabel hat nur der innerhalb des Kreises enthaltene Teil reelle Bedeutung; der übrige Teil heißt *parasitisch*.

170. Die Tangente. Auf einer Raumkurve sei ein Punkt M mit dem Parameterwerte u und den Koordinaten $x/y/z$ gegeben; es werde auf ihr ein zweiter Punkt M angenommen, dem der Parameterwert $u+h$ zugehört; seine

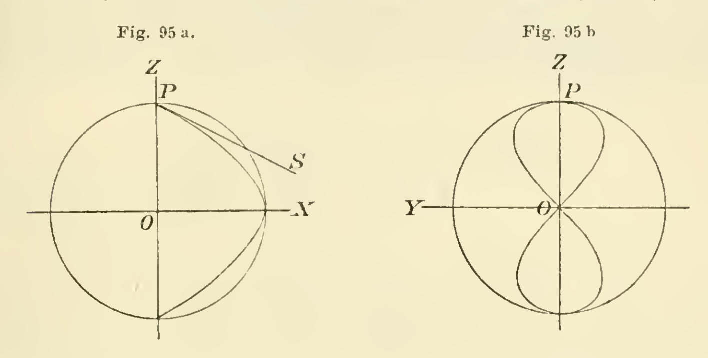


Fig. 95 a. Fig. 95 b

Koordinaten seien $x+\Delta x/y+\Delta y/z+\Delta z$. Durch die beiden Punkte ist eine Gerade bestimmt, deren Gleichungen lauten:

$$\frac{\xi - x}{\Delta x} = \frac{\eta - y}{\Delta y} = \frac{\zeta - z}{\Delta z};$$

die Kosinus der Winkel, welche die Richtung MM' in dieser Geraden mit den positiven Achsenrichtungen bildet, sind durch die Quotienten

$$\frac{\Delta x}{c}, \quad \frac{\Delta y}{c}, \quad \frac{\Delta z}{c}$$

bestimmt, wobei

$$c = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

und die Wurzel positiv zu nehmen ist, wenn die Punktfolge M, M' dem Wachsen des u entspricht. Mit stetig gegen Null abnehmendem h, also bei beständiger Annäherung des Punktes M' an den Punkt M, konvergieren diese Kosinus gegen bestimmte Grenzen, und zwar ist

$$\lim \frac{\Delta x}{c} = \lim_{h=0} \frac{\frac{\Delta x}{h}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{h}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{dx}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}}$$

und ähnlich die beiden anderen. Dadurch ist also eine Grenzlage der durch M und einen zweiten Punkt der Kurve gelegten Geraden bestimmt, welche man als *Tangente* der Kurve im Punkte M definiert. Werden die Winkel, welche die dem wachsenden u entsprechende Richtung der Tangente mit den positiven Achsenrichtungen bildet, mit α, β, γ bezeichnet, so ist hiernach:

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\frac{dx}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}\\
\cos\beta &= \frac{\frac{dy}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}\\
\cos\gamma &= \frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2}}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

und es lauten die *Gleichungen der Tangente:*

$$\frac{\xi-x}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z}{\cos\gamma}$$

oder

$$\frac{\xi-x}{\frac{dx}{du}}=\frac{\eta-y}{\frac{dy}{du}}=\frac{\zeta-z}{\frac{dz}{du}}. \tag{7}$$

Die Formeln (6) und die Gleichungen (7) sind unmittelbar anwendbar, wenn die Kurve parametrisch dargestellt ist. Um auch die anderen Darstellungsformen einzubeziehen, führe man an Stelle der Differentialquotienten Differentiale ein, was in (6) durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit du erfolgt; dann hat man:

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\\
\cos\beta &= \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\\
\cos\gamma &= \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}
\end{aligned}
\tag{6*}
$$

und es lauten die Gleichungen (7):

$$(7^*) \qquad \frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

Ist die Kurve durch das Gleichungspaar (2) oder durch jenes (3) gegeben, so lassen sich zwei der Differentiale linear durch das dritte ausdrücken; im Falle (3) kann man auch folgendermaßen vorgehen. Durch Differentialbildung ergibt sich:

$$f_x' dx + f_y' dy + f_z' dz = 0$$
$$F_x' dx + F_y' dy + F_z' dz = 0$$

und hieraus folgt:

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} f_y' & f_z' \\ F_y' & F_z' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_z' & f_x' \\ F_z' & F_x' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_x' & f_y' \\ F_x' & F_y' \end{vmatrix};$$

bedient man sich für diese aus den partiellen Differentialquotienten gebildeten Determinanten der von Donkin vorgeschlagenen Bezeichnung

$$\begin{vmatrix} f_y' & f_z' \\ F_y' & F_z' \end{vmatrix} = \frac{\partial(f, F)}{\partial(y, z)} \text{ usw.,}$$

so können die Gleichungen der Tangente so geschrieben werden:

$$(7^{**}) \qquad \frac{\xi - x}{\frac{\partial(f, F)}{\partial(y, z)}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial(f, F)}{\partial(z, x)}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial(f, F)}{\partial(x, y)}}.$$

Beispiele. 1) Für die Schraubenlinie erhält man auf Grund der Gleichungen (4) und der Formeln (6) die Richtungskosinus der Tangente:

$$\cos\alpha = -\frac{a \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

der Winkel mit der Richtung der z-Achse ist also konstant; sein Komplement, d. i. der Neigungswinkel der Tangente mit der xy-Ebene, wird der *Steigungswinkel* der Schraubenlinie genannt.

Die Gleichungen der Tangente lauten dann mit Rücksicht auf (4):

$$\frac{\xi - x}{-y} = \frac{\eta - y}{x} = \frac{\zeta - z}{b};$$

für die Spur S (Fig. 94) der Tangente auf der xy-Ebene ergeben sich hieraus, indem man $\zeta = 0$ setzt, die Koordinaten:

$$\xi = x + \frac{yz}{b}$$

$$\eta = y - \frac{xz}{b};$$

demnach ist

$$\overline{PS}^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = \frac{(x^2 + y^2) z^2}{b^2} = a^2 u^2$$

und

$$PS = au = \operatorname{arc} PM_0.$$

Der Ort der Tangente einer Raumkurve ist eine krumme Fläche und heißt *Tangentenfläche* der Kurve. Ihre Spur auf der xy-Ebene ist der Ort der Punkte S; für die Schraubenlinie ist diese Spur durch die letzte Gleichung als eine *Evolvente* jenes Kreises charakterisiert, in welchen sich die Schraubenlinie auf der xy-Ebene projiziert (**156**).

2) Bei der in **169**, 2) betrachteten Kurve ist

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2,$$

$$F(x, y, z) = x^2 - 2ax + y^2,$$

$$\frac{\partial(f, F)}{\partial(y, z)} = -4yz, \qquad \frac{\partial(f, F)}{\partial(z, x)} = 4z(x - a), \qquad \frac{\partial(f, F)}{\partial(x, y)} = 4ay,$$

und unter beständiger Rücksichtnahme auf die Gleichungen (5) der Kurve erhält man hieraus:

$$\cos\alpha = -\frac{yz}{a\sqrt{4a^2 - x^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{z(x - a)}{a\sqrt{4a^2 - x^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{y}{\sqrt{4a^2 - x^2}};$$

hiernach hat man beispielsweise für den Punkt $a/a/a\sqrt{2}$ der Kurve:

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \cos\beta = 0, \qquad \cos\gamma = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

und es ist hierdurch die Richtung der Tangente im Sinne des abnehmenden x bestimmt.

Für den Punkt $2a/0/0$ hören die Formeln auf bestimmte Bedeutung zu haben; es ist dies ein singulärer Punkt der Kurve, wie auch ihre Projektion auf der yz-Ebene (Fig. 95b) es erkennen ließ.

Die Gleichungen der Tangente im Punkte $x/y/z$ sind:

$$\frac{\xi - x}{-yz} = \frac{\eta - y}{z(x-u)} = \frac{\zeta - z}{uy}.$$

171. Bogendifferential einer Raumkurve. Die in **150** aufgestellte Definition für die Länge eines ebenen Kurvenbogens läßt sich auch auf eine Raumkurve ausdehnen. Wir definieren die *Länge eines Bogens* $M_0 M$ *einer Raumkurve* als den Grenzwert eines in diesem Bogen von M_0 bis M verlaufenden Sehnenzuges bei beständig wachsender Zahl der Sehnen und Abnahme jeder einzelnen gegen die Grenze Null.

Dieser Definition zufolge ist der Differentialquotient der Funktion s von u, welche die Bogenlänge ausdrückt, der Grenzwert des Quotienten aus der Sehne $MM' = c$ durch die zugehörige Änderung h von u für $\lim h = 0$, d. h. es ist:

$$\frac{ds}{du} = \lim_{h=0} \frac{c}{h} = \lim_{h=0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{h};$$

denn diese Sehne kann als Seite des Sehnenzuges von M_0 bis M', also als Änderung der Länge des Sehnenzuges in $M_0 M$ bei dem Fortschreiten von M zu M' aufgefaßt werden. Führt man die Division mit h unter der Wurzel aus und vollzieht dann den Grenzübergang, so ergibt sich

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}. \tag{8}$$

Geschieht die Zählung des Bogens so, daß er mit u zugleich wächst, so ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen.

Daraus erhält man durch Multiplikation mit du das *Bogendifferential,* das, wenn die unabhängige Variable nicht ersichtlich gemacht wird, die Formel hat:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{9}$$

Hiermit gestatten die Formeln **170**, (6*) für die Richtungskosinus der Tangente die Schreibweise:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{10}$$

Bei allgemeinen Untersuchungen empfiehlt es sich, der Einfachheit der Formeln wegen, den von einem festen Punkte

M_0 an gezählten Bogen s als Parameter zu wählen; ist wirklich eine solche Darstellung der Koordinaten x, y, z als Funktionen von s möglich, so bedeuten die rechten Seiten in (10) Differentialquotienten; im andern Falle sind sie als Quotienten von Differentialen bezüglich einer und derselben Variablen aufzufassen.

Aus den Gleichungen (10) ergibt sich, bei der zuletzt angeführten Auffassung, die eigentliche geometrische Bedeutung von ds; da nämlich

$$dx = ds \cos\alpha, \qquad dy = ds \cos\beta, \qquad dz = ds \cos\gamma,$$

so stellt ds eine Strecke der Tangente vor, deren Projektionen auf den drei Koordinatenachsen die Länge dx, dy, dz beziehungsweise haben.

Beispiel. Das Bogendifferential der Schraubenlinie ergibt sich nach Formel (8) aus den Gleichungen 169, (4):

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}\, du;$$

diese Differentialformel kann aber nur eine Folge der Gleichung

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot u + C$$

sein, in welcher C eine Konstante bedeutet. Zählt man den Bogen von M_0 (Fig. 94) an, so werden s und u zugleich Null sein, daher ist dann auch $C = 0$ und

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot u.$$

Beachtet man, daß

$$\text{arc } M_0 P = au$$
$$PM = bu$$

ist, so ist hiernach

$$\text{arc } M_0 M = \sqrt{\text{arc } M_0 P^2 + MP^2}.$$

172. Die Normalebene. Die durch den Punkt M einer Raumkurve senkrecht zur Tangente gelegte Ebene wird *Normalebene* der Kurve in M genannt. Ihre Gleichung folgt unmittelbar aus den Gleichungen der Tangente und lautet:

$$(11) \qquad (\xi - x)\frac{dx}{du} + (\eta - y)\frac{dy}{du} + (\zeta - z)\frac{dz}{du} = 0,$$

wenn u der Parameter ist, durch welchen die Koordinaten ausgedrückt sind, oder:

$$(11^*) \qquad (\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0$$

oder endlich:

$$(\xi - x)\frac{\partial(f, F)}{\partial(y, z)} + (\eta - y)\frac{\partial(f, F)}{\partial(z, x)} + (\zeta - z)\frac{\partial(f, F)}{\partial(x, y)} = 0,$$

wenn die Kurve durch die Gleichungen **169**, (3) gegeben ist; diese letzte Gleichung kann mit Rücksicht auf die Bedeutung der Koeffizienten auch in der folgenden Gestalt geschrieben werden:

$$(11^{**}) \qquad \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Beispiel. Aus den Gleichungen der Tangente an die Kurve **169**, (5), die in **170**, 2) abgeleitet worden sind, ergibt sich die Gleichung der Normalebene im Punkte $x/y/z$:

$$-yz(\xi - x) + z(x - a)(\eta - y) + ay(\zeta - z) = 0$$

und nach vollzogener Reduktion

$$-yz\xi + z(x - a)\eta + ay\zeta = 0.$$

Alle Normalebenen gehen hier also durch einen festen Punkt, den Mittelpunkt der Kugel, eine Beziehung, die für jede *sphärische* Raumkurve zurecht besteht.

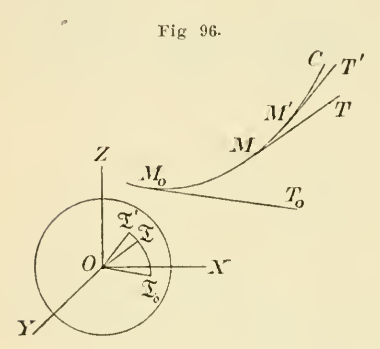
173. Die erste Krümmung oder Flexion. Wenn eine Gerade, in welcher eine Richtung als positiv gewählt ist, eine Bewegung in der Ebene ausführt, so ist die Größe der dabei vollzogenen Drehung durch die Endlagen der Geraden bestimmt*); ihr Maß ist der Winkel der positiven Richtungen dieser Endlagen.

Bei einer Bewegung der Geraden im Raume reicht die Kenntnis der Endlagen nicht aus. Um hier die Größe der Drehung zu messen, kann man sich einer Kugel bedienen: ein aus dem Mittelpunkte derselben parallel zur positiven Richtung der Geraden geführter Strahl vollführt dieselbe Drehung und beschreibt auf der Kugeloberfläche einen Kurvenbogen:

*) Wenigstens bis auf etwaige volle Umdrehungen und wenn die Drehung fortwährend in *einem* Sinne erfolgt.

die Länge dieses Bogens, gemessen durch den Halbmesser der Kugel, welcher also als Längeneinheit dient, ist das Maß für die Größe der Drehung der Geraden.

Diese von Gauß eingeführte Betrachtungsweise wenden wir auf die Tangenten einer Raumkurve M_0C (Fig. 96) an. Die Kurve $\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$, welche der Parallelstrahl $O\mathfrak{T}$ zur positiven Tangentenrichtung MT auf der Kugeloberfläche beschreibt, wird die *sphärische Indikatrix* der Tangente genannt.



Setzt man

$$M_0M = s, \qquad MM' = \Delta s$$
$$\mathfrak{T}_0\mathfrak{T} = \tau, \qquad \mathfrak{T}\mathfrak{T}' = \Delta\tau,$$

und bezeichnet mit u, $u + h$ die Parameterwerte der Punkte M, M', durch welche zugleich auch die Punkte $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ bestimmt sind, so ist

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta s}{h} = \frac{ds}{du}$$

die Geschwindigkeit der Änderung des Bogens und

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta\tau}{h} = \frac{d\tau}{du}$$

die gleichzeitige Geschwindigkeit der Drehung der Tangente bei gleichförmiger Änderung von u; das Verhältnis der zweiten Geschwindigkeit zur ersten, also den Bruch

$$\frac{\frac{d\tau}{du}}{\frac{ds}{du}} = \frac{d\tau}{ds},$$

definiert man als *erste Krümmung* oder *Flexion**) der Raumkurve im Punkte M; den Halbmesser ϱ eines Kreises von dieser Krümmung bezeichnet man als *Krümmungshalbmesser* der Kurve in M und hat hiernach

*) Die Terminologie ist nicht einheitlich. Mitunter wird die im nächsten Artikel behandelte Torsion auch als Flexion bezeichnet, z. B. Enzykl. der mathem. Wissensch., Band III 3, p. 78. Wir schließen uns L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, an.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}. \tag{12}$$

Nun hat der Punkt $\mathfrak{T}$, da der Halbmesser der Kugel Längeneinheit ist, die Koordinaten:

$$\xi = \cos\alpha, \qquad \eta = \cos\beta, \qquad \zeta = \cos\gamma,$$

daraus folgt als Bogendifferential der Indikatrix:

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}$$

und hiermit ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}. \tag{13}$$

Ist s der Parameter, durch welchen die Koordinaten ausgedrückt sind, so wird auf Grund der Formeln 171, (10):

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{14}$$

Die Flexion wird als absolute Größe betrachtet; die Wurzel in den Formeln (13) und (14) ist daher positiv zu nehmen.

Je kleiner das Bogenelement MM', um so genauer kann die Drehung der Tangente bei dem Übergange von M zu M' durch den Winkel der beiden Tangenten MT, $M'T'$, welchen man den *Kontingenzwinkel* des Bogenelements MM' nennt, gemessen werden; aus diesem Grunde bezeichnet man auch das Bogendifferential $d\tau$ der Indikatrix mit dem Namen Kontingenzwinkel und definiert wie bei einer ebenen Kurve (153) *die Flexion als Quotienten aus dem Kontingenzwinkel durch das zugehörige Bogendifferential der Kurve.*

Die einzige reelle Linie, bei welcher die Flexion in allen Punkten Null ist, ist die Gerade. Denn soll $\frac{1}{\varrho} \equiv 0$ sein, so muß laut (14) beständig

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

also

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = b, \qquad \frac{dz}{ds} = c,$$

also weiter

$$x = as + a', \qquad y = bs + b' \qquad z = cs + c'$$

sein; diese Gleichungen, in welchen $a, a', \ldots$ willkürliche Konstanten bedeuten, stellen aber alle Geraden des Raumes dar.

Beispiel. Die Richtungskosinus der Tangente an eine Schraubenlinie sind (170, 1)):

$$\cos\alpha = -\frac{a\sin u}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a\cos u}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

das Bogendifferential (171):

$$ds = \sqrt{a^2+b^2}\,du;$$

hieraus ergibt sich

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = -\frac{a\cos u}{a^2+b^2}, \quad \frac{d\cos\beta}{ds} = -\frac{a\sin u}{a^2+b^2}, \quad \frac{d\cos\gamma}{ds} = 0;$$

demnach ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

und $\varrho = a + \frac{b^2}{a}\cdot$ Es hat also die Schraubenlinie in allen Punkten dieselbe Flexion und ihr Krümmungshalbmesser ist um so größer im Vergleich zum Halbmesser des Schraubenzylinders, je größer b oder je größer der Steigungswinkel.

§ 2. Oskulationsebene einer Raumkurve. Die zweite Krümmung oder Torsion.

174. Die Oskulationsebene. Durch den Punkt M der Raumkurve mit den Koordinaten $x/y/z$ und dem Parameter u werde eine Ebene gelegt,

$$(1) \qquad (\xi - x)\cos a + (\eta - y)\cos b + (\zeta - z)\cos c = 0$$

sei ihre Gleichung; a, b, c sind die Richtungswinkel des Lotes zur Ebene.

Ein dem Punkte M sehr naheliegender Punkt M' der Kurve gehöre zum Parameter $u + h$ und habe die Koordinaten $x_1/y_1/z_1$; dann ist

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x + \frac{dx}{du}h + \frac{d^2x}{du^2}\frac{h^2}{2} + \varepsilon_1 \\ y_1 &= y + \frac{dy}{du}h + \frac{d^2y}{du^2}\frac{h^2}{2} + \varepsilon_2 \\ z_1 &= z + \frac{dz}{du}h + \frac{d^2z}{du^2}\frac{h^2}{2} + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Die Entfernung dieses Punktes von jener Ebene ist

$$\delta = \left(\frac{dx}{du}\cos a + \frac{dy}{du}\cos b + \frac{dz}{du}\cos c\right) h$$

$$+ \left(\frac{d^2 x}{du^2}\cos a + \frac{d^2 y}{du^2}\cos b + \frac{d^2 z}{du^2}\cos c\right)\frac{h^2}{2} + E;$$

dabei bedeute E, ebenso wie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, Größen der dritten Ordnung in bezug auf h, das als Größe der ersten Kleinheitsordnung gelten soll.

Mit h wird, solange die Ebene keine besonderen Bedingungen erfüllt, δ zugleich unendlich klein, und zwar von der ersten Ordnung, ändert daher mit h zugleich sein Vorzeichen, die Ebene *schneidet* die Kurve.

Wenn jedoch die Stellung der Ebene eine solche ist, daß

$$\frac{dx}{du}\cos a + \frac{dy}{du}\cos b + \frac{dz}{du}\cos c = 0, \tag{3}$$

so wird δ mit h unendlich klein, aber nunmehr von der zweiten Ordnung, und ändert daher innerhalb entsprechend enger Grenzen sein Vorzeichen nicht, wenn h es wechselt. Da mit Rücksicht auf die Formeln **170.** (6) für eine solche Ebene vermöge (3) die Beziehung

$$\cos\alpha\cos a + \cos\beta\cos b + \cos\gamma\cos c = 0$$

besteht, so geht die Ebene durch die Tangente in M und heißt daher *Tangentialebene* der Kurve im Punkte M.

Erfüllt die Ebene neben der Relation (3) auch noch die:

$$\frac{d^2 x}{du^2}\cos a + \frac{d^2 y}{du^2}\cos b + \frac{d^2 z}{du^2}\cos c = 0, \tag{4}$$

so reduziert sich für sie δ auf E, also auf eine Größe der dritten Ordnung, so daß es mit h zugleich das Vorzeichen wechselt. Durch die Bedingungen (3) und (4) ist die Ebene (1) *eindeutig* bestimmt, und diese ausgezeichnete unter den Tangentialebenen wird *Oskulations-* oder *Schmiegungsebene* der Kurve in M genannt; nach der eben gemachten Bemerkung liegt die Kurve beiderseits von M und in der nächsten Umgebung dieses Punktes zu verschiedenen Seiten dieser Ebene, sie wird von ihr berührt und geschnitten.

Aus den Gleichungen (3), (4) folgt:

$$
(5)\quad \cos a = \varkappa \begin{vmatrix} \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{d^2 y}{du^2} & \frac{d^2 z}{du^2} \end{vmatrix}, \quad \cos b = \varkappa \begin{vmatrix} \frac{dz}{du} & \frac{dx}{du} \\ \frac{d^2 z}{du^2} & \frac{d^2 x}{du^2} \end{vmatrix},
$$

$$
\cos c = \varkappa \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} \\ \frac{d^2 x}{du^2} & \frac{d^2 y}{du^2} \end{vmatrix}
$$

und $\varkappa$ ist, bis auf das Vorzeichen, vermöge der Beziehung $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$, als reziproke Quadratwurzel aus der Quadratsumme der drei Determinanten bestimmt; durch Einsetzung dieser Werte in (1) ergibt sich die Gleichung der Oskulationsebene:

$$
(6)\quad \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{d^2 x}{du^2} & \frac{d^2 y}{du^2} & \frac{d^2 z}{du^2} \end{vmatrix} = 0.
$$

In Analogie mit den bei der Berührung zweier Plankurven gebrauchten Bezeichnungen (145) kann man sagen, eine Tangentialebene habe mit der Kurve eine Berührung erster und die Oskulationsebene eine solche der zweiten Ordnung.

175. Superoskulierende Ebenen. Geometrische Definitionen der Oskulationsebene. Es ist nicht ausgeschlossen, daß in einzelnen Punkten der Kurve die Berührung der Oskulationsebene von höherer als der zweiten Ordnung sei, daß also *Superoskulation* bestehe. Es wird insbesondere eine Berührung der dritten Ordnung eintreten, wenn bei weiter fortgesetzter Entwicklung in (2) in dem Ausdrucke für δ auch das Glied dritter Ordnung verschwindet, wenn also die Kosinus (5) auch noch die Bedingung

$$
\frac{d^3 x}{du^3} \cos a + \frac{d^3 y}{du^3} \cos b + \frac{d^3 z}{du^3} \cos c = 0
$$

erfüllen, d. h. wenn für den betreffenden Punkt

$$(7) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{d^2x}{du^2} & \frac{d^2y}{du^2} & \frac{d^2z}{du^2} \\ \frac{d^3x}{du^3} & \frac{d^3y}{du^3} & \frac{d^3z}{du^3} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Weil in diesem Falle δ von der vierten Ordnung ist, verhält sich eine solche Oskulationsebene zur nächsten Umgebung der Kurve wie eine gewöhnliche Tangentialebene und wird *stationäre Oskulationsebene* genannt. Die Gleichung (7) kann dazu dienen, die Parameterwerte der Punkte mit stationärer Oskulationsebene zu bestimmen.

Für eine ebene Kurve ist die Gleichung (7) identisch erfüllt; denn, gilt für jeden Punkt der Kurve

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

so ist auch für jeden

$$A\frac{dx}{du} + B\frac{dy}{du} + C\frac{dz}{du} = 0$$

$$A\frac{d^2x}{du^2} + B\frac{d^2y}{du^2} + C\frac{d^2z}{du^2} = 0$$

$$A\frac{d^3x}{du^3} + B\frac{d^3y}{du^3} + C\frac{d^3z}{du^3} = 0$$

und die Gleichung (7) drückt eine notwendige Folge dieser drei Gleichungen aus.

Es mag bemerkt werden, daß man in den Gleichungen (5), (6), (7) die Differentialquotienten auch durch die betreffenden Differentiale ersetzen oder statt u auch s als Parameter verwenden kann.

Neben die analytische Definition der Oskulationsebene als einer Ebene, welche mit der Kurve eine Berührung mindestens zweiter Ordnung hat, lassen sich auch geometrische Definitionen stellen. Zunächst die folgende: *Die Oskulationsebene im Punkte M ist die Grenze einer Tangentialebene, welche außer M noch einen zweiten gegen M sich bewegenden Punkt M' mit der Kurve gemein hat.*

Drückt man nämlich die Forderung aus, daß der Punkt (2) der Ebene (1) angehöre, deren Kosinus der Beziehung

(3) entsprechen, so kommt man zunächst zu der Gleichung:

$$\left(\frac{d^2 x}{d u^2} \cos a + \frac{d^2 y}{d u^2} \cos b + \frac{d^2 z}{d u^2} \cos c\right) \frac{h^2}{2} + E = 0;$$

dividiert man durch $\frac{h^2}{2}$ und läßt dann h gegen Null konvergieren, so ergibt sich wegen $\lim \frac{2E}{h^2} = 0$ folgende, die Grenzlage der Ebene charakterisierende Gleichung:

$$\frac{d^2 x}{d u^2} \cos a + \frac{d^2 y}{d u^2} \cos b + \frac{d^2 z}{d u^2} \cos c = 0,$$

welche mit (4) übereinstimmt und also tatsächlich zur Oskulationsebene führt.

Beachtet man, daß laut **170** die Tangente in M die Grenze einer Geraden ist, welche außer M noch einen zweiten dem M unaufhörlich sich nähernden Punkt mit der Kurve gemein hat, so kommt man zu der weiteren Definition: *Die Oskulationsebene in M sei die Grenze einer Ebene, welche mit der Kurve neben M noch zwei weitere gleichzeitig gegen M konvergierende Punkte gemein hat.*

176. Beispiele. 1) Für den Punkt $x/y/z$ der Schraubenlinie

$$x = a \cos u$$
$$y = a \sin u$$
$$z = bu$$

erhält man als Gleichung der Oskulationsebene zunächst

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ -y & x & b \\ -x & -y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und nach vollzogener Entwickelung

$$by\xi - bx\eta + a^2\zeta - a^2 z = 0;$$

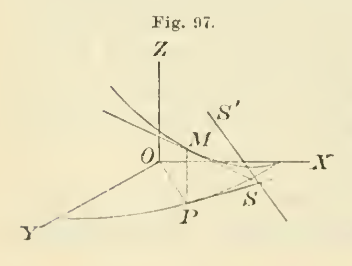


Fig. 97.

die Spur SS' dieser Ebene in der xy-Ebene, $by\xi - bx\eta - a^2 z = 0$, ist also parallel dem Radius OP (Fig. 97).

2) Um für den Punkt P (Fig. 95a) der Kurve

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$
$$x^2 + y^2 = 2ax,$$

dessen Koordinaten $0/0/2a$ sind, die Schmiegungsebene zu erhalten, differentiiere man diese Gleichungen zweimal, wodurch

$$xdx + ydy + zdz = 0$$
$$(x-a)dx + ydy = 0$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + xd^2x + yd^2y + zd^2z = 0$$
$$dx^2 + dy^2 + (x-a)d^2x + yd^2y \qquad = 0$$

erhalten wird; nach Einsetzung der speziellen Koordinatenwerte folgt hieraus:

$$dx = 0, \qquad dz = 0,$$
$$d^2x = \frac{dy^2}{a}, \quad d^2z = -\frac{dy^2}{2a};$$

demnach ist die Gleichung der Oskulationsebene:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta - 2a \\ 0 & dy & 0 \\ \frac{dy^2}{a} & d^2y & -\frac{dy^2}{2a} \end{vmatrix} = 0$$

und ausgeführt:

$$\xi + 2\zeta = 4a;$$

ihre Spur S in der zx-Ebene fällt also mit der Tangente an die Parabel, welche die gleichnamige Projektion der Kurve bildet, im Punkte P zusammen (Fig. 95b).

Diese Oskulationsebene ist stationär; denn setzt man die oben zweimal ausgeführte Differentiation der Kurvengleichungen fort, so ergibt sich weiter:

$$3dxd^2x + 3dyd^2y + 3dzd^2z + xd^3x + yd^3y + zd^3z = 0$$
$$3dxd^2x + 3dyd^2y + (x-a)d^3x + yd^3y \qquad = 0$$

und hieraus für den betrachteten Punkt

$$d^3x = \frac{3dyd^2y}{a}, \quad d^3z = -\frac{3dyd^2y}{2a};$$

die Gleichung (7) ist identisch erfüllt, weil tatsächlich

$$\begin{vmatrix} 0 & dy & 0 \\ \frac{dy^2}{a} & d^2y & -\frac{dy^2}{2a} \\ \frac{3dy\,d^2y}{a} & d^3y & -\frac{3dy\,d^2y}{2a} \end{vmatrix} = 0$$

ist.

177. Hauptnormale und Binormale. Die Normalebene im Punkte $x/y/z$:

$$(\xi - x)\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\frac{dz}{ds} = 0 \tag{8}$$

schneidet die Oskulationsebene daselbst:

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^3} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix} + (\zeta - z)\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

nach einer Geraden, welche, zur Tangente senkrecht, die *Hauptnormale* der Kurve im Punkte M heißt.

Die zu dieser Geraden durch M senkrecht gelegte Ebene, als *rektifizierende Ebene* der Kurve in M bezeichnet, geht durch die Tangente und schneidet die Normalebene nach einer Geraden, welche, ebenfalls senkrecht zur Tangente, die *Binormale**) der Kurve im Punkte M genannt wird. Die Gleichung dieser Ebene lautet:

$$(\xi - x)\frac{d^2x}{ds^2} + (\eta - y)\frac{d^2y}{ds^2} + (\zeta - z)\frac{d^2z}{ds^2} = 0; \tag{10}$$

denn wegen

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d^2z}{ds^2} = 0^{**})$$

---

*) Diese Bezeichnung hat B. de Saint-Venant in der für die geschichtliche Entwicklung der Theorie der Raumkurven wichtigen Abhandlung im Journ. de l'école polyt., cah. 30 (1845) eingeführt.

**) Diese Beziehung ergibt sich durch Differentiation der Relation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

in bezug auf s.

ist die Ebene (10) senkrecht zur Normalebene (8), und wegen

$$\frac{d^2x}{ds^2}\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} + \frac{d^2y}{ds^2}\begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix} + \frac{d^2z}{ds^2}\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} \equiv 0$$

ist sie senkrecht zur Oskulationsebene (9), erfüllt also tatsächlich die ihr auferlegten Bedingungen.

Als positiv setzen wir in der Hauptnormale diejenige Richtung fest, welche von M aus nach jener Seite der rektifizierenden Ebene (10) verläuft, auf welcher sich die Kurve in der Umgebung von M befindet; die Winkel dieser Richtung mit den positiven Achsenrichtungen seien mit λ, μ, ν bezeichnet. Um ihre Kosinus darzustellen, führen wir folgende Betrachtung durch. Der Abstand des Punktes M' (**174**, (2)) von der Ebene (10):

$$\delta = \frac{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]\frac{h^2}{2} + E}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{h^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} + E',$$

wo E' wieder eine Größe dritter Ordnung in bezug auf h bedeutet, fällt bei entsprechend kleinem h positiv aus, wenn man die Quadratwurzel mit dem positiven Zeichen nimmt. Bei dem gleichen Vorzeichen der Wurzel muß dann auch der Abstand eines Punktes $X/Y/Z$, der von M aus in der positiven Richtung der Hauptnormale liegt, von der Ebene (10) d. i.

$$\frac{(X-x)\frac{d^2x}{ds^2} + (Y-y)\frac{d^2y}{ds^2} + (Z-z)\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}$$

positiv ausfallen; für einen solchen Punkt ist auch

$$(X-x)\cos\lambda + (Y-y)\cos\mu + (Z-z)\cos\nu$$

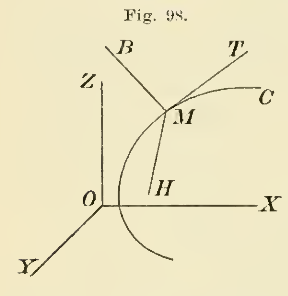
positiv und stellt denselben Abstand dar; folglich hat man (**173**, (14)):

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
\cos\lambda &= \frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} = \varrho\,\frac{d^2x}{ds^2},\\
\cos\mu &= \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} = \varrho\,\frac{d^2y}{ds^2},\\
\cos\nu &= \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} = \varrho\,\frac{d^2z}{ds^2},
\end{aligned}
$$

die Wurzel positiv genommen.

Es bleibt jetzt noch übrig, in der Binormale die positive Richtung festzusetzen. Dies soll so geschehen, daß die positiven Richtungen der Tangente MT, der Hauptnormale MH und der Binormale MB ein dem Dreikant der positiven Halbachsen OX, OY, OZ gleichstimmiges, d. h. ein solches Dreikant bilden, welches sich mit dem letztgenannten durch Translation und Rotation zur Deckung bringen läßt (Fig. 98). Die Winkel, welche die positive Richtung der Binormale mit den positiven Achsenrichtungen bildet, mögen mit φ, ψ, χ bezeichnet werden.

Fig. 98.



Man nennt $M(THB)$ das den Punkt M *begleitende Dreikant.*

Trägt man von M aus auf MT, MH, MB je die Längeneinheit ab, so sind die Koordinatendifferenzen der Endpunkte dieser Strecken $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ beziehungsweise, und das sechsfache Volumen des Tetraeders, welches jene vier Punkte zu Ecken hat, kommt gleich

$$
\begin{vmatrix}
\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\
\cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu\\
\cos\varphi & \cos\psi & \cos\chi
\end{vmatrix};
$$

ein auf dieselbe Weise mittels der positiven Koordinatenhalbachsen konstruiertes Tetraeder hat den sechsfachen Rauminhalt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

und da beide Tetraeder gleich und gleichstimmig sind, so ist

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \cos\varphi & \cos\psi & \cos\chi \end{vmatrix} = 1. \tag{12}$$

Jedes Element dieser Determinante ist der ihm adjungierten Unterdeterminante gleich. Entwickelt man nämlich beispielsweise nach den Elementen der dritten Zeile, so folgt

$$\cos\varphi(\cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu) + \cos\psi(\cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu)$$
$$+ \cos\chi(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda) = 1;$$

vergleicht man dies mit

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1,$$

so ergibt sich, da beide Gleichungen für alle Lagen des Dreikants $M(THB)$ bestehen müssen, daß

$$\cos\varphi = \cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu$$
$$\cos\psi = \cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu$$
$$\cos\chi = \cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda;$$

ebenso wird der Beweis für die anderen Elemente geführt.

Setzt man in den letzten Gleichungen für die Richtungskosinus der Tangente und Hauptnormale die dafür bereits bestimmten Werte ein (171, (10) und 177, (11)), so ergeben sich schließlich auch die Richtungskosinus der positiven Richtung der Binormale:

$$\cos\varphi = \varrho \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}$$

$$\cos\psi = \varrho \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix} \tag{13}$$

$$\cos\chi = \varrho \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}$$

Dieselben sind, bis auf das Vorzeichen, bereits als Richtungskosinus der Oskulationsebene in **174**, (5) gefunden worden.

178. Die zweite Krümmung oder Torsion. Die Änderung in der *Stellung der Oskulationsebene* kann durch die Änderung in der *Richtung der Binormale* gemessen werden, weil die Binormale zur Oskulationsebene normal ist. Die Bewegung der Binormale wird aber wieder mit Hilfe ihrer *sphärischen Indikatrix* zu beurteilen sein, wie dies bei der Tangente schon geschah (**173**).

Sind $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ die zu den Punkten M, M' gehörigen Punkte der sphärischen Indikatrix, also die Endpunkte der zu den Binormalen MB, $M'B'$ parallelen Radien der Einheitskugel, und setzt man (die zugehörige Figur wäre konform der Fig. 96):

$$M_0 M = s \qquad MM' = \Delta s$$
$$\mathfrak{B}_0 \mathfrak{B} = \theta, \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{B}' = \Delta\theta,$$

so ist

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta s}{h} = \frac{ds}{du}$$

die Geschwindigkeit der Änderung des Bogens und

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta\theta}{h} = \frac{d\theta}{du}$$

die gleichzeitige Geschwindigkeit der Drehung der Oskulationsebene bei gleichförmiger Änderung von u; das Verhältnis beider Geschwindigkeiten, und zwar:

$$\frac{\frac{d\theta}{du}}{\frac{ds}{du}} = \frac{d\theta}{ds},$$

definiert man als *zweite Krümmung* oder *Torsion**) der Kurve im Punkte M; den Halbmesser T eines Kreises, welcher eine der Torsion gleiche Krümmung hat, nennt man *Torsionshalbmesser* und hat hiernach:

$$\frac{1}{T} = \frac{d\theta}{ds}. \tag{14}$$

*) Auch die Bezeichnungen Windung, Schmiegung sind gebräuchlich. Vgl. hierzu die Fußnote p. 456.

Nun hat der Punkt $\mathfrak{B}$, wenn der Mittelpunkt der Kugel mit dem Ursprung zusammenfällt, die Koordinaten:

$$\xi = \cos\varphi \qquad \eta = \cos\psi \qquad \zeta = \cos\chi;$$

demnach ist $d\theta$ als Bogendifferential der Indikatrix der Binormale:

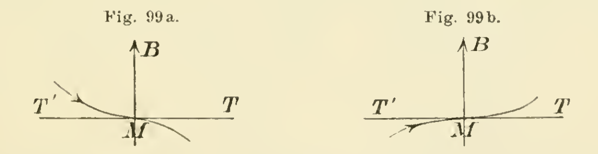
$$d\theta = \pm\sqrt{(d\cos\varphi)^2 + (d\cos\psi)^2 + (d\cos\chi)^2}$$

und daraus

$$(15) \qquad \frac{1}{T} = \pm\sqrt{\left(\frac{d\cos\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\psi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\chi}{ds}\right)^2}.$$

Für sehr nahe aneinander liegende Punkte M, M' kommt $d\theta$ sehr nahe dem Neigungswinkel der Oskulationsebenen in M, M'; diesen Winkel bezeichnet man als *Torsionswinkel* zum Kurvenelement MM'. In diesem Sinne kann *die Torsion als Quotient aus dem Torsionswinkel durch das zugehörige Bogendifferential erklärt werden.*

Um zu erkennen, welche geometrische Bedeutung das Vorzeichen der Torsion haben kann, erinnern wir uns der in **174** festgestellten Tatsache, daß die Kurve von der Oskulationsebene — wenn diese nicht stationär ist — berührt *und* geschnitten wird. Ein Auge, das in der Hauptnormale sich befindet und in der positiven Richtung derselben gegen die Kurve blickt, sieht die Oskulationsebene als Gerade $T'T$, und die Kurve bietet ihm in der Umgebung von M eines der Bilder in Fig. 99a, b; bei a) geht ein von links nach rechts bewegter



Punkt absteigend, bei b) aufsteigend durch die Oskulationsebene, wenn er M durchschreitet. Diese zwei Fälle sind es, welche sich durch die Vorzeichen + und — in einer noch festzusetzenden Weise werden unterscheiden lassen. Man spricht im Falle a) von einer rechtsgewundenen, im Falle b) von einer linksgewundenen Kurve.

179. Die Formeln von Frenet. Man kann die Flexion

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}$$

als Geschwindigkeit der Richtungsänderung der Tangente und die Torsion

$$\frac{1}{T} = \pm\sqrt{\left(\frac{d\cos\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\psi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\chi}{ds}\right)^2}$$

als Geschwindigkeit der Stellungsänderung der Oskulationsebene bei gleichförmiger Änderung des Bogens auffassen, und jede dieser Geschwindigkeiten erscheint der Formel gemäß zusammengesetzt aus drei rechtwinkligen Komponenten: die Flexion aus:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds}, \qquad \frac{d\cos\beta}{ds}, \qquad \frac{d\cos\gamma}{ds},$$

die Torsion aus:

$$\frac{d\cos\varphi}{ds}, \qquad \frac{d\cos\psi}{ds}, \qquad \frac{d\cos\chi}{ds}.$$

Diese Komponenten lassen sich wie folgt einzeln bestimmen.

Aus den Formeln **177**, (11) in Verbindung mit **171**, (10) ergibt sich sogleich;

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{\cos\lambda}{\varrho} \qquad \frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{\cos\mu}{\varrho} \qquad \frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{\cos\nu}{\varrho}.$$

Differentiiert man die Gleichungen:

$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1$$
$$\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi = 0,$$

deren zweite die Tatsache ausdrückt, daß Tangente und Binormale zueinander senkrecht sind, in bezug auf s und nimmt gleich Rücksicht auf (I), so wird:

$$\cos\varphi\frac{d\cos\varphi}{ds} + \cos\psi\frac{d\cos\psi}{ds} + \cos\chi\frac{d\cos\chi}{ds} = 0$$

$$\frac{1}{\varrho}(\cos\lambda\cos\varphi + \cos\mu\cos\psi + \cos\nu\cos\chi)$$
$$+ \cos\alpha\frac{d\cos\varphi}{ds} + \cos\beta\frac{d\cos\psi}{ds} + \cos\gamma\frac{d\cos\chi}{ds} = 0;$$

das erste Glied der zweiten dieser Gleichungen entfällt, weil Hauptnormale und Binormale einen rechten Winkel bilden, und dann ergibt sich aus dem homogenen Gleichungspaar mit Beachtung dessen, was über die Determinante **177**, (12) gesagt worden ist:

$$\frac{d\cos\varphi}{ds} = \varkappa \begin{vmatrix} \cos\psi & \cos\chi \\ \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = \varkappa \cos\lambda$$

$$\frac{d\cos\psi}{ds} = \varkappa \begin{vmatrix} \cos\chi & \cos\varphi \\ \cos\gamma & \cos\alpha \end{vmatrix} = \varkappa \cos\mu$$

$$\frac{d\cos\chi}{ds} = \varkappa \begin{vmatrix} \cos\varphi & \cos\psi \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix} = \varkappa \cos\nu;$$

die Quadratsumme dieser Gleichungen führt zu

$$\varkappa = \pm\sqrt{\left(\frac{d\cos\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\psi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\chi}{ds}\right)^2} = \frac{1}{T},$$

demnach hat man endgültig:

$$\text{(II)} \qquad \frac{d\cos\varphi}{ds} = \frac{\cos\lambda}{T} \qquad \frac{d\cos\psi}{ds} = \frac{\cos\mu}{T} \qquad \frac{d\cos\chi}{ds} = \frac{\cos\nu}{T}.$$

Nun liegt es nahe, dieses Formelsystem dahin zu ergänzen, daß man auch

$$\frac{d\cos\lambda}{ds}, \qquad \frac{d\cos\mu}{ds}, \qquad \frac{d\cos\nu}{ds}$$

bestimmt. Aus der Determinante **177**, (12) folgt:

$$\cos\lambda = \cos\psi\cos\gamma - \cos\chi\cos\beta,$$

daraus weiter durch Differentiation nach s unter Rücksichtnahme auf (I) und (II):

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{\cos\psi\cos\nu - \cos\chi\cos\mu}{\varrho} + \frac{\cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta}{T}$$

und vermöge der erwiesenen Eigenschaft jener Determinante:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = -\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{T};$$

nach Analogie dieser Formel hat man also:

$$\text{(III)*)} \quad \begin{cases} \dfrac{d\cos\lambda}{ds} = -\dfrac{\cos\alpha}{\varrho} - \dfrac{\cos\varphi}{T}, \quad \dfrac{d\cos\mu}{ds} = -\dfrac{\cos\beta}{\varrho} - \dfrac{\cos\psi}{T}, \\ \dfrac{d\cos\nu}{ds} = -\dfrac{\cos\gamma}{\varrho} - \dfrac{\cos\chi}{T}. \end{cases}$$

---

*) Der nach Analogie der Flexion und Torsion gebildete Ausdruck

$$\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2},$$

der das Maß der Geschwindigkeit der Richtungsänderung der Hauptnormale darstellt, wird als *ganze Krümmung* der Kurve in M bezeichnet. Zufolge der Formeln (III) ist das Quadrat der ganzen Krümmung gleich der Quadratsumme der Flexion und Torsion.

Die neun Formeln (I), (II), (III), nach ihrem Urheber Frenetsche *Formeln* genannt*), drücken die Differentialquotienten der Kosinus der drei für einen Punkt einer Raumkurve grundlegenden Richtungen in bezug auf den Bogen durch diese Kosinus selbst sowie durch Flexion und Torsion aus. Sie sind für die Anwendungen der Kurventheorie von großer Wichtigkeit.

180. Das Vorzeichen der Torsion. Durch Ausführung der Formeln (II) auf Grund von **177**, (11) und (13) erhält man:

$$\frac{d\varrho}{ds}\begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix} + \varrho\begin{vmatrix}\frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3}\end{vmatrix} = \frac{\varrho}{T}\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$\frac{d\varrho}{ds}\begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2}\end{vmatrix} + \varrho\begin{vmatrix}\frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds}\\ \frac{d^3z}{ds^3} & \frac{d^3x}{ds^3}\end{vmatrix} = \frac{\varrho}{T}\frac{d^2y}{ds^2}$$

$$\frac{d\varrho}{ds}\begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2}\end{vmatrix} + \varrho\begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds}\\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3}\end{vmatrix} = \frac{\varrho}{T}\frac{d^2z}{ds^2};$$

multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$ und bildet die Summe, so erhält $\frac{d\varrho}{ds}$ zum Koeffizienten eine Determinante dritten Grades, welche zwei gleiche Reihen hat und daher Null ist; rechts ist die Formel **173**, (14) zu beachten; man findet so:

$$(16) \qquad \frac{1}{T} = -\varrho^2\begin{vmatrix}\frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3}\end{vmatrix}.$$

Daraus folgt, daß die Torsion das entgegengesetzte Vorzeichen der Determinante $\varDelta$ hat, von welcher in **175** schon die Rede

*) Häufig auch als Serretsche Formeln bezeichnet; Frenet hatte sie 1847 als Doktordissertation bei der Toulouser Fakultät eingereicht, Serret sie unabhängig von ihm gefunden und 1851 im Journal von Crelle veröffentlicht, wo 1852 auch Frenets Arbeit erschien.

war; dort ergab sich auch, daß in einem Punkte mit stationärer Oskulationsebene diese Determinante verschwindet, in einem solchen Punkte hat also die Torsion den Wert Null und wechselt bei dem Durchgange durch denselben das Vorzeichen. Daraus ergibt sich eine Analogie zwischen einer stationären Oskulationsebene einer Raumkurve und einer Wendetangente einer Plankurve auf der einen und zwischen Torsion und Krümmung auf der anderen Seite.

Das beständige Verschwinden der Torsion hat nach (15) zur Folge, daß

$$\frac{d\cos\varphi}{ds} = 0, \qquad \frac{d\cos\psi}{ds} = 0, \qquad \frac{d\cos\chi}{ds} = 0,$$

also $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ konstant sind; es kommt diese Eigenschaft also nur einer ebenen Kurve zu; demnach ist eine ebene Kurve dadurch gekennzeichnet, daß in allen ihren Punkten $\Delta = 0$ ist.

Ersetzt man in der linken Seite der Gleichung

$$(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = 0$$

der Oskulationsebene ξ, η, ζ durch die Koordinaten eines Punktes, welcher von dieser Ebene in der positiven Binormalenrichtung abweicht oder auf ihrer positiven Seite liegt, so ergibt sich dessen Abstand δ positiv, im anderen Falle negativ; wählt man als solchen Punkt den Punkt M' der Kurve, zu welchem der Bogen $s + h$ gehört und dessen Koordinaten demnach

$$x_1 = x + \frac{dx}{ds}h + \frac{d^2x}{ds^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3x}{ds^3}\frac{h^3}{6} + \varepsilon_1$$

$$= x + h\cos\alpha + \frac{h^2}{2\varrho}\cos\lambda + \frac{h^3}{6}\frac{d^3x}{ds^3} + \varepsilon_1$$

$$y_1 = y + \frac{dy}{ds}h + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{ds^3}\frac{h^3}{6} + \varepsilon_2$$

$$= y + h\cos\beta + \frac{h^2}{2\varrho}\cos\mu + \frac{h^3}{6}\frac{d^3y}{ds^3} + \varepsilon_2$$

$$z_1 = z + \frac{dz}{ds}h + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3z}{ds^3}\frac{h^3}{6} + \varepsilon_3$$

$$= z + h\cos\gamma + \frac{h^2}{2\varrho}\cos\nu + \frac{h^3}{6}\frac{d^3z}{ds^3} + \varepsilon_3$$

sind, so ist sein Abstand:

$$\delta = \frac{h^3}{6}\left(\frac{d^3x}{ds^3}\cos\varphi + \frac{d^3y}{ds^3}\cos\psi + \frac{d^3z}{ds^3}\cos\chi\right) + E,$$

unter E wie unter ε_1, ε_2, ε_3 Größen vierter Ordnung in bezug auf h verstanden; mit Benutzung der Formeln **177**, (13) und **180**, (16) setzt sich dies um in:

$$(17) \qquad \delta = \frac{\varrho h^3}{6}\varDelta + E = -\frac{h^3}{6\varrho T} + E.$$

Und nun sieht man, daß für $\frac{1}{T} > 0$ und bei Verfolgung der Kurve im Sinne des wachsenden Bogens der Punkt M' von der positiven zur negativen Seite der Oskulationsebene übergeht (Fig. 99a), für $\frac{1}{T} < 0$ von der negativen zur positiven Seite (Fig. 99b).

181. Beispiele. 1) Für die Schraubenlinie

$$x = a\cos u$$
$$y = a\sin u$$
$$z = bu$$

ist aus früheren Beispielen bereits bekannt:

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$\varrho = \frac{a^2+b^2}{a};$$

ferner berechnet sich:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{du}\frac{du}{ds} = -\frac{a\sin u}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{a\cos u}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d^2x}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = -\frac{a\cos u}{a^2+b^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{a\sin u}{a^2+b^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \frac{d^3y}{du^3}\left(\frac{du}{ds}\right)^3 = \frac{a\sin u}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{a\cos u}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^3z}{ds^3} = 0.$$

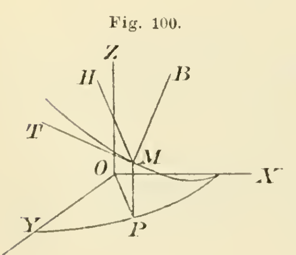


Fig. 100.

Mit Hilfe dieser Einzelwerte findet man für die positive Richtung der Hauptnormale

$$\cos\lambda = -\cos u$$
$$\cos\mu = -\sin u$$
$$\cos\nu = 0;$$

diese, MH (Fig. 100), ist also dem OP entgegengesetzt gerichtet.

Ferner hat man für die positive Richtung MB der Binormale die Kosinus:

$$\cos\varphi = \frac{b \sin u}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\psi = -\frac{b\cos u}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\chi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

die Binormale bildet demnach mit der z-Achse einen konstanten Winkel.

Endlich ist

$$\varDelta = \frac{a^2 b}{(a^2+b^2)^3}\begin{vmatrix} -\sin u & \cos u & 1 \\ -\cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & -\cos u & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^2 b}{(a^2+b^2)^3}$$

und daraus berechnet sich die ebenfalls konstante Torsion:

$$\frac{1}{T} = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

2) Die gewöhnliche Schraubenlinie ist ein besonderer Fall der *allgemeinen zylindrischen Schraubenlinie*, einer Kurve, welche die Erzeugenden einer beliebigen Zylinderfläche unter einem konstanten Winkel schneidet. Macht man die z-Achse des Koordinatensystems den Erzeugenden der Zylinderfläche parallel, so sind alle zylindrischen Schraubenlinien durch die Beziehung

$$\cos\gamma = k$$

charakterisiert, welche aussagt, daß die Tangente mit der z-Achse beständig denselben Winkel einschließt. Aus dieser Beziehung folgt

$$\frac{d\cos\gamma}{ds} = 0$$

und hieraus vermöge der letzten Frenetschen Formel der Gruppe (I), 179,

$$\cos\nu = 0;$$

damit gibt die letzte Formel der Gruppe (II) $\frac{d\cos\chi}{ds} = 0$, also

$$\cos\chi = k';$$

und die letzte Formel der Gruppe (III) führt hiermit zu

$$\frac{\varrho}{T} = -\frac{k}{k'}.$$

Die letzten drei Ergebnisse haben folgende geometrische Bedeutung: Bei allen zylindrischen Schraubenlinien ist die

Hauptnormale senkrecht zur Erzeugenden der Zylinderfläche, die Binormale zur Erzeugenden unter einem konstanten Winkel geneigt und das Verhältnis der beiden Krümmungen für alle Punkte der Kurve konstant.

§ 3. Tangenten und Tangentialebenen, Normalen und Normalebenen einer krummen Fläche.

182. Analytische Darstellung krummer Flächen. Diejenige analytische Darstellung einer krummen Fläche, welcher wir zunächst begegnet sind (**45**) — sie ist die in älterer Zeit fast ausschließlich gebrauchte — besteht darin, daß im rechtwinkligen Koordinatensysteme z als Funktion der Variablen x, y gegeben ist:

$$z = f(x, y). \tag{1}$$

Wo wir im Folgenden von dieser Darstellung Gebrauch machen, setzen wir voraus, daß die Funktion f nach der Taylorschen Formel entwickelbar sei, mindestens bis zu den Gliedern zweiter Ordnung, daß sie also vollständige Differentialquotienten der zwei ersten Ordnungen besitze, für welche wir die allgemein üblichen Bezeichnungen gebrauchen werden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Allgemeiner als (1) ist die Gleichungsform:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

welche z als implizite Funktion von x, y bestimmt; die Ableitung der Differentialquotienten von z auf Grund dieser Gleichung ist in **59** erläutert worden.

Zu der allgemeinsten Darstellung gelangt man von der geometrischen Erzeugung einer krummen Fläche durch stetige Bewegung und Formänderung einer Kurve ausgehend. Wenn die Koordinaten x, y, z eines veränderlichen Punktes M als stetige Funktionen eines Parameters u gegeben sind, so beschreibt M, indem u seinen Bereich stetig durchläuft, eine Kurve; und enthalten jene Funktionen noch einen zweiten Parameter v, in bezug auf welchen sie ebenfalls stetig sind, so beschreibt die Kurve, während v das ihm zugehörige Inter-

vall stetig durchläuft, eine krumme Fläche. Demnach ist eine solche auch durch drei Gleichungen von der Form

$$(3) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

darstellbar.

Erteilt man in (3) dem v einen festen Wert v_1, so stellen sie eine Kurve dar, welche der Fläche angehört oder ihr aufgeschrieben ist und die man kurzweg die Kurve v_1 nennen kann.

Aber auch einem festen Werte u_1 von u entspricht eine Kurve auf der Fläche, welche die Kurve u_1 heißen soll.

Durch den Schnitt beider Kurven, der sogenannten *Parameterkurven*, ist ein Punkt M_1 auf der Fläche bestimmt und man nennt $u = u_1$, $v = v_1$ seine *krummlinigen Koordinaten;* die gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinaten dieses Punktes drücken sich durch

$$x = x(u_1, v_1), \qquad y = y(u_1, v_1), \qquad z = z(u_1, v_1)$$

aus.

Die zuletzt erklärte Darstellungsweise krummer Flächen ist durch Gauß*) in die Flächentheorie eingeführt und ausgebildet worden; sie hat sich für tiefer gehende Untersuchungen als die geeignetste erwiesen.

Von der Darstellung (3) gelangt man durch Elimination von u, v zu der Form (2) und, falls hier Lösung nach z möglich ist, zu der Form (1).

Neben der Beziehung einer Fläche auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem ist die Darstellung in räumlichen Polarkoordinaten φ, θ, r am gebräuchlichsten; die Transformation der ersteren Koordinaten in die letzteren geschieht (68, I) mittels der Gleichungen:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta.$$

183. Die Tangentialebene als Ort der Tangenten. Es sei M mit den Koordinaten $x/y/z$ ein Punkt der Fläche

*) Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827. Deutsch von A. Wangerin in Ostwalds Klassikern (Nr. 5).

(1), P seine Projektion auf der xy-Ebene; durch M werde auf der Fläche eine beliebige Kurve C gezogen, welche sich in der xy-Ebene in die durch P laufende Linie von der Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{4}$$

projizieren möge. Nimmt man auf C einen zweiten Punkt M' an — seine Koordinaten seien:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + h \\ y_1 &= y + k \\ z_1 &= z + ph + qk + \varepsilon, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei ε eine Größe bedeutet, die in bezug auf h, k von der zweiten Ordnung ist, — und verbindet ihn mit M, so hat die Gerade MM' bei beständiger Annäherung von M' an M die Tangente MT an die Kurve C im Punkte M zur Grenze; gleichzeitig nähert sich die Projektion von MM' auf der xy-Ebene der Tangente an die Kurve (4) im Punkte P als Grenze, und diese Tangente hat den aus (4) bestimmbaren Richtungskoeffizienten

$$\varpi = \lim_{h=0} \frac{k}{h}. \tag{6}$$

Man nennt die Tangente MT an die Kurve C auch *eine Tangente der Fläche* im Punkte M; ihre Gleichungen ergeben sich aus den Gleichungen der Geraden MM':

$$\xi - x = \frac{\eta - y}{\frac{k}{h}} = \frac{\zeta - z}{p + q\frac{k}{h} + \frac{\varepsilon}{h}}$$

für $\lim h = 0$, lauten also:

$$\xi - x = \frac{\eta - y}{\varpi} = \frac{\zeta - z}{p + q\varpi}. \tag{7}$$

Um den geometrischen Ort all dieser Tangenten zu bestimmen, hat man zwischen den beiden Gleichungen (7) den Parameter ϖ zu eliminieren; schreibt man die Gleichungen zu diesem Zwecke in der Form:

$$\begin{aligned} (\xi - x)\varpi &= \eta - y \\ q(\xi - x)\varpi &= \zeta - z - p(\xi - x), \end{aligned}$$

so vollzieht sich die Elimination durch Multiplikation der ersten Gleichung mit q und nachherige Subtraktion; das Resultat lautet:

$$(8) \qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Der geometrische Ort der Tangenten, welche man an eine krumme Fläche in einem Punkte M legen kann, ist hiernach eine durch diesen Punkt gehende Ebene; man definiert sie als *Tangentialebene* der Fläche im Punkte M, nennt diesen den *Tangential-* oder *Berührungspunkt;* (8) ist die Gleichung der Ebene.

Aus dieser Definition der Tangentialebene läßt sich eine andere ableiten, welche dem geometrischen Inhalte nach das Analogon zur Definition der Tangente an eine Kurve bildet. Nimmt man nämlich auf zwei durch M geführten Kurven je einen Punkt M', M'' an, so konvergieren die Geraden MM', MM'' bei beständiger Annäherung von M' und M'' an M gegen die Tangenten jener Kurven im Punkte M, die Ebene $MM'M''$ also hat die Tangentialebene zur Grenze, wenn nur die beiden Tangenten voneinander verschieden sind.

Hiernach ist die Tangentialebene im Punkte M die Grenze einer durch M und zwei weitere Punkte M', M'' der Fläche gelegten Ebene, wenn diese Punkte sich irgendwie, jedoch in verschiedenen Richtungen, dem Punkte M als Grenze nähern.

Wäre die Fläche durch die Gleichung (2) gegeben, so hätte man, um die Gleichung der Tangentialebene zu erhalten, p, q in (8) durch die Werte (60)

$$p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

zu ersetzen; dies führt zu der Gleichungsform

$$(9) \qquad (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Der Bestand der Gleichungen (8), (9) und damit zugleich die Existenz der Tangentialebene setzt voraus, daß p, q, beziehungsweise $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ bestimmte Größen sind und daß die drei letztgenannten nicht sämtlich Null sind; das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

würde also einen Punkt charakterisieren, in welchem von einer Tangentialebene schlechtweg nicht gesprochen werden kann, einen *singulären Punkt* der Fläche, wie ein solcher beispielsweise die Spitze eines Kegels ist.

184. Die Tangentialebene als oskulierende Ebene. Die Tangentialebene läßt noch eine andere Auffassung zu, welche zugleich geeignet ist, das Verhalten der Fläche zur Tangentialebene in der Umgebung des Berührungspunktes näher kennen zu lehren.

Jede Ebene, welche man durch den Punkt M auf der Fläche (1) legen kann, hat eine Gleichung von der Form:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0; \tag{10}$$

wir denken uns eine dieser Ebenen herausgehoben und bestimmen den Abstand des Punktes M' mit den Koordinaten (5) von derselben; er ist

$$\delta = \frac{(A + Cp)h + (B + Cq)k}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \varepsilon',$$

wobei ε' wieder eine Größe zweiter Ordnung bedeutet.

Im allgemeinen ist also δ in bezug auf h und k von der ersten Ordnung, ändert sein Vorzeichen, wenn h, k es ändern, die Ebene (10) *schneidet* daher im allgemeinen die Fläche in M.

Hat aber die Ebene eine solche Stellung, daß

$$A + Cp = 0, \qquad B + Cq = 0$$

ist, dann wird δ von der zweiten Ordnung. Die Ebene ist dadurch völlig bestimmt; denn setzt man in (10) $A = - Cp$, $B = - Cq$, so geht die Gleichung über in

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

Man kann also die Tangentialebene als diejenige unter den Ebenen durch den Punkt M definieren, welche sich der krummen Fläche in der Umgebung des Punktes am engsten anschließt, sie oskuliert, oder in Anwendung einer in **145** eingeführten Terminologie als diejenige Ebene, welche mit der Fläche im Punkte M eine Berührung mindestens der ersten Ordnung aufweist.

Führt man die Entwicklung von z_1 in (5) weiter, so wird

$$z_1 = z + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \eta,$$

wo nunmehr η eine Größe der dritten Ordnung bezeichnet; für den Abstand des Punktes M' von der Ebene (10) ergibt sich dann der Ausdruck:

$$\delta = \frac{(A + Cp)h + (B + Cq)k + \frac{C}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \eta'$$

und insbesondere für seinen Abstand von der Tangentialebene

(11) $$\delta = \frac{rh^2 + 2shk + tk^2}{2\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \eta'',$$

wobei auch η'' von der dritten Ordnung ist.

Hat das Trinom $rh^2 + 2shk + tk^2$ für alle Wertverbindungen h/k, ausgenommen $0/0$, das nämliche Vorzeichen, so liegt die Fläche in der nächsten Umgebung des Punktes M ganz zu *einer* Seite der Tangentialebene. Die Bedingung dafür ist (**121**):

(12) $$rt - s^2 > 0.$$

Ist das Trinom verschiedener Zeichen fähig, was dann der Fall ist, wenn

(13) $$rt - s^2 < 0,$$

so liegt die Fläche in der Umgebung des Punktes M teils zur einen, teils zur andern Seite der Tangentialebene und wird daher von dieser, da Stetigkeit vorausgesetzt ist, *geschnitten*; die Grenzen der Gebiete verschiedener Vorzeichen von δ ergeben sich aus der Gleichung

$$rh^2 + 2shk + tk^2 = 0,$$

welche im Falle (13) die verschiedenen reellen Wurzeln

$$\frac{k}{h} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}$$

liefert, durch die in der xy-Ebene zwei durch den Punkt P laufende Geraden bestimmt sind; dieselben teilen die xy-Ebene in vier Gebiete; diesen entsprechen auf der Fläche vier Gebiete

der Umgebung von M, welche abwechselnd zur einen und zur andern Seite der Tangentialebene liegen.

In dem Grenzfalle

$$rt - s^2 = 0 \tag{14}$$

ist das Trinom im Zähler von δ ein vollständiges Quadrat, $\frac{1}{r}(rh + sk)^2$, δ behält im allgemeinen dasselbe Vorzeichen; aber in der durch

$$rh + sk = 0$$

bestimmten Richtung $\frac{k}{h} = -\frac{r}{s} = -\frac{s}{t}$ verschwindet der erste Teil von δ und es hängt die weitere Entscheidung von den Gliedern höherer Ordnung ab.

185. Beispiele. 1) Um für die Fläche

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

die Tangentialebene im Punkte $x/y/z$ zu bestimmen, berechne man

$$p = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{y}{b},$$

und erhält nun unter Berücksichtigung der Gleichung der Fläche

$$\zeta + z = \frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b}$$

als Gleichung jener Tangentialebene.

Ferner folgt aus

$$r = \frac{1}{a}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{b},$$

daß $rt - s^2 = \frac{1}{ab}$ positiv ist, wenn a, b gleichbezeichnet sind, und negativ, wenn sie ungleich bezeichnet sind; im ersten Falle findet bloße Berührung statt — die Fläche ist ein elliptisches Paraboloid —, im zweiten Falle ist die Berührung mit einem Schneiden verbunden — die Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid. Der Schnitt der Tangentialebene mit der Fläche ergibt sich dann wie folgt: Zu seiner Bestimmung hat man die drei Gleichungen:

$$2\zeta = \frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b}$$

$$\zeta + z = \frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b}$$

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b};$$

die erste gehört der Fläche an, die zweite der Tangentialebene, und die dritte sagt aus, daß der Punkt $x/y/z$ auf der Fläche liegt. Subtrahiert man die mit 2 multiplizierte zweite Gleichung von der Summe der beiden andern, so ergibt sich

$$0 = \frac{(\xi - x)^2}{a} + \frac{(\eta - y)^2}{b};$$

und ist z. B. $a > 0$, $b < 0$ und $b = -b'$, so zerfällt diese Gleichung in die reellen Gleichungen ersten Grades:

$$\sqrt{b'}\,\xi + \sqrt{a}\,\eta - (\sqrt{b'}\,x + \sqrt{a}\,y) = 0$$

$$\sqrt{b'}\,\xi - \sqrt{a}\,\eta - (\sqrt{b'}\,x - \sqrt{a}\,y) = 0;$$

die Projektion des gesuchten Schnittes in der xy-Ebene besteht sonach aus zwei durch $x/y/0$ gehenden Geraden, der Schnitt selbst, da er in einer Ebene liegt, ist gleichfalls ein System zweier Geraden durch den Punkt $x/y/z$. *Jede Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloids schneidet demnach die Fläche in zwei durch den Berührungspunkt laufenden Geraden.*

2) Faßt man von den drei Gleichungen

$$x = a \cos u$$

$$y = a \sin u$$

$$z = bu$$

einer Schraubenlinie die beiden ersten zu $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} u$ zusammen, so repräsentieren die beiden Gleichungen

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} u, \qquad z = bu$$

die Hauptnormale im Punkte vom Parameter u (181, 1); eliminiert man u, so ergibt sich

$$z = b \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \tag{15}$$

als Gleichung des Ortes aller Hauptnormalen. Diese transzendente Fläche heißt das *gerade Schraubenkonoid* oder die *Wendel-*

fläche; sie wird also durch eine Gerade erzeugt, welche längs der Schraubenlinie gleitet und die Achse des Schraubenzylinders unter rechtem Winkel schneidet.

Für diese Fläche ist

$$p = -\frac{by}{x^2 + y^2}, \quad q = \frac{bx}{x^2 + y^2},$$

$$r = \frac{2bxy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad s = -\frac{b(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad t = -\frac{2bxy}{(x^2 + y^2)^2},$$

daher lautet die Gleichung ihrer Tangentialebene im Punkte $x/y/z$:

$$\zeta - z = \frac{b(x\eta - y\xi)}{x^2 + y^2}.$$

Weil ferner

$$rt - s^2 = -\frac{b^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

so ist in jedem Punkte mit der Berührung ein Schneiden verbunden.

3) Um für die algebraische Fläche dritter Ordnung

$$xyz = a^3$$

die Tangentialebene zu bestimmen, setze man

$$F(x, y, z) = xyz - a^3,$$

leite daraus

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = zx, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy$$

ab und trage dies in (9) ein; unter Berücksichtigung der Gleichung der Fläche ergibt sich

$$yz\xi + zx\eta + xy\zeta = 3a^3$$

als Gleichung der Tangentialebene.

Die Abschnitte auf den Koordinatenachsen sind hiernach

$$\alpha = \frac{3a^3}{yz} = 3x, \quad \beta = \frac{3a^3}{zx} = 3y, \quad \gamma = \frac{3a^3}{xy} = 3z.$$

Das Volumen des Tetraeders aus der Tangentialebene und den Koordinatenebenen

$$\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma = \frac{9}{2}xyz = \frac{9}{2}a^3$$

ist also konstant.

In dem Dreieck, welches die Koordinatenebenen aus der Tangentialebene ausschneiden, spielt der Berührungspunkt die Rolle des Schwerpunktes; denn die Koordinaten des Schwerpunktes jenes Dreiecks sind

$$\frac{\alpha+0+0}{3}=x, \quad \frac{0+\beta+0}{3}=y, \quad \frac{0+0+\gamma}{3}=z.$$

4) Dem dreiachsigen Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ein reguläres koaxiales Oktaeder zu umschreiben.

Die Tangentialebene im Punkte $x/y/z$ hat die Gleichung

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1;$$

soll sie eine Seitenfläche des Oktaeders sein, so muß

$$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{z}{c^2}=\varkappa$$

sein; hieraus folgert man mittels der Gleichung der Fläche

$$\varkappa=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

demnach sind

$$x=a^2\varkappa, \quad y=b^2\varkappa, \quad z=c^2\varkappa$$

die Koordinaten des Berührungspunktes einer solchen Ebene und

$$\xi+\eta+\zeta=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

ihre Gleichung; die Gleichungen der sieben andern ergeben sich durch Zeichenabänderung auf der linken Seite.

5) Durch den Punkt $x_0/y_0/z_0$ an die Fläche $F(x, y, z)=0$ Tangentialebenen zu legen.

Der Berührungspunkt $x/y/z$ einer solchen Tangentialebene muß den Gleichungen

$$F(x, y, z)=0$$

$$(x_0-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(y_0-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(z_0-z)\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

genügen, deren erste aussagt, daß er auf der Fläche liegt, und deren zweite die Forderung ausdrückt, daß die Tangentialebene durch den gegebenen Punkt zu gehen habe.

Beide Gleichungen zusammen bestimmen eine Kurve auf der gegebenen Fläche, den Ort der Berührungspunkte aller Tangentialebenen durch $x_0/y_0/z_0$.

Fügt man die Gleichungen der Tangente

$$\frac{\xi - x}{x_0 - x} = \frac{\eta - y}{y_0 - y} = \frac{\zeta - z}{z_0 - z}$$

hinzu und eliminiert zwischen allen vier Gleichungen x, y, z, so ergibt sich der Ort der aus $x_0/y_0/z_0$ an die Fläche geführten Tangenten oder der der Fläche aus dem gegebenen Punkte *umschriebene Kegel.*

6) Parallel zu der Geraden $\frac{\xi}{\alpha} = \frac{\eta}{\beta} = \frac{\zeta}{\gamma}$ an die Fläche $F(x, y, z) = 0$ Tangentialebenen zu legen.

Der Berührungspunkt $x/y/z$ einer solchen Tangentialebene hat den Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

zu genügen. Diese bestimmen zusammen die Ortskurve aller solchen Berührungspunkte. Die in einem solchen Punkte parallel zur gegebenen Geraden geführte Tangente hat die Gleichungen

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta - z}{\gamma};$$

eliminiert man zwischen allen vier Gleichungen x, y, z, so kommt man zur Gleichung des der Fläche parallel zur gegebenen Geraden *umschriebenen Zylinders.*

Insbesondere erhält man die Gleichung des zur z-Achse parallelen Zylinders durch Elimination von z zwischen den Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

186. Normale und Normalebenen. Die im Berührungspunkte zur Tangentialebene errichtete Senkrechte wird die *Normale* der Fläche in jenem Punkte genannt. Ihre Gleichungen

ergeben sich unmittelbar aus der Gleichung der Tangentialebene und lauten:

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1}, \tag{16}$$

oder aber

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \tag{17}$$

je nach der Form der Gleichung der Fläche.

Aus (16) ergeben sich für die Projektionen der Normale auf der zx- und yz-Ebene die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \xi - x + p(\zeta - z) = 0 \\ \eta - y + q(\zeta - z) = 0. \end{aligned}\right. \tag{16*}$$

Die beiden Richtungen in der Normale sind durch die Richtungskosinus bestimmt:

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{p}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}, \qquad \cos\beta = \frac{q}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}, \\ \cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}} \end{aligned}\right. \tag{18}$$

beziehungsweise

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Die Wahl einer Richtung als der positiven geschieht von Fall zu Fall durch besondere Festsetzungen.

Jede durch die Normale im Punkte $x/y/z$ gelegte Ebene heißt eine *Normalebene* der Fläche in dem gedachten Punkte. Beachtet man, daß das Gleichungspaar (16*) die Normale als Schnittlinie zweier (projizierenden) Ebenen bestimmt, so ist

(20) $$\xi - x + p(\zeta - z) + \lambda[\eta - y + q(\zeta - z)] = 0$$

die Gleichung des Büschels der Normalebenen; jedem besonderen Werte des unbestimmten Multiplikators λ entspricht eine spezielle Normalebene.

Beispiele. 1) Der Ort der Normalen einer krummen Fläche in den Punkten einer ihr aufgeschriebenen Kurve ist eine krumme Fläche, welche man die zu dieser Kurve gehörige *Normalenfläche* (nach A. Mannheim „Normalie“) nennen kann. Die Normalenfläche ist als Ort von Geraden eine *Regelfläche* und im allgemeinen windschief.

Es ist die xy-Spur der Normalenfläche des geraden Schraubenkonoids

$$z = b \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

längs der durch $z = c$ charakterisierten Erzeugenden zu bestimmen.

Mit Hilfe der in 185, 2) zusammengestellten Differentialquotienten erhält man zunächst die Gleichungen der Normalen in einem Punkte $x/y/z$:

$$\frac{\xi - x}{by} = \frac{\eta - y}{-bx} = \frac{\zeta - z}{x^2 + y^2};$$

für die Punkte der ins Auge gefaßten Erzeugenden ist

$$z = c, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{c}{b} = \mu\text{*)};$$

demnach hat die Spur der Normale in der xy-Ebene die Koordinaten:

$$\xi = x - \frac{bc\mu}{x(1 + \mu^2)}$$

$$\eta = \mu x + \frac{bc}{x(1 + \mu^2)}$$

$$\zeta = 0;$$

die Elimination von x zwischen den ersten zwei Gleichungen gibt die Gleichung der verlangten Spur. Zum Zwecke dieser

---

*) Durch Elimination von x, y, z zwischen den letzten vier Gleichungen ergibt sich die Gleichung der Normalenfläche selbst:

$$(\xi + \mu\eta)(\mu\xi - \eta) = b(1 + \mu^2)(\zeta - c),$$

die ein hyperbolisches Paraboloid ist.

Elimination löse man die Gleichungen nach x und $\frac{1}{x}$ auf; dies gibt

$$x = \frac{\xi + \mu\eta}{1 + \mu^2}$$

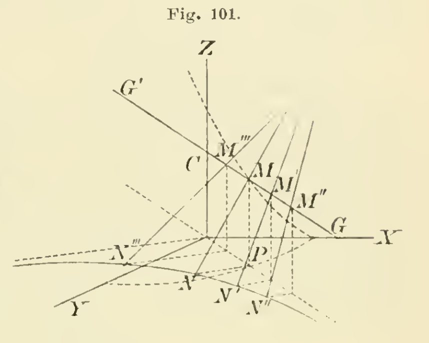
$$\frac{1}{x} = \frac{\eta - \mu\xi}{bc}$$

und daraus folgt durch Multiplikation

$$(\xi + \mu\eta)(\eta - \mu\xi) = bc(1 + \mu^2).$$

Die Spur jener Normalenfläche in der xy-Ebene ist also eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten $\xi + \mu\eta = 0$, $\mu\xi - \eta = 0$ (Fig. 101). Dem Teile CG der Erzeugenden des Schraubenkonoids entspricht der Hyperbelzweig $N''N'N$, dem Teile CG' der andere nicht gezeichnete Zweig; $N''M''$, $N'M'$, NM sind einige Lagen der Normale.

Fig. 101.



2) Durch den Punkt $x_0/y_0/z_0$ die Ebene zu legen, welche zu der Fläche

$$xyz = a^3$$

im Punkte $a/a/a$ derselben normal ist.

Man findet durch Differentiation der Flächengleichung in bezug auf x und y:

$$p = -\frac{z}{x}, \qquad q = -\frac{z}{y}$$

und hiermit als Gleichung des Büschels der Normalebenen im Punkte $a/a/a$:

$$\xi - \zeta + \lambda(\eta - \zeta) = 0;$$

soll die Ebene durch den gegebenen Punkt $x_0\, y_0\, z_0$ gehen, so muß λ so bestimmt werden, daß

$$x_0 - z_0 + \lambda(y_0 - z_0) = 0;$$

hiernach ergibt sich als Gleichung der gesuchten Normalebene:

$$(y_0 - z_0)\xi + (z_0 - x_0)\eta + (x_0 - y_0)\zeta = 0.$$

§ 4. Einhüllende Flächen.

187. Einhüllende einer einfach unendlichen Flächenschar. Es sei $f(x, y, z, u)$ eine eindeutige stetige Funktion der vier Argumente, x, y, z, u; die Gleichung

$$f(x, y, z, u) = 0 \tag{1}$$

stellt dann eine Schar von ∞^1 Flächen oder ein *einfach ausgedehntes Flächenkontinuum* dar.

Ist die Gleichung in bezug auf u algebraisch vom Grade p und liefert sie für den Punkt $x_0/y_0/z_0$ $q\ (\leqq p)$ reelle Werte von u, so sagen wir, der Raum sei durch die Flächenschar in dem genannten Punkte q-fach erfüllt. Bleibt die Zahl q für alle Punkte des Raumes dieselbe, so erfüllt das Flächensystem den Raum gleichförmig.

Wechselt die Zahl q ihren Wert, so zerfällt der Raum in Gebiete, welche ungleich vielfach erfüllt sind; an den Grenzen dieser Gebiete werden aus den in **165** näher entwickelten Gründen mindestens zwei der Werte u einander gleich. Demnach sind diese Grenzen durch das Resultat der Elimination von u zwischen den Gleichungen

$$\begin{cases} f(x, y, z, u) = 0 \\ f_u'(x, y, z, u) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

bestimmt, welches symbolisch dargestellt werden soll durch

$$\mathrm{Dskr}_u f(x, y, z, u) = 0. \tag{3}$$

Das Gebilde, welches dieser Gleichung entspricht, umfaßt auch den Ort mehrfacher Punkte (Knotenlinien usw.) der Flächen (1), falls sie solche besitzen.

Sehen wir von solchen Punkten ab, so ergibt sich die Bedeutung des in (3) enthaltenen Gebildes durch folgende Betrachtung.

Bei feststehendem Werte von u gehört zur ersten der Gleichungen (2) eine spezielle Fläche aus der Schar (1); die linke Seite der zweiten Gleichung geht aus

$$\frac{f(x, y, z, u+h) - f(x, y, z, u)}{h}$$

bei dem Grenzübergange $\lim h = 0$ hervor. Nun bestimmen die beiden Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, u) = 0 \\ f(x, y, z, u + h) = 0 \end{cases}$$

die Durchschnittskurve der Flächen, die den Parameterwerten u und $u + h$ entsprechen; durch diese Kurve geht aber auch diejenige Fläche, welche die Gleichung

$$(5) \qquad f(x, y, z, u + h) - f(x, y, z, u) = 0$$

hat; zur Bestimmung jener Durchschnittskurve kann also statt der zweiten der Gleichungen (4) auch diese letzte Gleichung herangezogen werden, die aber nach dem Mittelwertsatze in 37 wieder ersetzt werden kann durch

$$hf_u'(x, y, z, u + \theta h) = 0$$

oder endlich durch

$$(5^*) \qquad f_u'(x, y, z, u + \theta h) = 0.$$

Demnach ist die Schnittlinie der beiden Flächen (4) auch durch das Gleichungspaar

$$f(x, y, z, u) = 0$$
$$f_u'(x, y, z, u + \theta h) = 0$$

bestimmt. Indem nun h gegen Null konvergiert, bewegt sich die Schnittlinie auf der Fläche u gegen eine Grenzlage, welche dargestellt ist durch das Gleichungspaar

$$f(x, y, z, u) = 0$$
$$f_u'(x, y, z, u) = 0,$$

das zusammenfällt mit dem Gleichungspaar (2). Diese Grenzlage der Schnittkurve nennt man die *Charakteristik*. Mit stetig variierendem u kommt sowohl die Fläche wie die auf ihr liegende Charakteristik in Bewegung und letztere beschreibt dabei eine neue Fläche, welche man die *Einhüllende* oder *Enveloppe* der Flächenschar (1) nennt; die Flächen dieser Schar heißen die *Eingehüllten*.

Damit ist die geometrische Bedeutung der Gleichung (3) gewonnen. Man kann sich die Einhüllende auch durch die Gleichung

$$f(x, y, z, u) = 0$$

vertreten denken, wenn man darin unter u diejenige Funktion von x, y, z versteht, die sich durch Auflösung von

$$f_u'(x, y, z, u) = 0$$

nach u ergibt; denn in diesem Vorgange liegt der Eliminationsprozeß.

188. Die Rückkehrkante der Einhüllenden. Die Beziehung der eingehüllten Flächen zur Einhüllenden spricht sich in dem folgenden Satze aus: *Jede eingehüllte Fläche wird von der Einhüllenden längs der zugehörigen Charakteristik berührt.*

Vermöge der soeben gemachten Bemerkung über die analytische Darstellung der Einhüllenden hat die Tangentialebene im Punkte $x/y/z$ derselben die Gleichung:

$$(\xi - x)\left[f_x' + f_u' \frac{\partial u}{\partial x}\right] + (\eta - y)\left[f_y' + f_u' \frac{\partial u}{\partial y}\right] \\ + (\zeta - z)\left[f_z' + f_u' \frac{\partial u}{\partial z}\right] = 0;$$

weil aber für die Punkte der Einhüllenden $f_u' = 0$ ist, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\xi - x)f_x' + (\eta - y)f_y' + (\zeta - z)f_z' = 0;$$

das aber ist auch die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche u der Schar, aber in einem Punkte, für den $f_u' = 0$, d. h. in einem Punkte der Charakteristik. Es fallen also die Tangentialebenen der Einhüllenden und der eingehüllten Fläche in einem solchen Punkte zusammen, beide Flächen berühren sich dort.

Auf der Einhüllenden kann aber noch eine besondere Erscheinung zutage treten. Die Charakteristik auf der Fläche u, welche durch das Gleichungspaar

$$(6) \qquad f(x, y, z, u) = 0, \qquad f_u'(x, y, z, u) = 0$$

mit festem u bestimmt ist, kann nämlich von der Fläche des Systems mit dem Parameter $u + h$, d. i. von

$$f(x, y, z, u + h) = 0$$

oder

$$(7) \quad f(x, y, z, u) + f_u'(x, y, z, u)h + f_{u^2}''(x, y, z, u + \theta h)\frac{h^2}{2} = 0$$

in einzelnen Punkten geschnitten werden; für diese Punkte

bestehen die Gleichungen (6) und (7) zugleich und vereinfacht sich daher die letzte zu

$$f''_{u^2}(x, y, z, u + \theta h) = 0;$$

wenn nun h gegen Null konvergiert, so werden sich diese Schnittpunkte auf der Charakteristik (6) bewegen und können sich gewissen Grenzpunkten nähern, zu deren Bestimmung die Gleichungen

$$(8) \quad f(x, y, z, u) = 0, \quad f'_u(x, y, z, u) = 0, \quad f''_{u^2}(x, y, z, u) = 0$$

zu dienen hätten. Mit stetig sich änderndem u kommen diese Grenzpunkte in Bewegung und ihr Erzeugnis ist eine auf der Einhüllenden gelegene Kurve, welche man als die *Rückkehrkante* der Einhüllenden bezeichnet, weil sie, wenn sie vorhanden ist, in Form einer scharfen Kante auf der Fläche erscheint. Analytisch ist die Kurve durch die drei Gleichungen (8) oder durch die zwei ersten derselben gegeben, wenn darin für u der aus der dritten resultierende Wert eingesetzt wird.

Jede Charakteristik wird in den ihr angehörigen Grenzpunkten von der Rückkehrkante berührt.

Auf Grund der zuletzt gemachten Bemerkung ist nämlich die Richtung der Tangente in einem Punkte $x/y/z$ der Rückkehrkante durch das Gleichungspaar

$$\left(f'_x + f'_u \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(f'_y + f'_u \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \left(f'_z + f'_u \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz = 0$$

$$\left(f''_{ux} + f''_{u^2} \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(f''_{uy} + f''_{u^2} \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy + \left(f''_{uz} + f''_{u^2} \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz = 0$$

bestimmt (170); weil aber in den Punkten der Rückkehrkante $f'_u = 0$, $f''_{u^2} = 0$ ist, so reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = 0$$

$$f''_{ux} dx + f''_{uy} dy + f''_{uz} dz = 0;$$

diese Gleichungen bestimmen aber auch die Richtung der Tangente in einem Punkte der Charakteristik (2), aber in einem Punkte, für welchen auch $f''_{u^2} = 0$ ist, d. h. in einem Grenzpunkte.

Die Rückkehrkante, falls eine solche zustande kommt, ist demnach Einhüllende der Charakteristiken.

189. Beispiele. 1) Aus den Punkten der Parabel $y^2 + 4ax = 0$ in der xy-Ebene eines räumlichen Koordinatensystems werden Kugeln beschrieben, welche durch den Scheitel der Parabel, also durch den Ursprung des Systems gehen; es ist die Einhüllende dieser Kugeln zu bestimmen.

Eine Kugel des Systems ist durch

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

dargestellt, wenn $\beta^2 + 4a\alpha = 0$ ist; eliminiert man mit Hilfe dessen α, so lautet die Gleichung des Kugelsystems:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{\beta^2}{2a}x - 2\beta y = 0$$

und ist β der alleinige veränderliche Parameter. Bildet man die Diskriminante der Gleichung in bezug auf β, so ergibt sich

$$(x^2 + y^2 + z^2)x = 2ay^2.$$

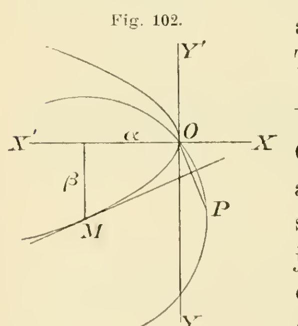
Dies ist die Gleichung der Einhüllenden, einer algebraischen Fläche dritter Ordnung.

Die Charakteristik auf der Kugel vom Parameter β ist durch die Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{\beta^2}{2a}x - 2\beta y = 0 \\[2ex] \dfrac{\beta}{a}x - 2y = 0 \end{cases}$$

bestimmt; da die zweite eine Ebene durch die z-Achse darstellt, deren xy-Spur auf der Tangente an die Parabel im Punkte α/β, welche Tangente den Richtungskoeffizienten $-\frac{2a}{\beta}$ hat, senkrecht steht, so ist die Charakteristik der durch diese Ebene aus der Kugel geschnittene Kreis, der sich in die Sehne OP (Fig. 102) projiziert. Der Ort des Punktes P ist eine Zissoide (168, 4)); daraus folgt, daß die gefundene Fläche der Ort jener Kreise ist, welche die Leitstrahlen OP einer gewissen Zissoide $((x^2 + y^2)x = 2ay^2)$ zu Durchmessern haben und deren Ebenen auf der Ebene dieser Zissoide normal stehen.

Fig. 102.



Um die Rückkehrkante zu bestimmen, hat man zu den Gleichungen (A) noch jene Gleichung hinzuzufügen, die durch Differentiation der zweiten nach β entsteht; diese Gleichung lautet aber

$$\frac{x}{a} = 0,$$

woraus $x = 0$ folgt; dies in die Gleichungen (A) eingeführt gibt auch noch $y = 0$ und $z = 0$. Die Rückkehrkante zieht sich also hier auf einen Punkt zusammen, der ein singulärer Punkt der Fläche ist.

2) Die Einhüllende einer variablen Kugel zu ermitteln, deren Mittelpunkt sich stetig auf einer Geraden bewegt.

Wählt man die Gerade zur z-Achse, so hat die Schar der Kugeln die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + (z - u)^2 = 2\varphi(u);$$

Differentiation nach u ergibt:

$$z = u - \varphi'(u),$$

woraus hervorgeht, daß die Charakteristik ein Kreis ist, dessen Ebene normal zur z-Achse ist und dessen Mittelpunkt in dieser Achse liegt. Löst man zum Zwecke der Elimination die zweite Gleichung nach u auf, so ergibt sich dafür eine Funktion von z, welche in die erste Gleichung eingetragen dieser schließlich die Form $x^2 + y^2 = f(z)$ oder, nach Umkehrung,

$$z = F(x^2 + y^2) \tag{9}$$

verleiht. Dies ist also die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen, deren Rotationsachse die z-Achse ist.

3) Die Einhüllende einer Kugel konstanten Halbmessers, deren Mittelpunkt auf einer gegebenen Kurve sich bewegt, nennt man *Röhrenfläche*, die Kurve heißt ihre Achse.

Sind

$$x_0 = X(u)$$
$$y_0 = Y(u)$$
$$z_0 = Z(u)$$

die Gleichungen der Achse, so hat die Kugelschar die Gleichung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2;$$

fügt man dazu die durch Differentiation nach u entstandene:

$$(x - x_0)\frac{dx_0}{du} + (y - y_0)\frac{dy_0}{du} + (z - z_0)\frac{dz_0}{du} = 0,$$

so ergäbe die Elimination von u zwischen beiden die Gleichung der Röhrenfläche.

Die zweite Gleichung stellt aber die Normalebene der Achse im Mittelpunkte der Kugel u dar; demnach ist der durch diese Ebene aus der Kugel geschnittene größte Kreis die Charakteristik. Hiernach kann die Röhrenfläche auch durch Bewegung eines Kreises vom Halbmesser r erzeugt werden, wenn sein Mittelpunkt auf der Achse sich bewegt und seine Ebene zu ihr beständig normal ist.

Da die Einhüllende und die Eingehüllte längs der Charakteristik gemeinsame Tangentialebenen, also auch gemeinschaftliche Normalen haben, und da die Normalen einer Kugel durch den Mittelpunkt gehen, so schneiden die Normalen einer Röhrenfläche deren Achse.

Um die Rückkehrkante zu bestimmen, hätte man den obigen zwei Gleichungen noch

$$(x - x_0)\frac{d^2x_0}{du^2} + (y - y_0)\frac{d^2y_0}{du^2} + (z - z_0)\frac{d^2z_0}{du^2}$$
$$= \left(\frac{dx_0}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{du}\right)^2$$

anzufügen.

Die spezielle Röhrenfläche, deren Achse ein Kreis ist, führt den Namen *Torus*. Legt man die Achse so, daß ihre Gleichungen lauten:

$$x_0 = R\cos u$$
$$y_0 = R\sin u$$
$$z_0 = 0,$$

so erhält man die Gleichung des Torus durch Elimination von u zwischen

$$(x - R\cos u)^2 + (y - R\sin u)^2 + z^2 = r^2$$
$$x\sin u - y\cos u = 0;$$

in rationaler Form lautet sie:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Für die Rückkehrkante kommt noch die Gleichung

$$x \cos u + y \sin u = 0$$

hinzu; die beiden Gleichungen

$$x \sin u - y \cos u = 0$$
$$x \cos u + y \sin u = 0$$

werden, da ihre Determinante von Null verschieden $(=1)$ ist, nur durch $x = 0$, $y = 0$ befriedigt und hiermit ergibt die erste Gleichung

$$z^2 = r^2 - R^2;$$

dies hat nur reelle Bedeutung, wenn $R \leq r$ ist; ist $R < r$, so besteht die Rückkehrkante in zwei singulären Punkten der Fläche mit den Koordinaten $0/0/\pm\sqrt{r^2 - R^2}$; ist $R = r$, so ist nur ein solcher Punkt, $0/0/0$, vorhanden.

190. Abwickelbare Flächen. Eine spezielle Gattung von Einhüllenden einfach-unendlicher Flächenscharen erfordert vermöge ihrer Wichtigkeit besondere Betrachtung. Sind nämlich die Flächen der einfach-unendlichen, also von *einem* veränderlichen Parameter abhängigen Schar *Ebenen*, so heißt die Einhüllende eine *abwickelbare* oder *developpable Fläche* oder *Developpable* kurzweg.

Es seien A, B, C, D stetige Funktionen von u und

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{10}$$

die Gleichung der Ebenenschar. Durch Differentation derselben nach u entsteht eine neue in bezug auf x, y, z lineare Gleichung:

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0; \tag{11}$$

die Charakteristik der Developpablen ist also eine Gerade und sie selbst als Ort von Geraden eine *Regelfläche.* Ihre geradlinigen Erzeugenden sind als Charakteristiken Tangenten an die Rückkehrkante, die bestimmt ist durch die Gleichungen (10) und (11) in Verbindung mit der Gleichung

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0. \tag{12}$$

Die Einhüllende einer einfach-unendlichen Ebenenschar ist demnach eine Regelfläche, deren Erzeugende das System der Tangenten einer Raumkurve bilden, die auf der Einhüllenden als Rück-

kehrkante auftritt. Jede Ebene der Schar ist Tangentialebene der einhüllenden Fläche in allen Punkten einer Charakteristik.

Wir stellen die Gleichungen (10), (11), (12) zu einem System zusammen:

$$(13) \qquad \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

und bemerken hierzu folgendes.

Die erste Gleichung bedeutet bei festem u eine einzelne Ebene der Schar, bei variablem u die Schar selbst.

Die zwei ersten Gleichungen repräsentieren bei festem u eine einzelne Charakteristik oder Erzeugende, bei veränderlichem u deren Gesamtheit oder die Einhüllende.

Alle drei Gleichungen zusammen stellen bei festem u einen einzelnen Punkt der Rückkehrkante dar, bei variablem u die Rückkehrkante selbst, indem sie x, y, z als Funktionen von u definieren.

Im Grunde dieser Auffassung können wir nun noch nachweisen, in welcher Beziehung die Ebenen der Schar zu der Rückkehrkante stehen: *sie sind deren Oskulationsebenen.*

Um dies zu zeigen, fassen wir die Gleichungen (13) als Gleichungen der Rückkehrkante auf und differentiieren die erste nach u; dies gibt zunächst:

$$A'x + B'y + C'z + D' + A\frac{dx}{du} + B\frac{dy}{du} + C\frac{dz}{du} = 0$$

und wegen der zweiten:

$$(14) \qquad A\frac{dx}{du} + B\frac{dy}{du} + C\frac{dz}{du} = 0;$$

abermalige Differentiation nach u liefert zunächst:

$$A'\frac{dx}{du} + B'\frac{dy}{du} + C'\frac{dz}{du} + A\frac{d^2x}{du^2} + B\frac{d^2y}{du^2} + C\frac{d^2z}{du^2} = 0;$$

wenn man aber die zweite differentiiert, so erhält man unter Berücksichtigung der dritten

$$A'\frac{dx}{du} + B'\frac{dy}{du} + C'\frac{dz}{du} = 0$$

und damit reduziert sich die vorangehende Gleichung auf

$$(15) \qquad A\frac{d^2x}{du^2} + B\frac{d^2y}{du^2} + C\frac{d^2z}{du^2} = 0.$$

Aus (14) und (15) ergibt sich das Verhältnis der Richtungskoeffizienten der Oskulationsebene (174, (6)):

$$\begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} = A : B : C,$$

demnach fällt tatsächlich die Oskulationsebene im Punkte u der Rückkehrkante mit der Ebene u der Schar zusammen.

Man kann aber auch, von einer Raumkurve ausgehend, zeigen, daß die Einhüllende ihrer Oskulationsebenen identisch ist mit ihrer *Tangentenfläche* (170, 1)).

Benutzt man nämlich für die Raumkurve die früher gebrauchten Bezeichnungen und den Bogen s als Parameter, so schreibt sich die Gleichung der Oskulationsebene

$$(16) \qquad (\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = 0;$$

differentiiert man sie, um die Charakteristik zu bestimmen, nach s, so entsteht zuerst

$$(\xi - x)\frac{d\cos\varphi}{ds} + (\eta - y)\frac{d\cos\psi}{ds} + (\zeta - z)\frac{d\cos\chi}{ds}$$
$$-(\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi) = 0;$$

der letzte Klammerausdruck hat den Wert Null, und berücksichtigt man im übrigen die Gruppe (II) der Frenetschen Formeln (179), so lautet die letzte Gleichung endgültig:

$$(17) \qquad (\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu = 0$$

und stellt die rektifizierende Ebene dar; folglich wird (16) durch (17) wirklich längs einer Tangente der Raumkurve geschnitten.

191. Kategorien abwickelbarer Flächen. Man hat zwei Gattungen von abwickelbaren Flächen zu unterscheiden.

Solche Flächen, bei welchen eine eigentliche Rückkehrkante auftritt, nennt man *allgemeine Developpable.*

Solche Flächen, bei welchen die Rückkehrkante sich auf einen singulären Punkt zusammenzieht, durch welchen dann notwendig alle Charakteristiken hindurchgehen, heißen *Kegelflächen;* der singuläre Punkt wird Scheitel genannt. Rückt er

insbesondere in bestimmter Richtung ins Unendliche, so sind alle Charakteristiken parallel und die Fläche heißt *Zylinderfläche.*

Die zweite Kategorie von abwickelbaren Flächen entsteht dann, wenn zwischen den Koeffizienten A, B, C, D der Ebenenschar eine lineare (für alle Werte von u geltende) Relation

$$aA + bB + cC + D \equiv 0$$

mit konstanten Koeffizienten a, b, c besteht. Aus dieser ergibt sich nämlich durch ein- und zweimalige Differentation nach u

$$aA' + bB' + cC' + D' = 0 \tag{19}$$

$$aA'' + bB'' + cC'' + D'' = 0 \tag{20}$$

und wenn man die Gleichungen (18), (19), (20) von den korrespondierenden Gleichungen (13) subtrahiert, so tritt an die Stelle von (13) das System:

$$\left\{\begin{array}{l} A\,(x-a) + B\,(y-b) + C\,(z-c) = 0 \\ A'(x-a) + B'(y-b) + C'(z-c) = 0 \\ A''(x-a) + B''(y-b) + C''(z-c) = 0, \end{array}\right. \tag{21}$$

welches aber nicht eine Kurve, sondern den Punkt $a/b/c$ bestimmt, weil es nur durch

$$x - a = 0, \qquad y - b = 0, \qquad z - c = 0$$

befriedigt wird, sofern die Determinante

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

nicht identisch Null ist. Findet aber dieses statt, ohne daß alle Unterdeterminanten zweiten Grades verschwinden würden, so bestimmen die Gleichungen nur das Verhältnis

$$(x-a):(y-b):(z-c),$$

also eine Richtung, die Fläche wird zur Zylinderfläche.

192. Differentialgleichungen der abwickelbaren Flächen. Der geometrische Unterschied zwischen einer developpabeln und einer nicht-developpabeln Fläche drückt sich darin aus, daß die Tangentialebene in einem Punkte einer

Fläche der ersten Art zugleich Tangentialebene in unendlich vielen anderen Punkten ist, während sie bei einer Fläche der zweiten Art — von Ausnahmefällen abgesehen — nur in dem einem Punkte berührt. Es entsteht die Frage, wie sich dieser Unterschied analytisch ausdrückt, mit anderen Worten, welche besonderen Eigenschaften der Funktion $f(x, y)$ zukommen, die die Applikate z einer developpablen Fläche darstellt.

Die erste der Gleichungen (13), als Gleichung einer Tangentialebene an die durch die beiden ersten Gleichungen dargestellte abwickelbare Fläche aufgefaßt, enthält außer den veränderlichen Koordinaten nur einen Parameter in den Koeffizienten. Denkt man sich daher die Gleichung der Tangentialebene an eine solche Fläche in der Form

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

oder

$$p\xi + q\eta - \zeta + z - px - qy = 0$$

geschrieben, so sind die Koeffizienten $p, q, z - px - qy$ nur von einem Parameter abhängig; daher hängen auch p, q voneinander ab, d. h. es ist

$$q = \varphi(p). \tag{22}$$

Diese Gleichung, in welcher φ eine willkürliche Funktion bedeutet, charakterisiert also die abwickelbaren Flächen und wird als *Differentialgleichung erster Ordnung* dieser Flächengattung bezeichnet, weil sie eine Beziehung zwischen Differentialquotienten erster Ordnung darstellt.

Man kann indessen aus (22) noch eine andere für die abwickelbaren Flächen charakteristische Gleichung ableiten, welche frei ist von einer willkürlichen Funktion. Differentiiert man nämlich (22) einmal nach x, dann nach y, so ergeben sich die Gleichungen:

$$s = \varphi'_p(p)\, r$$

$$t = \varphi'_p(p)\, s$$

und durch Division weiter $\frac{s}{t} = \frac{r}{s}$ oder

$$rt - s^2 = 0. \tag{23}$$

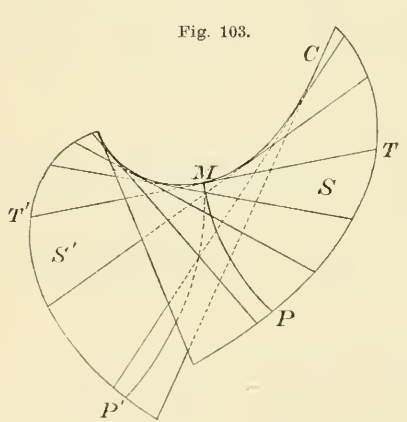
Diese Gleichung (vgl. **184**), welche eine Beziehung ausdrückt, die für jeden Punkt einer developpablen Fläche zwischen den

drei Differentialquotienten zweiter Ordnung zu Recht besteht, nennt man die *Differentialgleichung zweiter Ordnung* der abwickelbaren Flächen.

193. Die Abwicklung. Die Erzeugenden einer allgemeinen Developpabeln, als Tangenten an ihre Rückkehrkante, zerfallen durch den Berührungspunkt in je zwei Strahlen; die Strahlen MT (Fig. 103), welche der positiven Richtung der Tangente entsprechen, bilden einen Mantel S, die anderen Strahlen MT' einen zweiten Mantel S', und beide Mäntel vereinigen sich in der Kurve C zu einer scharfen Kante; ein ebener Schnitt wie PMP' besteht demgemäß aus zwei Ästen, welche sich im Punkte M der Rückkehrkante zu einer Spitze verbinden.

Ihren Namen haben die abwickelbaren Flächen auf Grund der folgenden Eigenschaft erhalten. Wenn der Punkt M sich stetig auf der Kurve C bewegt, so vollführt die zu ihm gehörige Oskulationsebene auch eine stetige Bewegung und wälzt sich auf der abwickelbaren Fläche, sie beständig berührend; dabei nimmt sie nach und nach alle geradlinigen Erzeugenden und somit alle Punkte der Fläche in sich auf. Stellt man sich vor, daß jeder Punkt der Fläche in dem Augenblicke, wo er in die sich wälzende Tangentialebene zu liegen kommt, auf ihr haften bleibt, so wird diese Ebene nach und nach die ganze Fläche in sich aufnehmen, und zwar so, daß dabei keine Faltungen und Dehnungen, sondern nur Biegungen erfolgen und daher alle Linien, die vordem auf der Fläche waren, in unveränderter Länge, aber in veränderter Form in die Ebene übergehen. Man sagt dann, die Fläche sei auf der Ebene *abgewickelt.* Die Abwicklung bedeckt die Ebene zweifach, indem die beiden Mäntel nun übereinander zu liegen kommen, ihre

Fig. 103.



gemeinsame Begrenzung ist diejenige Kurve, in welche sich die Rückkehrkante bei dem Abwicklungsprozesse transformiert.

Weil Bogenlängen bei der Abwicklung unverändert bleiben und weil zwei Tangenten von C in der Abwicklung einen Winkel einschließen, welcher die wirkliche Drehung mißt, durch welche die eine Tangente im Raume in die andere übergeführt wird (173), so hat die transformierte Rückkehrkurve in jedem Punkte eine Krümmung, welche der Flexion der Raumkurve in dem korrespondierenden Punkte gleichkommt. Die Flexion der Rückkehrkante bleibt also bei der Abwicklung unverändert erhalten, die Torsion aber geht verloren, weil aus der Raumkurve eine ebene Kurve wird.

194. Einhüllende einer zweifach-unendlichen Flächenschar. Die Funktion $f(x, y, z, u, v)$ sei eindeutig und stetig in bezug auf die Koordinaten x, y, z wie in bezug auf die voneinander unabhängigen Parameter u, v; dann stellt die Gleichung

$$f(x, y, z, u, v) = 0 \tag{24}$$

ein System von ∞^2 Flächen oder ein *zweifach ausgedehntes Flächenkontinuum* dar. Auch bei einem solchen kann unter Umständen von einer Einhüllenden gesprochen werden, doch in einem gegenüber dem früheren Falle (187) veränderten Sinne.

Erteilt man nämlich dem v einen festen Wert, so stellt die Gleichung (24) eine einfach-unendliche Flächenschar dar, deren Einhüllende im früheren Sinne, wenn sie existiert, durch Elimination von u zwischen den Gleichungen

$$f(x, y, z, u, v) = 0, \qquad f'_u(x, y, z, u, v) = 0 \tag{25}$$

bestimmt wird. Diese Elimination kann man sich so vollzogen denken, daß man aus der zweiten Gleichung u ausdrückt und den Wert dafür, der aus x, y, z, v sich zusammensetzt, in die erste Gleichung einträgt.

Die Gleichung der Einhüllenden enthält nun v, und denkt man sich dieses jetzt veränderlich, so hat man es neuerdings mit einer einfach-unendlichen Flächenschar zu tun, deren Einhüllende durch Elimination von v zwischen

$$f(x, y, z, u, v) = 0, \quad f'_v(x, y, z, u, v) + f'_u(x, y, z, u, v) \frac{\partial u}{\partial v} = 0$$

erhalten wird; die zweite dieser Gleichungen ist aus der ersten gebildet, nachdem darin u in der besprochenen Weise durch den Ausdruck in x, y, z, v ersetzt worden ist; sie erfährt aber vermöge (25) eine Vereinfachung und lautet schließlich

$$(26) \qquad f'_v(x, y, z, u, v) = 0.$$

Diese zuletzt bestimmte Einhüllende, deren Gleichung man also, alles zusammenfassend, dadurch erhält, daß man zwischen den drei Gleichungen (25) und (26), oder kurz zwischen

$$f = 0, \qquad f'_u = 0, \qquad f'_v = 0$$

beide Parameter u, v eliminiert, nennt man die *Einhüllende* des zweifach unendlichen Flächensystems.

Auf der Fläche u/v entsteht bei dem ersten Prozesse eine Charakteristik der Fläche (25); auf dieser entsteht bei dem zweiten Prozesse abermals eine Charakteristik, welche die frühere im allgemeinen in einer Anzahl Punkte schneidet: in diesen Punkten wird die Fläche u/v des Systems von der schließlichen Einhüllenden berührt. Darin also liegt der Unterschied gegenüber dem früheren Falle, daß nunmehr jede Eingehüllte von der Einhüllenden nur in einer Anzahl vereinzelter Punkte berührt wird.

Beispiele. 1) Jedem Punkte eines dreiachsigen Ellipsoids mit den Halbachsen a, b, c wird eine Ebene in der Weise zugeordnet, daß sie durch die Projektionen des Punktes auf den Hauptachsen der Fläche hindurchgeht. Es ist die Einhüllende dieses Ebenensystems zu bestimmen.

Die Hauptachsen mögen als Koordinatenachsen gewählt werden; die reziproken Abstände der Projektionen eines Punktes M des Ellipsoids auf OX, OY, OZ von O seien u, v, w; dann lautet die Gleichung des Ebenensystems:

$$ux + vy + wz - 1 = 0,$$

wobei jedoch u, v, w an folgende Bedingung geknüpft sind:

$$\frac{1}{a^2 u^2} + \frac{1}{b^2 v^2} + \frac{1}{c^2 w^2} - 1 = 0.$$

Hier empfiehlt sich ein Rechnungsgang, der dem in 187

erläuterten analog ist. Betrachtet man u, v als die unabhängigen Parameter, so gibt die Differentiation beider Gleichungen nach u einerseits und nach v andererseits:

$$x + z\frac{\partial w}{\partial u} = 0, \qquad y + z\frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{1}{a^2u^3} + \frac{1}{c^2w^3}\frac{\partial w}{\partial u} = 0, \qquad \frac{1}{b^2v^3} + \frac{1}{c^2w^3}\frac{\partial w}{\partial v} = 0;$$

durch Elimination der Differentialquotienten erhält man die Beziehung

$$a^2u^3x = b^2v^3y = c^2w^3z$$

und es bedarf nur noch der Elimination von u, v, w zwischen diesen zwei und den ursprünglichen zwei Gleichungen. Bezeichnet man den gemeinsamen Wert der letzten drei Produkte mit p, so hat man einmal:

$$ux = \frac{p}{a^2u^2}$$

$$vy = \frac{p}{b^2v^2}$$

$$wz = \frac{p}{c^2w^2},$$

woraus sich durch Addition unter Beachtung der gegebenen Gleichungen $p = 1$ ergibt; andererseits ist mit Benutzung dieses Wertes von p:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{a^3u^3}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{1}{b^3v^3}$$

$$\frac{z}{c} = \frac{1}{c^3w^3}$$

und daraus erhält man als Gleichung der Einhüllenden:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\,.$$

Zwei Bemerkungen mögen hinzugefügt werden. Für alle Punkte eines Hauptschnittes des Ellipsoids fällt die Ebene des Systems mit der Ebene dieses Hauptschnittes zusammen: demnach ist eine solche Ebene Tangentialebene an die Einhüllende nicht in einem einzelnen Punkte, sondern längs einer Linie; in der

Tat hat die Fläche in den Koordinatenebenen scharfe Kanten (Schneiden).

Für die Scheitelpunkte des Ellipsoids wird die Ebene des Systems unbestimmt, dieser Umstand deutet auf singuläre Punkte an der Einhüllenden hin; diese hat denn auch in den Koordinatenachsen vierschneidige Spitzen.

2) Aus den Punkten desselben und auf das nämliche Koordinatensystem bezogenen Ellipsoids werden Kugeln beschrieben, welche durch den Mittelpunkt der Fläche gehen. Es ist die Einhüllende dieses Kugelsystems zu bestimmen.

Sind α, β, γ die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Ellipsoids, so kommt dem Kugelsystem die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = 0$$

zu, wobei jedoch

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1$$

ist. Sieht man α, β als die unabhängigen Parameter an und differentiiert beide Gleichungen danach, so entstehen die Gleichungspaare:

$$x + z\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = 0, \qquad y + z\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\alpha}{a^2} + \frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\beta}{b^2} + \frac{\gamma}{c^2}\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = 0;$$

nach Ausscheidung der Differentialquotienten ergibt sich daraus die Relation

$$\frac{a^2 x}{\alpha} = \frac{b^2 y}{\beta} = \frac{c^2 z}{\gamma} \;(= \varkappa).$$

Geht man mit den Werten

$$\alpha = \frac{a^2 x}{\varkappa}, \quad \beta = \frac{b^2 y}{\varkappa}, \quad \gamma = \frac{c^2 z}{\varkappa}$$

in die beiden gegebenen Gleichungen ein, so entsteht:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \varkappa^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}{\varkappa}$$

und durch Elimination von $\varkappa$ die Gleichung der Einhüllenden:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4\,(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2).$$

Alle Kugeln des Systems gehen durch einen Punkt, den Mittelpunkt des Ellipsoids; dieser erscheint denn auch als Punkt der Einhüllenden, aber als ein singulärer: er steht außer Zusammenhang mit der übrigen Fläche und heißt isolierter Punkt.

§ 5. Die Polarfläche einer Raumkurve.

195. Analytische Bestimmung der Polarfläche. Jedem Punkte einer Raumkurve sind drei ausgezeichnete Ebenen zugeordnet: die Oskulationsebene, die Normalebene und die rektifizierende Ebene. Jede dieser Ebenen gibt, wenn der Punkt die Kurve stetig durchläuft, Anlaß zur Entstehung einer einfach-unendlichen Ebenenschar und hiermit auch zu einer abwickelbaren Fläche.

Die abwickelbare Fläche, welche die Oskulationsebenen einhüllt, ist bereits als *Tangentenfläche* der Raumkurve besprochen und behandelt worden (190).

Die Einhüllende der Normalebenen, mit welcher wir uns jetzt beschäftigen wollen, steht zu der Kurve in wichtigen Beziehungen und führt den Namen *Polarfläche* der Kurve.

Die Einhüllende endlich der rektifizierenden Ebene wird die *rektifizierende Developpable* der Kurve genannt aus einem Grunde, welcher an einer späteren Stelle angegeben werden wird.

Alle auf die Polarfläche bezüglichen Fragen finden ihre Erledigung in jenen drei Gleichungen, auf welche die Theorie der abwickelbaren Flächen geführt hat, nämlich in der Gleichung der Normalebene eines veränderlich gedachten Punktes $M(x\,y\,z)$ der gegebenen Kurve C und jenen zwei Gleichungen, welche aus ihr durch ein- und zweimalige Differentiation nach dem veränderlichen Parameter hervorgehen; als solchen wählen wir die Bogenlänge s. Die erste Gleichung lautet:

$$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0;$$

die zweite, zunächst in unentwickelter Form:

$$(\xi - x)\frac{d\cos\alpha}{ds} + (\eta - y)\frac{d\cos\beta}{ds} + (\zeta - z)\frac{d\cos\gamma}{ds}$$
$$-\left(\frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos\beta + \frac{dz}{ds}\cos\gamma\right) = 0;$$

der letzte Klammerausdruck aber hat den Wert 1, weil $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \ldots$ daher ist mit Beachtung der Gruppe (I) der Frenetschen Formeln (179) die endgültige Form dieser Gleichung:

$$(\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu = \varrho;$$

die dritte ergibt sich zunächst in der Gestalt

$$(\xi - x)\frac{d\cos\lambda}{ds} + (\eta - y)\frac{d\cos\mu}{ds} + (\zeta - z)\frac{d\cos\nu}{ds}$$
$$- \left(\frac{dx}{ds}\cos\lambda + \frac{dy}{ds}\cos\mu + \frac{dz}{ds}\cos\nu\right) = \frac{d\varrho}{ds}$$

und weil der letzte Klammerausdruck den Wert Null hat, so hat man schließlich mit Benutzung der Gruppe (III) der Frenetschen Formeln und unter Rücksichtnahme auf die erste Gleichung:

$$(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = -T\frac{d\varrho}{ds}.$$

Demnach lautet das die Polarfläche charakterisierende Gleichungssystem:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0 \\ &(\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu = \varrho \\ &(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = -T\frac{d\varrho}{ds}. \end{aligned}$$

Einzeln und bei festem M betrachtet, stellen diese drei Gleichungen vermöge ihrer Richtungskosinus drei zueinander senkrechte Ebenen dar, welche sich in jenem Punkte M_0 der Rückkehrkante C_0 der Polarfläche schneiden, der durch dieselben drei Gleichungen zusammen bestimmt ist; sie bilden, wie sich leicht erkennen läßt, das begleitende Dreikant des Punktes M_0 der Kurve C_0.

Denn die erste Ebene ist Oskulationsebene von C_0 in M_0; die zweite schneidet sie längs der Charakteristik, also längs der Tangente an C_0 in M_0, und da sie auf ihr senkrecht steht, so ist sie die rektifizierende Ebene; die dritte, zu den beiden vorgenannten senkrecht, ist demnach Normalebene.

Daraus folgt weiter, daß die Schnittlinie der zweiten Ebene mit der dritten die Binormale, die Schnittlinie der dritten mit der ersten die Hauptnormale von C_0 in M_0 ist. Nimmt man

hinzu, daß die Richtungskosinus der Schnittlinie zweier der Ebenen (1) übereinstimmen mit den Richtungskosinus der jeweilen dritten Ebene (177), so ergibt sich der Satz: *Die Kurven C und C_0 stehen in solcher Beziehung zueinander, daß in korrespondierenden Punkten die Tangente der einen der Binormale der anderen parallel ist, die Hauptnormalen aber untereinander parallel laufen.*

Die Auflösung der Gleichungen (1) nach ξ, η, ζ werde mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet; da die Determinante des Systems den Wert 1 hat, so lautet diese Auflösung wie folgt:

$$x_0 = x + \begin{vmatrix} 0 & \cos\beta & \cos\gamma \\ \varrho & \cos\mu & \cos\nu \\ -T\frac{d\varrho}{ds} & \cos\psi & \cos\chi \end{vmatrix} = x + \varrho\cos\lambda - T\frac{d\varrho}{ds}\cos\varphi$$

$$(2)\quad y_0 = y + \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\lambda & \varrho & \cos\nu \\ \cos\varphi & -T\frac{d\varrho}{ds} & \cos\chi \end{vmatrix} = y + \varrho\cos\mu - T\frac{d\varrho}{ds}\cos\psi$$

$$z_0 = z + \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ \cos\lambda & \cos\mu & \varrho \\ \cos\varphi & \cos\psi & -T\frac{d\varrho}{ds} \end{vmatrix} = z + \varrho\cos\nu - T\frac{d\varrho}{ds}\cos\chi.$$

Bei festem s bestimmen diese Gleichungen den dem Punkte M von C korrespondierenden Punkt M_0 der Rückkehrkante C_0 der Polarfläche, bei veränderlichem s stellen sie die Kurve C_0 selbst dar.

196. Die oskulierende Kugel. Der Punkt M_0 hat für die Kurve C im Punkte M noch eine andere wichtige geometrische Bedeutung: Er ist der Mittelpunkt derjenigen unter den durch M gehenden Kugeln, welche sich der Kurve C in der Umgebung von M am engsten anschließt; sie wird die *oskulierende Kugel* oder Schmiegungskugel der Kurve C im Punkte M genannt.

Um dies zu erweisen, gehen wir von der Kugel in allgemeiner Lage:

$$(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2 = R^2 \tag{3}$$

aus und schreiben ihr zunächst nur vor, daß sie durch den Punkt M zu gehen habe; dies gibt zur Bestimmung ihrer Parameter x_0, y_0, z_0, R die Gleichung:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{4}$$

Nun wählen wir auf C einen dem M benachbarten Punkt M_1 mit dem Parameterwerte $s + h$, dessen Koordinaten sich (177) wie folgt ausdrücken:

$$x_1 = x + h \cos\alpha + \frac{h^2}{2\varrho} \cos\lambda + \frac{h^3}{6} \frac{d^3 x}{ds^3} + \varepsilon_1$$

$$y_1 = y + h \cos\beta + \frac{h^2}{2\varrho} \cos\mu + \frac{h^3}{6} \frac{d^3 y}{ds^3} + \varepsilon_2$$

$$z_1 = z + h \cos\gamma + \frac{h^2}{2\varrho} \cos\nu + \frac{h^3}{6} \frac{d^3 z}{ds^3} + \varepsilon_3$$

und bestimmen das Quadrat seiner Entfernung D vom Mittelpunkte der Kugel; es ist

$$\begin{aligned}
D^2 = & \left[x - x_0 + h \cos\alpha + \frac{h^2}{2\varrho} \cos\lambda + \frac{h^3}{6} \frac{d^3x}{ds^3} + \varepsilon_1\right]^2 \\
& + \left[y - y_0 + h \cos\beta + \frac{h^2}{2\varrho} \cos\mu + \frac{h^3}{6} \frac{d^3y}{ds^3} + \varepsilon_2\right]^2 \\
& + \left[z - z_0 + h \cos\gamma + \frac{h^2}{3\varrho} \cos\nu + \frac{h^3}{6} \frac{d^3z}{ds^3} + \varepsilon_3\right]^2 \\
(5) \quad & = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \\
& + 2h[(x - x_0) \cos\alpha + (y - y_0) \cos\beta + (z - z_0) \cos\gamma] \\
& + \frac{h^2}{\varrho} [(x - x_0) \cos\lambda + (y - y_0) \cos\mu + (z - z_0) \cos\nu + \varrho] \\
& + \frac{h^3}{3} \left[(x - x_0) \frac{d^3x}{ds^3} + (y - y_0) \frac{d^3y}{ds^3} + (z - z_0) \frac{d^3z}{ds^3}\right] + E,
\end{aligned}$$

wobei E wie ε_1, ε_2, ε_3 Größen der vierten Ordnung bezüglich h bedeuten.

Der letzte Klammerausdruck kann noch wie folgt transformiert werden. Differentiiert man die Gleichung (177, (11)):

$$\cos\lambda = \varrho \frac{d^2x}{ds^2}$$

nach s und benutzt dabei die Gruppe (III) der Frenetschen Formeln (179), so ergibt sich:

$$-\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{T} = \frac{d\varrho}{ds} \cdot \frac{\cos\lambda}{\varrho} + \varrho \frac{d^3x}{ds^3}$$

analog

$$-\frac{\cos\beta}{\varrho}-\frac{\cos\psi}{T}=\frac{d\varrho}{ds}\cdot\frac{\cos\mu}{\varrho}+\varrho\frac{d^3y}{ds^3}$$

$$-\frac{\cos\gamma}{\varrho}-\frac{\cos\chi}{T}=\frac{d\varrho}{ds}\cdot\frac{\cos\nu}{\varrho}+\varrho\frac{d^3z}{ds^3};$$

multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ und addiert hierauf, so bekommt man:

$$(x-x_0)\frac{d^3x}{ds^3}+(y-y_0)\frac{d^3y}{ds^3}+(z-z_0)\frac{d^3z}{ds^3}$$

$$=-\frac{1}{\varrho^2}\left[(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta+(z-z_0)\cos\gamma\right]$$

$$-\frac{1}{\varrho T}\left[(x-x_0)\cos\varphi+(y-y_0)\cos\psi+(z-z_0)\cos\chi\right]$$

$$-\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\left[(x-x_0)\cos\lambda+(y-y_0)\cos\mu+(z-z_0)\cos\nu\right].$$

Hiermit folgt aus (5), wenn auf die Gleichung (4) Rücksicht genommen wird:

$$(D+R)(D-R)$$

$$=2h\left[(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta+(z-z_0)\cos\gamma\right]$$

$$+\frac{h^2}{\varrho}\left[(x-x_0)\cos\lambda+(y-y_0)\cos\mu+(z-z_0)\cos\nu+\varrho\right]$$

$$-\frac{h^3}{3}\left[\frac{1}{\varrho^2}\{(x-x_0)\cos\alpha+(y-y_0)\cos\beta+(z-z_0)\cos\gamma\}\right.$$

$$+\frac{1}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{ds}\{(x-x_0)\cos\lambda+(y-y_0)\cos\mu+(z-z_0)\cos\nu\}$$

$$\left.+\frac{1}{\varrho T}\{(x-x_0)\cos\varphi+(y-y_0)\cos\psi+(z-z_0)\cos\chi\}\right]+E.$$

Die Differenz $D-R$ drückt den kürzesten Abstand des Punktes M_1 von der Kugel aus; da die Kugel, um bestimmt zu sein, noch drei Bedingungen unterworfen werden muß, so setzen wir fest, jener kürzeste Abstand solle von höchstmöglicher, also von vierter Kleinheitsordnung sein; dazu ist notwendig, daß zunächst:

$$(x_0-x)\cos\alpha+(y_0-y)\cos\beta+(z_0-z)\cos\gamma=0$$

$$(x_0-x)\cos\lambda+(y_0-y)\cos\mu+(z_0-z)\cos\nu=\varrho;$$

und damit auch der Koeffizient von h^3 verschwinde. muß außerdem

$$(x_0-x)\cos\varphi+(y_0-y)\cos\psi+(z_0-z)\cos\chi=-T\frac{d\varrho}{ds}$$

sein. Diese drei Gleichungen stimmen aber mit dem System (1) überein, aus welchem sich der Punkt (2) ergeben hat, und damit ist die aufgestellte Behauptung erwiesen.

Die oskulierende Kugel berührt die Kurve in M; denn da ihr Mittelpunkt vermöge der ersten Gleichung in der Normalebene von M liegt, so ist die Tangente an die Kurve zugleich Tangente der Kugel. Die Berührung ist als eine solche der dritten Ordnung zu bezeichnen (**145**).

Für den Halbmesser R der oskulierenden Kugel hat man nun auf Grund von (4) und (2) die Bestimmung:

$$R^2 = \varrho^2 + \left(T \frac{d\varrho}{ds}\right)^2. \tag{6}$$

197. Der Krümmungskreis. Die oskulierende Kugel schneidet die oskulierende Ebene des Punktes M nach einem die Kurve in M berührenden Kreise, dessen Elemente sich wie folgt bestimmen.

Sein Mittelpunkt Ω ist der Fußpunkt der Geraden

$$\left\{\begin{array}{l} (\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0 \\ (\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu = \varrho \end{array}\right. \tag{7}$$

auf der Oskulationsebene von C in M, deren Gleichung ist:

$$(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = 0; \tag{8}$$

denn jene Gerade geht laut (1) durch den Mittelpunkt der Kugel und steht auf der Ebene (8) normal. Behält man also für den Mittelpunkt Ω die Bezeichnung ξ, η, ζ bei, so ergibt sich aus (7) und (8) für ihn die Bestimmung:

$$\begin{aligned} \xi - x &= \begin{vmatrix} 0 & \cos\beta & \cos\gamma \\ \varrho & \cos\mu & \cos\nu \\ 0 & \cos\psi & \cos\chi \end{vmatrix} = \varrho\cos\lambda, \\ \eta - y &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\lambda & \varrho & \cos\nu \\ \cos\varphi & 0 & \cos\chi \end{vmatrix} = \varrho\cos\mu, \\ \zeta - z &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & 0 \\ \cos\lambda & \cos\mu & \varrho \\ \cos\varphi & \cos\psi & 0 \end{vmatrix} = \varrho\cos\nu. \end{aligned} \tag{9}$$

Weil hiernach $\xi - x$ und $\cos\lambda$, $\eta - y$ und $\cos\mu$, $\zeta - z$ und $\cos\nu$ gleich bezeichnet sind, so liegt der Punkt Ω von M aus gezählt in der positiven Richtung MH der Hauptnormale, also auf der konkaven Seite der Kurve in dem in **177** erläuterten Sinne.

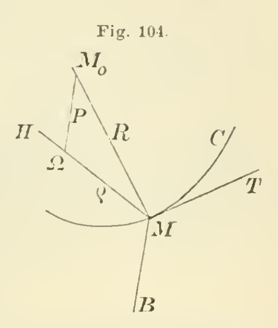


Fig. 104.

Für den Halbmesser des Kreises geben die Gleichungen (9) den Wert ϱ.

Man nennt daher diesen Kreis, weil sein Halbmesser mit dem Halbmesser der ersten Krümmung übereinstimmt, den *Krümmungskreis*, seinen Mittelpunkt Ω den *Krümmungsmittelpunkt*, die Oskulationsebene, da sie diesen Kreis enthält, auch *Krümmungsebene*, und die Gerade (7), welche zur letzteren Ebene im Punkte Ω normal steht, die *Krümmungsachse* der Kurve C im Punkte M.

Ein Blick auf Fig. 104 und auf die Gleichung (6) lehrt, daß der Abstand P des Mittelpunktes der oskulierenden Kugel von der Oskulationsebene bestimmt ist durch die Formel:

$$P^2 = \left(T\frac{d\varrho}{ds}\right)^2. \tag{10}$$

Auf Grund der Ergebnisse dieses und des vorangehenden Artikels kann man die Polarfläche einer Raumkurve C auch als Ort ihrer Krümmungsachsen und die Rückkehrkante der Polarfläche als Ort der Mittelpunkte der oskulierenden Kugeln definieren.

198. Spezielle Raumkurven. Die Formel (10) lehrt, daß der Mittelpunkt der oskulierenden Kugel mit dem Krümmungsmittelpunkte zusammenfällt bei Kurven, für welche beständig

$$\frac{d\varrho}{ds} = 0,$$

also für Kurven von konstantem Flexionshalbmesser; dann aber ist vermöge (6) auch R konstant. Dies findet demnach bei der gewöhnlichen Schraubenlinie statt.

In Punkten mit stationärer Oskulationsebene ist die Tor-

sion $\frac{1}{T}$ Null, der Torsionshalbmesser also und mit ihm P $\left(\text{sofern } \frac{d\varrho}{ds} \text{ von Null verschieden ist}\right)$ unendlich; solchen Punkten entsprechen daher unendlich ferne Punkte der Rückkehrkante der Polarfläche.

Wir wollen ferner die Frage nach Kurven richten, bei welchen der Halbmesser der Schmiegungskugel konstant ist. Dies erfordert nach (6), daß

$$\varrho \frac{d\varrho}{ds} + T \frac{d\varrho}{ds} \frac{d\left(T \frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds}$$

verschwinde, oder daß

$$T \frac{d\varrho}{ds}\left[\frac{\varrho}{T} + \frac{d\left(T \frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds}\right] = 0 \tag{11}$$

sei. Das Verschwinden des ersten Faktors ist schon durch die voraufgehende Bemerkung erledigt; es bleibt noch das Verschwinden des zweiten Faktors zu deuten.

Differentiiert man zu diesem Zwecke die erste der Gleichungen **195**, (2) nach s unter Bezugnahme auf die Frenetschen Formeln, so ergibt sich:

$$\frac{dx_0}{ds} = \cos\alpha + \frac{d\varrho}{ds}\cos\lambda - \varrho\left(-\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{T}\right)$$
$$- \frac{d\left(T \frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds}\cos\varphi - \frac{d\varrho}{ds}\cos\lambda,$$

also nach entsprechender Reduktion

$$\frac{dx_0}{ds} = -\left(\frac{\varrho}{T} + \frac{d\left(T \frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds}\right)\cos\varphi;$$

ebenso ergeben die beiden anderen Gleichungen des angezogenen Systems:

$$\frac{dy_0}{ds} = -\left(\frac{\varrho}{T} + \frac{d\left(T \frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds}\right)\cos\psi,$$

$$\frac{dz_0}{ds} = -\left(\frac{\varrho}{T} + \frac{d\left(T \frac{d\varrho}{ds}\right)}{ds}\right)\cos\chi;$$

das identische Verschwinden des zweiten Faktors in (11) hat also zur Folge, daß beständig

$$\frac{dx_0}{ds} = 0, \qquad \frac{dy_0}{ds} = 0, \qquad \frac{dz_0}{ds} = 0$$

oder daß

$$x_0 = \text{const.}, \qquad y_0 = \text{const.}, \qquad z_0 = \text{const.}$$

ist. Dann aber gibt es für alle Punkte der Kurve nur eine Oskulationskugel, die Kurve selbst liegt auf einer Kugel und wird eine *sphärische Raumkurve* genannt; ihre Polarfläche ist ein Kegel, der den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat (Beispiel, **169**, 2)).

199. Beispiel. Es ist die Polarfläche der Schraubenlinie

$$x = a \cos u$$
$$y = a \sin u$$
$$z = bu$$

zu charakterisieren.

Mit Benutzung der in **181**, 1) gefundenen Resultate:

$$\varrho = \frac{a^2 + b^2}{a}, \qquad T = -\frac{a^2 + b^2}{b}, \qquad \frac{ds}{du} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\lambda = -\cos u, \qquad \cos\mu = -\sin u, \qquad \cos\nu = 0,$$

$$\cos\varphi = \frac{b \sin u}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\psi = -\frac{b \cos u}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\chi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ergibt die Ausführung der Gleichungen **195**, (2) folgendes Resultat:

$$x_0 = -\frac{b^2}{a} \cos u$$
$$y_0 = -\frac{b^2}{a} \sin u$$
$$z_0 = \quad bu;$$

führt man an Stelle von u einen neuen Winkel u' durch die Gleichung

$$u' = u + \pi$$

ein, so gehen die letzten Gleichungen über in

$$x_0 = \frac{b^2}{a} \cos u'$$
$$y_0 = \frac{b^2}{a} \sin u'$$
$$z_0 = b(u' - \pi);$$

die Rückkehrkante der Polarfläche ist also eine mit der gegebenen Schraubenlinie in gleichem Sinne gewundene Schraubenlinie auf einem Zylinder vom Halbmesser $\frac{b^2}{a}$; während die erste durch einen Punkt der positiven x-Achse geht, schneidet die zweite die negative x-Achse; in der Ganghöhe stimmt sie mit der ursprünglichen überein.

Die Polarfläche einer Schraubenlinie ist demnach eine abwickelbare Schraubenfläche.

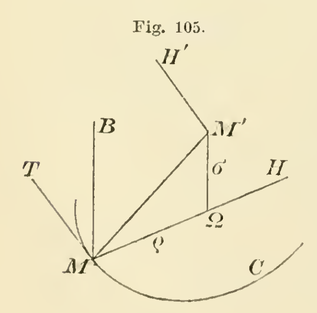
200. Evoluten der Raumkurven. Die Polarfläche einer Kurve C ist der Ort ihrer *Evoluten.*

Versteht man nämlich unter einer Evolute der Kurve C jede Kurve, deren Tangenten Normalen von C sind, so besitzt die Kurve C unzählig viele Evoluten, die notwendig auf ihrer Polarfläche liegen müssen.

Ist nämlich C' eine Evolute von C, M' ein Punkt derselben und $M'M$ die Tangente in diesem Punkte an C' und zugleich Normale in M zur Kurve C, so erfolgt, sobald M auf C sich zu bewegen beginnt, eine momentane Drehung von MM' um den Punkt M'; gleichzeitig dreht sich die Normalebene von M augenblicklich um die Krümmungsachse des Punktes M; soll demnach $M'M$ normal bleiben zur Kurve C, so muß M' auf der Krümmungsachse liegen. Es gehört also der einem beliebigen Punkte M zugeordnete Punkt M' der Evolute der Krümmungsachse von M an, folglich liegt die ganze Evolute auf der Polarfläche.

Um die Evoluten analytisch zu charakterisieren, seien die Koordinaten des Punktes M' einer solchen mit x', y', z', sein Abstand von der Oskulationsebene mit σ bezeichnet mit der Festsetzung, daß σ positiv oder negativ ist, je nachdem die Strecke $\Omega M'$ (Fig. 105) die positive oder negative Richtung der Binormale hat; für den Punkt M werden alle bisher eingeführten Bezeichnungen beibehalten.

Fig. 105.



Die Koordinatendifferenzen der

Punkte M und M' ergeben sich durch Projektion des rechtwinkligen Linienzuges $M\Omega M'$ auf die drei Koordinatenachsen wie folgt:

$$(12) \qquad \begin{cases} x' - x = \varrho \cos\lambda + \sigma \cos\varphi \\ y' - y = \varrho \cos\mu + \sigma \cos\psi \\ z' - z = \varrho \cos\nu + \sigma \cos\chi. \end{cases}$$

Diese Koordinatendifferenzen sind den Kosinus der Richtungswinkel von MM' proportional; denselben Richtungskosinus sind aber, da MM' Tangente an die Evolute ist, auch die Quotienten $\frac{dx'}{ds}, \frac{dy'}{ds}, \frac{dz'}{ds}$ proportional; daher bestehen die Relationen:

$$(13) \qquad \frac{x'-x}{p} = \frac{dx'}{ds}, \qquad \frac{y'-y}{p} = \frac{dy'}{ds}, \qquad \frac{z'-z}{p} = \frac{dz'}{ds},$$

wobei p den Proportionalitätsfaktor bedeutet. Führt man die erste dieser Relationen auf Grund von (12) und der Frenetschen Formeln durch, so ergibt sich:

$$\frac{\varrho\cos\lambda + \sigma\cos\varphi}{p} = \cos\alpha + \frac{d\varrho}{ds}\cos\lambda + \varrho\left(-\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos\varphi}{T}\right) + \frac{d\sigma}{ds}\cos\varphi + \sigma\frac{\cos\lambda}{T}$$

und nach entsprechender Reduktion

$$\frac{\varrho\cos\lambda + \sigma\cos\varphi}{p} = \left(\frac{d\varrho}{ds} + \frac{\sigma}{T}\right)\cos\lambda + \left(\frac{d\sigma}{ds} - \frac{\varrho}{T}\right)\cos\varphi.$$

Daraus schließt man, daß

$$(14) \qquad \begin{cases} \frac{\varrho}{p} = \frac{d\varrho}{ds} + \frac{\sigma}{T} \\ \frac{\sigma}{p} = \frac{d\sigma}{ds} - \frac{\varrho}{T} \end{cases}$$

und erhält weiter durch Elimination von p die folgende Beziehung, welcher die Größe σ zu entsprechen hat:

$$\frac{\frac{\varrho\, d\sigma - \sigma\, d\varrho}{\varrho^2}}{1 + \left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^2} = \frac{ds}{T}.$$

In der linken Seite dieser Gleichung erkennt man das Differential von $\operatorname{arctg}\frac{\sigma}{\varrho}$; kennt man ferner eine Funktion τ von

s, deren Differential $\frac{ds}{T}$ ist, so ist $\tau + c$ die allgemeinste Form einer Funktion von dieser Eigenschaft, wenn c eine willkürliche Konstante bezeichnet, und somit

$$\operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\varrho} = \tau + c$$

diejenige Gleichung, welche die allgemeinste Bestimmung von σ liefert; es folgt daraus:

$$\sigma = \varrho \operatorname{tg}(\tau + c)$$

und hiermit nehmen die Gleichungen (12) zur analytischen Darstellung der Evoluten von C die endgültige Gestalt an:

$$(15) \qquad \begin{cases} x' = x + \varrho \cos\lambda + \varrho \operatorname{tg}(\tau + c) \cos\varphi \\ y' = y + \varrho \cos\mu + \varrho \operatorname{tg}(\tau + c) \cos\psi \\ z' = z + \varrho \cos\nu + \varrho \operatorname{tg}(\tau + c) \cos\chi. \end{cases}$$

Wie c unendlich viele verschiedene Werte annehmen kann, *so hat eine Kurve unendlich viele Evoluten.*

Aus den Formeln (13), d. i. aus

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{\varrho\cos\lambda + \sigma\cos\varphi}{p}$$
$$\frac{dy'}{ds} = \frac{\varrho\cos\mu + \sigma\cos\psi}{p}$$
$$\frac{dz'}{ds} = \frac{\varrho\cos\nu + \sigma\cos\chi}{p}$$

folgt, wenn man quadriert und summiert,

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{\varrho^2 + \sigma^2}{p^2};$$

zieht man die Relationen (14) hinzu, da sie für die Evoluten charakteristisch sind, und eliminiert zwischen beiden $\frac{1}{T}$, so ergibt sich für p die Bestimmung:

$$p = \frac{(\varrho^2 + \sigma^2)\, d\sigma}{\varrho\, d\varrho + \sigma\, d\sigma};$$

diese in die obige Gleichung eingetragen gibt:

$$(16) \qquad ds' = \pm \frac{\varrho\, d\varrho + \sigma\, d\sigma}{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}} = \pm\, d\left(\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}\right).$$

Diese Gleichung drückt die Eigenschaft aus, daß das Bogendifferential der Evolute gleichkommt dem Differential der

Strecke MM' (Fig. 105), eine Verallgemeinerung der für die Evoluten ebener Kurven 156, (17) erwiesenen Eigenschaft, auf welcher die Erzeugung der gegebenen Kurve durch Abwicklung eines biegsamen, nicht dehnbaren Fadens von der Evolute beruht. Diese Erzeugungsweise kann daher auf alle Evoluten auch einer Raumkurve übertragen werden.

Bezeichnet man die Richtungswinkel der Tangente MM' an die Evolute in M' mit α', β', γ', und ähnlich alle übrigen auf die Evoluten bezüglichen Größen mit denselben, aber gestrichenen Buchstaben, so ist

$$\cos\alpha' = \frac{x' - x}{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}} \text{ usw.}$$

Daraus ergibt sich durch Differentiation:

$$dx' - dx = d\left(\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}\right) \cdot \cos\alpha' + \sqrt{\varrho^2 + \sigma^2} \cdot d\cos\alpha'$$

oder in anderer Form und mit Rücksicht auf (16):

$$ds'\cos\alpha' - ds\cos\alpha = ds'\cos\alpha' + \frac{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2} \cdot ds'}{\varrho'}\cos\lambda',$$

woraus

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}\,ds'}{\varrho'\,ds}\cos\lambda'$$

analog

$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}\,ds'}{\varrho'\,ds}\cos\mu'$$

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}\,ds'}{\varrho'\,ds}\cos\nu';$$

daraus folgt, daß der Faktor $\frac{\sqrt{\varrho^2 + \sigma^2}\,ds'}{\varrho'\,ds}$ notwendig den absoluten Wert 1 hat, und dann weiter, *daß die Hauptnormale der Evolute in M' parallel ist der Tangente in M* (Fig. 105). Diese Tatsache kann auch in der Form ausgesprochen werden: *Die Oskulationsebene einer Evolute in einem ihrer Punkte steht senkrecht auf der Tangentialebene der Polarfläche in diesem Punkte.*

Auch eine ebene Kurve besitzt, in der hier geübten Auffassung, unendlich viele Evoluten, die auf der Polarfläche liegen; letztere ist hier der zur Kurvenebene normale Zylinder, dessen Leitkurve die Ortslinie der Krümmungsmittelpunkte ist;

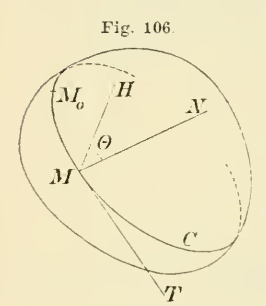
diese Ortslinie zählt auch zu den Evoluten und ist die einzige Plankurve unter ihnen.

Bei einer Raumkurve gehört aber die Ortslinie der Krümmungsmittelpunkte nicht zu den Evoluten; denn nach dem letzten Ergebnis würden, wenn dies der Fall wäre, die Oskulationsebenen der gegebenen Kurve und dieser speziellen Evolute in korrespondierenden Punkten zusammenfallen, die Tangentenfläche der Evolute müßte also mit der Tangentenfläche der gegebenen Kurve identisch sein, während sie dem Begriffe der Evoluten gemäß mit der Fläche der Hauptnormalen zusammenfallen sollte. Dieser Widerspruch begründet die Richtigkeit obiger Behauptung.

§ 6. Krümmung von Kurven auf krummen Flächen.

201. Flexion einer Kurve auf einer krummen Fläche. Den Ausgangspunkt für die Untersuchung der Gestalt einer Fläche in der Umgebung eines ihrer Punkte bildet die Frage nach der Flexion, welche einer der Fläche aufgeschriebenen durch diesen Punkt laufenden Kurve hier zukommt.

Fig. 106.



Die krumme Fläche sei durch die Gleichung

$$(1) \qquad z = f(x, y)$$

gegeben; durch den Punkt M (Fig. 106) derselben mit den Koordinaten $x/y/z$ gehe eine Kurve C, dargestellt durch die Gleichungen

$$(2) \qquad x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s),$$

in welchen s den von dem festen Punkte M_0 aus gezählten Bogen M_0M bedeutet; weil die Kurve auf der Fläche liegt, so müssen die Gleichungen (2) die Gleichung (1) identisch erfüllen. Aus der Gleichung

$$(3) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

welche für eine infinitesimale Bewegung auf der Fläche, also auch längs der Kurve Geltung hat, ergibt sich, wenn man sie durch das Bogendifferential

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$
$$= \sqrt{(1 + p^2)\, dx^2 + (1 + q^2)\, dy^2 + 2pq\, dx\, dy}$$

der Kurve dividiert, die Beziehung

$$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta \tag{4}$$

zwischen den Richtungskosinus der Tangente MT.

Durch Differentiation von (4) in bezug auf s erhält man unter Zuhilfenahme der Frenetschen Formeln:

$$\frac{\cos\nu}{\varrho} = \frac{p\cos\lambda + q\cos\mu}{\varrho} + \left(r\frac{dx}{ds} + s\frac{dy}{ds}\right)\cos\alpha$$
$$+ \left(s\frac{dx}{ds} + t\frac{dy}{ds}\right)\cos\beta$$

oder

$$\frac{-p\cos\lambda - q\cos\mu + \cos\nu}{\varrho} = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta.$$

Es sind aber (**186**, (18))

$$\frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \qquad \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \tag{5}$$

wenn die Quadratwurzel positiv genommen wird, die Kosinus für diejenige Richtung MN der Flächennormale in M, welche mit der z-Achse einen spitzen Winkel einschließt: $\cos\lambda$. $\cos\mu$, $\cos\nu$ hingegen die Kosinus der positiven Richtung MH der Hauptnormale von C in M; demnach bedeutet

$$\frac{-p\cos\lambda - q\cos\mu + \cos\nu}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

den Kosinus des Winkel θ der genannten zwei Richtungen.

Hiermit aber geht die letzte Formel über in:

$$\frac{\cos\theta}{\varrho} = \frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}. \tag{6}$$

Dies ist die *Grundgleichung* für die Krümmungstheorie der Flächen.

Von den in dieser Formel auftretenden Größen beziehen sich p, q, r, s, t auf den Punkt M *als Punkt der Fläche* und bleiben für alle durch ihn gezogenen Kurven die nämlichen; α, β bestimmen die Richtung der Tangente an die Kurve, θ die Neigung ihrer Schmiegungsebene gegen die Normale der Fläche.

Zunächst geht aus (6) hervor, *daß alle Kurven auf der Fläche, welche in M dieselbe Tangente und dieselbe Oskulationsebene haben, auch dieselbe Flexion in M besitzen, die also auch gleichkommt der Krümmung derjenigen Kurve, welche aus der Fläche durch die Ebene TMH geschnitten wird.*

Hiermit ist die Untersuchung der Flexion aller Kurven zurückgeführt auf die Untersuchung der Krümmung der ebenen Schnitte der Fläche.

202. Der Satz von Meusnier. Eine weitere Folgerung, die wir aus (6) ziehen können, beruht auf der Bemerkung, daß für alle Schnitte mit der Tangente MT der Quotient

$$\frac{\cos\theta}{\varrho}$$

denselben Wert beibehält; da nun ϱ eine absolute Größe ist, so muß $\cos\theta$ entweder beständig positiv oder beständig negativ sein, d. h. die positiven Richtungen aller Hauptnormalen in M, zur Tangente MT gehörig, schließen mit MN entweder sämtlich einen spitzen oder sämtlich einen stumpfen Winkel ein.

Unter den Schnitten durch die Tangente MT heben wir denjenigen hervor, welcher durch die Normale der Fläche geht, und bezeichnen ihn als den diese Tangente berührenden *Normalschnitt.* Je nachdem alle θ spitz oder stumpf sind, wird für diesen Schnitt $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$, und heißt $\frac{1}{R}$ seine Krümmung in M, so hat man:

$$\frac{\cos\theta}{\varrho} = \frac{1}{R}$$

im ersten und

$$\frac{\cos\theta}{\varrho} = -\frac{1}{R}$$

im zweiten Falle.

Durch entsprechende Wahl der positiven Richtung der z-Achse kann jedoch immer der erste Fall herbeigeführt werden, so daß

$$\varrho = R\cos\theta \tag{7}$$

wird.

Der Inhalt dieser Formel bildet den *Satz von* Meusnier[*]),

[*]) Mémoire sur la courbure des surfaces. Mém. de savants étrang. 1785.

wonach der Krümmungshalbmesser eines ebenen Schnittes gleichkommt dem Krümmungshalbmesser des dieselbe Tangente berührenden Normalschnittes, multipliziert mit dem Kosinus des Neigungswinkels beider Schnitte.

Man kann den Satz auch in der Form aussprechen, daß der Krümmungsmittelpunkt eines schiefen Schnittes als Projektion des Krümmungsmittelpunktes des dieselbe Tangente berührenden Normalschnittes auf die Ebene des ersteren sich darstellt.

Hiernach ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller durch eine Flächentangente gelegten Schnitte ein Kreis, dessen Ebene zu jener Tangente normal steht und dessen Durchmesser der Krümmungsradius des darunter befindlichen Normalschnittes ist.

Vermöge des Satzes von Meusnier ist die Untersuchung der Krümmung aller ebenen Schnitte durch einen Punkt zurückgeführt auf die Untersuchung der Normalschnitte durch diesen Punkt.

203. Die Krümmung der Normalschnitte. Der Satz von Euler. Um den Ausdruck für die Krümmung des Normalschnittes durch die Tangente MT zu erhalten, hätte man in der Formel (6)

$$\theta = 0 \quad \text{oder} \quad \theta = \pi$$

zu setzen, je nachdem deren rechte Seite positiv oder negativ ist.

Behält man die Substitution $\theta = 0$ für alle Fälle bei, so hat der Krümmungsradius R aufgehört eine absolute Größe zu sein; das Vorzeichen, welches ihm die Formel gibt, hat nach dem vorigen Artikel die Bedeutung, daß bei positivem R der Normalschnitt seine konkave Seite nach der Richtung MN, welche im vorigen Artikel als die positive erklärt wurde, bei negativem R aber nach der entgegengesetzten Richtung wendet.

Mit dieser Maßgabe bestimmt also die Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \tag{8}$$

nicht allein die Größe der Krümmung des Normalschnittes, sondern auch die Richtung seiner Konkavität.

$\frac{1}{R}$ behält für alle Normalschnitte durch M dasselbe Vorzeichen, die Konkavität ist also bei allen nach derselben Seite gewendet. wenn (121, 184)

$$rt - s^2 > 0 \tag{9}$$

ist. In einem solchen Punkt, in dessen Umgebung die Fläche ganz zu einer Seite der Tangentialebene liegt, bezeichnet man sie als *konvex*.

$\frac{1}{R}$ wechselt während der Drehung des Normalschnittes um die Normale, und zwar zweimal, durch Null gehend, sein Vorzeichen, wenn

$$rt - s^2 < 0 \tag{10}$$

ist. Ein Teil der Normalschnitte wendet die Konkavität nach der einen, der andere Teil nach der entgegengesetzten Richtung der Normale, und ebenso liegt die Fläche in der Umgebung von M zum Teil auf der einen, zum Teil auf der anderen Seite der Tangentialebene. In einem solchen Punkte bezeichnet man die Fläche als *konkav-konvex*. Die Grenze zwischen den beiden Arten von Normalschnitten wird durch zwei Normalschnitte gebildet, deren Krümmung Null ist, welche also in M einen Wendepunkt haben.

In dem Grenzfalle, wo

$$rt - s^2 = 0, \tag{11}$$

der Zähler auf der rechten Seite von (8) also ein vollständiges Quadrat ist, behält $\frac{1}{R}$ auch beständig dasselbe Vorzeichen bei, verschwindet aber für eine bestimmte Lage des Normalschnittes.

Es liegt nun nahe, nach denjenigen Normalschnitten zu fragen, für welche die Krümmung einen extremen Wert annimmt. Um diese Untersuchung einfach zu gestalten, transformieren wir das Koordinatensystem derart, daß sein Ursprung mit M, die positive z-Achse mit der Normale MN, die Tangentialebene also mit der xy-Ebene zusammenfällt; den Winkel, welchen die positive Richtung MT der Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse im neuen System einschließt, nennen wir ω. Dann tritt in der Formel (8) ω an die Stelle von α,

$\frac{\pi}{2} - \omega$ an die Stelle von β; p und q werden Null, weil nun die ersten zwei von den Kosinuss (5) der Normale verschwinden; für die zweiten Differentialquotienten behalten wir auch im neuen System die Zeichen r, s, t bei und haben daher jetzt:

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\omega + 2s\cos\omega\sin\omega + t\sin^2\omega. \tag{12}$$

Für die extremen Werte von $\frac{1}{R}$ verschwindet

$$D_\omega\left(\frac{1}{R}\right) = -(r-t)\sin 2\omega + 2s\cos 2\omega,$$

es ergibt sich daraus für die betreffenden Normalschnitte die Bestimmung

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2s}{r-t}, \tag{13}$$

welche nur dann illusorisch wird, wenn gleichzeitig

$$r = t \quad \text{und} \quad s = 0 \tag{14}$$

ist; in jedem anderen Falle führt sie zu zwei um π voneinander differierenden Werten von 2ω, also zu zwei um $\frac{\pi}{2}$ voneinander abweichenden Werten von ω selbst. Da ferner für die Bestimmung (13)

$$D_\omega^2\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{2\cos 2\omega}{t-r}\left[(t-r)^2 + 4s^2\right]$$

und $\cos 2\omega$ für zwei um π auseinanderliegende Werte von 2ω entgegengesetzte Zeichen annimmt, so entspricht der einen Lösung ein Maximum, der anderen ein Minimum von $\frac{1}{R}$.

Unter den Normalschnitten einer Fläche in einem Punkte M derselben gibt es also zwei ausgezeichnete, die aufeinander senkrecht stehen und deren einer das Maximum, deren anderer das Minimum der Krümmung aufweist. Man bezeichnet sie als die Hauptnormalschnitte, ihre Krümmungsradien als die Hauptkrümmungsradien der Fläche in dem genannten Punkte.

Geht man jetzt zu einem dritten Koordinatensystem über, das durch Rotation des vorigen um die z-Achse entsteht derart, daß die Ebenen yz und zx mit den Ebenen der Hauptnormalschnitte zusammenfallen, so wird in diesem neuen Systeme der Differentialquotient s Null werden, weil ja die Gleichung (13)

die Lösungen 0 und π ergeben muß; behält man für die beiden anderen Differentialquotienten zweiter Ordnung wieder dieselben Zeichen r, t bei, so lautet Formel (12):

$$\frac{1}{R} = r \cos^2 \omega + t \sin^2 \omega;$$

für $\omega = 0$ ergibt sich jetzt die eine Hauptkrümmung

$$\frac{1}{R_1} = r,$$

für $\omega = \frac{\pi}{2}$ die andere

$$\frac{1}{R_2} = t;$$

hiernach ist also:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \omega}{R_1} + \frac{\sin^2 \omega}{R_2}. \tag{15}$$

Mit Hilfe dieser Formel ist es möglich, den Krümmungshalbmesser eines beliebigen Normalschnittes in M durch die Hauptkrümmungsradien auszudrücken, wenn sein Neigungswinkel ω mit dem einen Hauptnormalschnitte, dem zu R_1 gehörigen, gegeben ist. Der Inhalt dieser Formel bildet den *Satz von* Euler.*)

Durch die Sätze von Meusnier und Euler ist die Untersuchung der Krümmung aller durch einen Punkt M gelegten Kurven zurückgeführt auf die Bestimmung der Hauptkrümmungsradien in diesem Punkte.

Wir kommen noch auf den unter (14) ausgeschlossenen Fall

$$r = t, \qquad s = 0$$

zurück, für welchen die Gleichung (13) keine Bestimmung ergeben hat. Die Formel (12) aber lautet dann

$$\frac{1}{R} = r$$

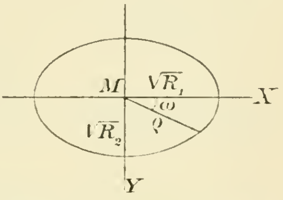
und drückt aus, daß in einem solchen Punkte alle Normalschnitte denselben Krümmungshalbmesser haben. Man bezeichnet einen solchen Punkt der Fläche als *Nabelpunkt;* er ist ein besonderer Fall des Konvexpunktes.

*) Recherches sur la courbure des surfaces. Hist. de l'Acad. de Berlin, 1760. (Bd. 16).

204. Die Dupinsche Indikatrix. Die Krümmungsverhältnisse der Normalschnitte in einem Punkte M gestatten auf Grund der Eulerschen Formel eine anschauliche geometrische Darstellung, welche der französische Geometer Ch. Dupin*) angegeben hat. Dabei sind bezüglich der Hauptkrümmungsradien diejenigen Fälle zu unterscheiden, welche sich im vorigen Artikel bezüglich der Krümmungsradien der Normalschnitte überhaupt herausgestellt haben: daß beide gleich bezeichnet, daß sie ungleich bezeichnet sind und daß einer derselben unendlich ist.

Die Darstellung erfolgt in der Tangentialebene des Punktes M und legt ein Koordinatensystem zugrunde, das M zum Ursprung und die Tangenten an die beiden Hauptnormalschnitte zu Achsen hat, und zwar die Tangente an den Hauptnormalschnitt mit dem Krümmungsradius R_1 zur x-Achse.

Fig. 107.



1) Sind R_1, R_2 gleich bezeichnet, z. B. positiv, so konstruiere man in der Tangentialebene die Ellipse

$$(16) \qquad 1 = \frac{\xi^2}{R_1} + \frac{\eta^2}{R_2},$$

deren Halbachsen also $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$ sind (Fig. 107); der zu MX unter dem Winkel ω geneigte Halbmesser ϱ dieser Ellipse ergibt sich aus der Gleichung:

$$1 = \frac{\varrho^2 \cos^2 \omega}{R_1} + \frac{\varrho^2 \sin^2 \omega}{R_2};$$

mithin ist

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \omega}{R_1} + \frac{\sin^2 \omega}{R_2}$$

und durch Vergleich mit der Eulerschen Formel (15) ergibt sich daraus

$$R = \varrho^2.$$

Die Quadrate der Halbmesser der Ellipse (16) sind also den Krümmungsradien der Normalschnitte gleich, welche durch diese Halbmesser bestimmt sind.

Infolge dieses Zusammenhanges heißt der konvexe Punkt

*) Développements de géométrie, Paris 1813.

auch *elliptischer Punkt* der Fläche, diese selbst hier *positiv* gekrümmt.

Ist insbesondere $R_1 = R_2$, so geht die Ellipse (16) in einen Kreis über, alle Normalschnitte sind gleich gekrümmt. Aus diesem Grunde nennt man den Nabelpunkt auch *Kreispunkt.*

2) Sind R_1, R_2 ungleich bezeichnet, etwa R_1 positiv und R_2 negativ, so konstruiere man in der Tangentialebene die beiden konjugierten Hyperbeln

$$(17)\qquad \begin{cases} 1 = \dfrac{\xi^2}{R_1} - \dfrac{\eta^2}{-R_2} \\ 1 = -\dfrac{\xi^2}{R_1} + \dfrac{\eta^2}{-R_2} \end{cases}$$

mit den Halbachsen $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{-R_2}$ (Fig. 108). Der unter einem Winkel ω zur x-Achse geneigte Halbmesser ϱ der ersten Hyperbel ergibt sich aus

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2},$$

und gehört er der zweiten Hyperbel an, so ist

$$-\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2};$$

mithin hat man im ersten Falle

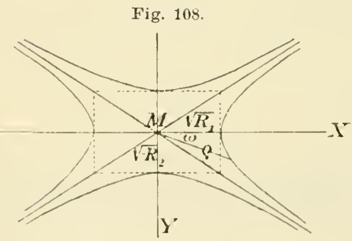
$$R = \varrho^2,$$

im zweiten

$$R = -\varrho^2.$$

Die Radien der beiden Hyperbeln bestimmen also die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte nach demselben Gesetze wie es vorhin die Ellipse getan hat, nur gehören zu der einen Hyperbel Normalschnitte mit positivem, zur andern solche mit negativem Krümmungshalbmesser.

Fig. 108.



Der konkav-konvexe Punkt führt daher auch den Namen *hyperbolischer Punkt* der Fläche, und diese heißt in ihm *negativ* gekrümmt.

Der Übergang von der einen Hyperbel zur andern erfolgt bei stetiger Drehung des Normalschnittes durch die Asymptoten der Hyperbeln (17), deren Gleichungen lauten:

$$\frac{\eta}{\xi} = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}};$$

diesen entsprechen also Normalschnitte mit unendlich großem Krümmungsradius; die Asymptoten als Tangenten dieser Normalschnitte heißen *Inflexions-* oder auch *Haupttangenten* der Fläche im Punkte M; die erstere Bezeichnung rührt daher, daß die betreffenden Normalschnitte in M Wendepunkte aufweisen.

3) Ist einer der Hauptkrümmungsradien, z. B. R_2, unendlich groß, so heißt die Eulersche Formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1}.$$

Man konstruiere dann in der Tangentialebene das Linienpaar (Fig. 109).

Fig. 109.

$$(18) \qquad 1 = \frac{\xi^2}{R_1};$$

für einen Halbmesser ϱ dieses Linienpaares, der zur x-Achse unter dem Winkel ω geneigt ist, erhält man:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\omega}{R_1},$$

so daß wie in den beiden früheren Fällen:

$$R = \varrho^2.$$

Dieser Sachverhalt entspricht dem in **203**, (11) besprochenen Grenzfalle. Weil ein Paar paralleler Linien als degenerierte Parabel sich auffassen läßt, so nennt man einen Flächenpunkt von dieser Beschaffenheit einen *parabolischen Punkt*.

Das in der Tangentialebene konstruierte Gebilde (16), (17) oder (18), weil es die Krümmungsverhältnisse der Normalschnitte anzeigt, wird nach seinem Urheber die *Dupinsche Indikatrix* des betreffenden Punktes genannt.

205. Eine andere Auffassung der Indikatrix. Tangentialschnitt einer Fläche. Die Indikatrix gestattet noch eine andere Auffassung, welche hier kurz entwickelt werden

soll, weil sie geeignet ist, in die Natur der verschiedenen Arten von Flächenpunkten noch genaueren Einblick zu gewähren.

Wird der Flächenpunkt M zum Ursprung, seine Tangentialebene zur xy-Ebene gewählt, und ist z von hier aus nach der Maclaurinschen Formel entwickelbar, so beginnt die Entwicklung, da bei dieser Annahme $p = 0$, $q = 0$ ist, wie folgt:

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varepsilon; \tag{19}$$

werden x, y als Größen erster Kleinheitsordnung aufgefaßt, so ist z von der zweiten und ε von der dritten Ordnung.

Mit Weglassung von ε stellt die Gleichung (19) ein (elliptisches oder hyperbolisches) Paraboloid dar, das mit der Fläche im Punkte M eine Berührung erster Ordnung hat (**145**).

Führt man in der xy-Ebene Polarkoordinaten ein und setzt demgemäß

$$x = \varrho \cos\omega, \qquad y = \varrho \sin\omega,$$

so verwandelt sich (19) in:

$$\frac{2z}{\varrho^2} = r\cos^2\omega + 2s\cos\omega\sin\omega + t\sin^2\omega + \frac{2\varepsilon}{\varrho^2};$$

wird nun das Koordinatensystem noch derart angeordnet, daß die yz- und zx-Ebene mit den Hauptnormalschnitten zusammenfallen, so verschwindet s und geht r über in $\frac{1}{R_1}$, t in $\frac{1}{R_2}$, so daß die letzte Gleichung lautet:

$$\frac{2z}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2} + \frac{2\varepsilon}{\varrho^2}.$$

Gibt man z einen konstanten Wert $\varkappa$ von der Kleinheitsordnung des ϱ^2 und vernachlässigt rechts die Größe erster Kleinheitsordnung $\frac{2\varepsilon}{\varrho^2}$ neben den endlichen Gliedern, so stellt

$$\frac{2\varkappa}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2} \tag{20}$$

die Polargleichung der Schnittkurve der Ebene $z = \varkappa$ mit der gegebenen Fläche (präziser: der Projektion dieser Schnittkurve auf der xy-Ebene) dar, jedoch mit Unterdrückung von Gliedern, welche neben den beibehaltenen als irrelevant zu betrachten sind. Das durch (20) dargestellte Gebilde ist aber dem in den Gleichungen (16), (17), (18) enthaltenen *ähnlich*, wobei zu be-

merken ist, daß in dem mittleren dieser drei Fälle das $\varkappa$ der Gleichung (20) einmal einen positiven, einmal den gleichgroßen negativen Wert erhalten muß.

Es darf jedoch nicht übersehen werden, daß die Gleichung (20) nur für die nächste Umgebung von M Geltung hat; sie darf auf den ganzen Schnitt der Ebene $z = \varkappa$ mit der Fläche nur dann angewendet werden, wenn derselbe eine sehr geringe Ausdehnung hat, wie dies bei elliptischen Punkten zutreffen wird; in den anderen Fällen, die sich bei hyperbolischen und parabolischen Punkten ergeben, charakterisiert sie bloß den dem Punkte M zunächst liegenden Teil des Schnittes.

Mit diesen Einschränkungen darf man den Satz aussprechen, *daß der Durchschnitt einer krummen Fläche mit einer zur Tangentialebene in M parallelen und ihr sehr nahen Ebene eine der Dupinschen Indikatrix ähnliche Figur sei.*

Man pflegt diesen Durchschnitt auch als Indikatrix des Punktes M zu bezeichnen.

Kehren wir nochmals zu der entwickelten Flächengleichung (19):

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varepsilon,$$

zurück. Setzt man darin $z = 0$, so ist

$$0 = rx^2 + 2sxy + ty^2 + 2\varepsilon \tag{21}$$

die Gleichung des Schnittes der Fläche mit der xy-Ebene, d. i. mit der Tangentialebene im Punkte M.

Nach den Darlegungen in 162 ist für diesen Schnitt der Punkt M ein Doppelpunkt, und zwar ein Knotenpunkt, wenn

$$rt - s^2 < 0,$$

wenn also M ein hyperbolischer Punkt ist; die Tangenten in ihm fallen mit den Asymptoten der Indikatrix zusammen, weil die Gleichung, welche diese Tangenten bestimmt, d. i.

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0,$$

das Unendlichwerden von R zur Folge hat (203, (12)).

Der Punkt M ist für die Schnittkurve ein isolierter Punkt, wenn

$$rt - s^2 > 0,$$

d. h. wenn M ein elliptischer Punkt ist. Da hier alle Be-

dingungen für ein Extrem der Funktion z erfüllt sind, so ist der Wert $z=0$, den sie in M hat, ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem die benachbarten Werte z negativ oder positiv sind.

In dem Grenzfalle

$$rt - s^2 = 0,$$

der einen parabolischen Punkt anzeigt, kann der Schnitt (21) in M eine Spitze, Selbstberührung oder auch einen isolierten Punkt mit reeller Tangente aufweisen. Ist die Fläche abwickelbar (**192**, (23)), so hat die Tangentialebene mit der Fläche eine Erzeugende gemein, die zweifach gezählt als Durchschnitt der Tangentialebene mit der Fläche anzusehen ist.

206. Bestimmung der Hauptnormalschnitte und Hauptkrümmungsradien. Um für einen beliebigen Punkt einer gegebenen krummen Fläche die Lage der Hauptnormalschnitte und die Größe der Hauptkrümmungsradien zu bestimmen, gehen wir von dem allgemeinen Ausdruck **203**, (8) für die Krümmung eines Normalschnittes:

$$\frac{1}{R} = \frac{r \cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \tag{22}$$

aus und stellen die Bedingung für deren extreme Werte auf; dabei ist zu beachten, daß die Winkel α, β, welche allein bei der Drehung des Normalschnittes um die Normale der Fläche sich ändern, nicht unabhängig voneinander sind, daß sie vielmehr der aus **201**, (4) resultierenden Bedingung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + (p\cos\alpha + q\cos\beta)^2 - 1 = 0 \tag{23}$$

zu genügen haben.

Setzt man zur Abkürzung die positive Quadratwurzel

$$\sqrt{p^2+q^2+1} = w, \tag{24}$$

so handelt es sich also um die relativen Extreme der Funktion $\frac{w}{R}$ mit der Nebenbedingung (23), und dies kommt nach **125** auf die Untersuchung der absoluten Extreme von:

$$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta$$
$$- \lambda[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + (p\cos\alpha + q\cos\beta)^2 - 1]$$

zurück, wobei λ einen noch unbestimmten Multiplikator bedeutet. Die Bedingungen für ein absolutes Extrem sind aber:

$$(25) \quad \begin{cases} r\cos\alpha + s\cos\beta = \lambda[(1+p^2)\cos\alpha + pq\cos\beta] \\ s\cos\alpha + t\cos\beta = \lambda[(1+q^2)\cos\beta + pq\cos\alpha]; \end{cases}$$

daraus ergibt sich durch Elimination von λ die in bezug auf $\cos\alpha$, $\cos\beta$ homogene quadratische Gleichung:

$$(26) \quad \begin{cases} [(1+p^2)s - pqr]\cos^2\alpha - [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\cos\alpha\cos\beta \\ \qquad - [(1+q^2)s - pqt]\cos^2\beta = 0, \end{cases}$$

durch welche die *Lage der Hauptnormalschnitte* charakterisiert ist. Die Gleichung gibt nämlich zwei Werte für den Quotienten

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{dy}{dx},$$

und diese bestimmen die Richtungen der Projektionen der Tangenten an die Hauptnormalschnitte in der xy-Ebene; dadurch sind die Tangenten selbst und mit Zuziehung der Flächennormale endlich die Hauptnormalebenen gegeben.

Die Bedeutung des Multiplikators λ findet sich aus den Gleichungen (25), wenn man die erste mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\cos\beta$ multipliziert und darauf die Summe bildet; vermöge (22) und (23) erhält man:

$$\lambda = \frac{w}{R}.$$

Setzt man diesen Wert in (25) ein und ordnet wie folgt:

$$\{rR - (1+p^2)w\}\cos\alpha + \{sR - pqw\}\cos\beta = 0,$$
$$\{sR - pqw\}\cos\alpha + \{tR - (1+q^2)w\}\cos\beta = 0,$$

so liefert die Elimination von $\cos\alpha$, $\cos\beta$ die in bezug auf R quadratische Gleichung:

$$(27) \quad (rt - s^2)R^2 - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]wR + w^4 = 0,$$

welche, da sie aus den Bedingungen für die Extreme von $\frac{w}{R}$ hervorging, die *Größe der Hauptkrümmungshalbmesser* bestimmt.

Das Vorzeichen des Produktes der Hauptkrümmungsradien stimmt vermöge dieser Gleichung mit dem Vorzeichen von $rt - s^2$ überein und wird einer der Radien unendlich, wenn

$rt - s^2$ Null ist. Aus dieser Bemerkung lassen sich die drei Arten von Flächenpunkten (**203**—**204**) aufs neue ableiten.

Man kann den beiden Gleichungen (26) und (27) mittels folgender Substitutionen eine einfache Form erteilen; setzt man nämlich

$$(28)\qquad \begin{aligned} A_1 &= \frac{(1+q^2)r - pqs}{w^3}, & A_2 &= \frac{(1+q^2)s - pqt}{w^3}, \\ B_1 &= \frac{(1+p^2)s - pqr}{w^3}, & B_2 &= \frac{(1+p^2)t - pqs}{w^3}, \end{aligned}$$

so schreibt sich die Gleichung (26):

$$(26^*)\qquad B_1 \cos^2\alpha - (A_1 - B_2)\cos\alpha\cos\beta - A_2\cos^2\beta = 0$$

und die Gleichung (27):

$$(27^*)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} R^2 - (A_1 + B_2)R + 1 = 0.$$

An dieser Form läßt sich leicht erweisen, daß beide Gleichungen immer reelle Wurzeln ergeben. Es ist nämlich die Diskriminante der ersten Gleichung:

$$D = (A_1 - B_2)^2 + 4A_2B_1,$$

die der zweiten:

$$(A_1 + B_2)^2 - 4(A_1B_2 - A_2B_1) = (A_1 - B_2)^2 + 4A_2B_1 = D,$$

die Diskriminanten stimmen also überein, und hat man nachgewiesen, daß D positiv ist, so folgt daraus die Realität der Wurzeln beider Gleichungen. Nun ergibt sich aus (28), daß

$$(1+p^2)A_2 - (1+q^2)B_1 = \frac{1}{w^3}\{(1+q^2)pqr - (1+p^2)pqt\}$$

$$(A_1 - B_2)pq = \frac{1}{w^3}\{(1+q^2)pqr - (1+p^2)pqt\},$$

daher ist

$$(1+p^2)A_2 = (1+q^2)B_1 + (A_1 - B_2)pq$$

und infolgedessen

$$(29)\qquad \begin{aligned} (1+p^2)D &= (1+p^2)(A_1 - B_2)^2 + 4(1+q^2)B_1^2 \\ &\qquad + 4pq(A_1 - B_2)B_1 \\ &= (A_1 - B_2)^2 + [p(A_1 - B_2) + 2qB_1]^2 + 4B_1^2; \end{aligned}$$

es läßt sich also $(1+p^2)D$ als Summe dreier Quadrate darstellen und deshalb ist auch D eine positive Größe.

207. Analytische Charakteristik der Nabelpunkte. Ein *Nabelpunkt* ist dadurch gekennzeichnet, daß sich für ihn keine Bestimmung der Hauptnormalschnitte ergibt; die Gleichung (26) versagt aber nur dann, wenn die Koeffizienten einzeln verschwinden, wenn also:

$$(1+p^2)s - pqr = 0, \qquad (1+q^2)r - (1+p^2)t = 0,$$
$$(1+q^2)s - pqt = 0$$

oder

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2} \tag{30}$$

ist.

Man hätte zu diesem Resultate auch von der Gleichung (27) aus gelangen können, da man einen Nabelpunkt auch als einen Punkt mit gleichen Hauptkrümmungsradien definieren kann. Die Gleichheit der Wurzeln erfordert aber das Verschwinden der Determinante, dieses wieder erfordert nach (29), daß

$$A_1 = B_2, \qquad B_1 = 0$$

sei, und dies führt laut (28) tatsächlich wieder auf (30) hin.

Die letzten beiden Gleichungen haben aber auch

$$A_2 = 0$$

zur Folge; wenn sie also erfüllt sind, so verschwinden sämtliche Koeffizienten von (26*) und man kommt so wieder zum ersten Prinzip zurück.

Aus (30) lassen sich im allgemeinen zwei voneinander unabhängige Gleichungen formieren; jede derselben stellt eine Fläche dar, und diese zwei Flächen in Verbindung mit der gegebenen Fläche bestimmen die Nabelpunkte der letzteren, so daß es deren in der Regel nur eine beschränkte Anzahl gibt.

Wenn jedoch die Beziehungen (30) auf eine einzige Gleichung sich reduzieren, so hat die gegebene Fläche eine *Nabelpunktlinie*, und sind sie identisch erfüllt, so sind alle Punkte der Fläche Nabelpunkte (die Kugel).

208. Beispiele. 1) Es sind die Hauptnormalschnitte und Hauptkrümmungsradien für einen Punkt einer Rotationsfläche zu bestimmen.

Die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen, für welche die z-Achse Rotationsachse ist, kann (**189**, (2)) in der Form

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

geschrieben werden. Setzt man vorübergehend

$$\sqrt{x^2 + y^2} = u,$$

so erhält man durch sukzessive Differentiation:

$$p = f'(u)\frac{x}{u}, \qquad q = f'(u)\frac{y}{u}$$

$$r = f''(u)\frac{x^2}{u^2} + f'(u)\frac{y^2}{u^3}$$

$$s = f''(u)\frac{xy}{u^2} - f'(u)\frac{xy}{u^3}$$

$$t = f''(u)\frac{y^2}{u^2} + f'(u)\frac{x^2}{u^3};$$

da aber bei einer Rotationsfläche alle Punkte eines Parallelkreises gleiche Krümmungsverhältnisse aufweisen, so wird man zweckmäßig den Punkt so wählen, daß

$$y = 0, \quad \text{folglich} \quad u = x$$

sei; er liegt dann in dem durch die zx-Ebene bestimmten Meridian, und nunmehr ist:

$$p = f'(x), \qquad q = 0$$

$$r = f''(x), \qquad s = 0, \qquad t = \frac{f'(x)}{x}.$$

Hiermit ergeben sich nach Vorschrift von **206**, (26) und (23) zur Bestimmung der Hauptnormalschnitte die Gleichungen:

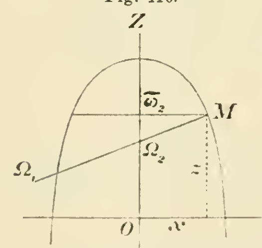
$$\cos\alpha\cos\beta = 0;$$

$$\{1 + f'(x)^2\}\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1;$$

die eine Lösung ist

$$\cos\beta = 0, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}, \quad \text{woraus} \quad \operatorname{tg}\alpha = f'(x);$$

Fig. 110.



und weil hierdurch die Tangente an den Meridian im Punkte M (Fig. 110) charakterisiert ist, so bildet der Meridian den einen Hauptnormalschnitt; der andere berührt, wie dies auch die zweite Lösung

$$\cos\alpha = 0$$
$$\cos\beta = 1$$

bestätigt, den Parallelkreis des Punktes M in M.

Die Frage nach den Hauptkrümmungsradien ist damit schon erledigt; der eine, R_1, ist der Krümmungshalbmesser des Meridians, also

$$R_1 = \frac{\{1 + f'(x)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)};$$

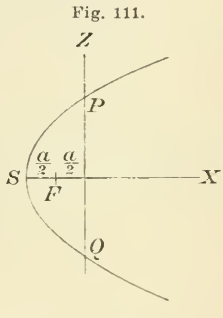
der andere, R_2, projiziert sich nach dem Satze von Meusnier auf die Ebene des Parallelkreises in den Halbmesser $M\varpi_2$; folglich ist

$$R_2 = = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x\sqrt{1 + f'(x)^2}}{f'(x)}$$

und liegt der Krümmungsmittelpunkt Ω_2 des zweiten Hauptnormalschnittes immer in der Rotationsachse.

Für den Punkt $x = 0$, $y = 0$ werden die Differentialquotienten $p, q \ldots$ unbestimmt und die Gleichung (26) illusorisch; der Punkt, in welchem die z-Achse die Rotationsfläche schneidet, ist in der Tat, sofern er reell ist, entweder ein Nabelpunkt oder ein singulärer Punkt.

Fig. 111.



Läßt man beispielsweise die Parabel $z^2 = 2ax + 2a^2$ um die z-Achse rotieren (Fig. 111), so entstehen in der z-Achse singuläre Punkte P, Q; der Scheitel S aber wird ein Nabelpunkt, weil $R_1 = R_2 = a$ (**157**, 1)) ist; die Fläche hat somit einen Parallelkreis von Nabelpunkten.

2) Für einen Punkt des geraden Schraubenkonoids (**185**, 2))

$$z = b \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{x}$$

die Hauptkrümmungsradien zu bestimmen.

An der zitierten Stelle ergaben sich für die Differentialquotienten die Ausdrücke:

$$p = -\frac{by}{x^2 + y^2}, \qquad q = \frac{bx}{x^2 + y^2}$$

$$r = \frac{2bxy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad s = -\frac{b(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad t = -\frac{2bxy}{(x^2 + y^2)^2};$$

trägt man sie in die Gleichung **206**, (27) ein, so lautet diese:

$$-\frac{b^2}{(x^2 + y^2)^2} R^2 + \frac{(x^2 + y^2 + b^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0;$$

sie ist rein quadratisch und gibt

$$R_{1,2} = \pm \frac{x^2 + y^2 + b^2}{b}.$$

In jedem Punkte der Wendelfläche sind also die beiden Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet; die Indikatrix besteht daher aus zwei gleichseitigen konjugierten Hyperbeln; die Haupttangenten sind demzufolge aufeinander senkrecht. Die eine der Haupttangenten fällt mit der geradlinigen Erzeugenden durch den Punkt M zusammen, die andere ist die zu ihr normale Flächentangente.

3) Es sollen die Nabelpunkte des dreiachsigen Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c)$$

bestimmt werden.

Zur Bestimmung der Differentialquotienten ergeben sich durch sukzessive Differentiation die Gleichungen:

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a^2} + \dfrac{zp}{c^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{y}{b^2} + \dfrac{zq}{c^2} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{c^2} + \frac{zr}{c^2} = 0$$

$$\frac{pq}{c^2} + \frac{zs}{c^2} = 0$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{q^2}{c^2} + \frac{zt}{c^2} = 0;$$

daraus folgt

$$r = -\frac{1}{z}\left(\frac{c^2}{a^2} + p^2\right), \qquad s = -\frac{pq}{z}, \qquad t = -\frac{1}{z}\left(\frac{c^2}{b^2} + q^2\right).$$

Die Nabelpunkte haben laut (30) den beiden Gleichungen

$$(1 + p^2)t - (1 + q^2)r = 0$$
$$(1 + p^2)s - \quad pqr \quad = 0$$

zu genügen, welche auf den vorliegenden Fall angewendet lauten:

$$a^2(b^2 - c^2)p^2 - b^2(a^2 - c^2)q^2 - c^2(a^2 - b^2) = 0,$$
$$pq = 0.$$

Von den zwei Lösungen der zweiten Gleichung ist $p = 0$

zu verwerfen, weil in diesem Falle die erste für q keinen reellen Wert zuläßt.

Hingegen gibt für $q = 0$ die erste Gleichung

$$p = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}};$$

diese Werte von p, q in die Gleichungen (A) eingetragen führen zu:

$$y = 0$$

$$\frac{x}{a} \pm \frac{z}{c}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}} = 0,$$

und nimmt man die Gleichung der Fläche hinzu, so findet sich zur Bestimmung von x, z weiter die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Daraus ergeben sich schließlich die Lösungen:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad y = 0, \qquad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

durch welche vier Punkte in der zx-Ebene bestimmt sind.

Das dreiachsige Ellipsoid besitzt also vier Nabelpunkte; sie liegen in dem Hauptschnitte mit der größten und kleinsten Achse, und weil für sie

$$x^2 + z^2 = a^2 + c^2 - b^2,$$

so werden sie aus diesem Hauptschnitte durch einen ihm konzentrischen Kreis vom Radius $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$ ausgeschnitten.

Die Indikatrix eines Nabelpunktes (205) ist ein Kreis, bei einer Fläche zweiter Ordnung in aller Strenge; parallele Schnitte einer solchen Fläche sind ähnlich; daher bestimmen die Tangentialebenen in den Nabelpunkten des Ellipsoids die Stellung der beiden Scharen seiner Kreisschnittebenen.

§ 7. Spezielle Kurven auf krummen Flächen.

209. Schichtenlinien und Fall-Linien. Von der Vorstellung ausgehend, die xy-Ebene sei *horizontal*, nennt man die Schnitte einer Fläche parallel zu dieser Ebene *Niveaulinien* oder *Schichtenlinien*.

Ihre Projektionen auf der xy-Ebene sind durch die Gleichung der Fläche selbst dargestellt, wenn man in dieser z als veränderlichen Parameter ansieht.

Da für eine Schichtenlinie

$$z = \text{konst.}$$

ist, so folgt daraus durch Differentation, daß für ihre Punkte

$$p\,dx + q\,dy = 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q} \tag{1}$$

ist; diese Gleichung drückt die Eigenschaft aus, daß die Tangente an eine Schichtenlinie (sowie an ihre Projektion in der xy-Ebene) parallel ist der xy-Spur der in ihrem Berührungspunkte an die Fläche gelegten Tangentialebene.

Diejenigen Kurven auf einer Fläche, welche die Schichtenlinien rechtwinklig schneiden, nennt man *Fall-Linien*, weil sie die Bahnen von Punkten anzeigen, welche unter dem Einfluß der Schwere allein auf der Fläche sich bewegen.

Weil im Schnittpunkte einer Schichtenlinie mit einer Fall-Linie die Tangenten beider Kurven aufeinander senkrecht stehen und diese Eigenschaft auch auf die xy-Projektion sich überträgt, so sind die Projektionen der Fall-Linien in der xy-Ebene durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p} \tag{2}$$

gekennzeichnet.

Man nennt (1) die Differentialgleichung der Niveaulinien, (2) die Differentialgleichung der Fall-Linien.

Diese zwei Systeme von Kurven finden Anwendung bei der bildlichen Darstellung einer Terrainfläche in der Horizontalebene.

Beispiele. 1) Die Schichtenlinien des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

geben in der xy-Projektion ein System homothetischer Ellipsen mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2},$$

in welcher z^2 auf das Intervall $(0, c^2)$ angewiesen ist.

Für die Fall-Linien besteht, weil $p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$, $q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$, die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

oder:

$$\frac{1}{a^2}\frac{dy}{y} = \frac{1}{b^2}\frac{dx}{x};$$

es ist aber $\frac{1}{m^2}\frac{du}{u}$ das Differential von $\frac{1}{m^2}\, l\, u$, daher kann aus der letzten Gleichung auf die neue

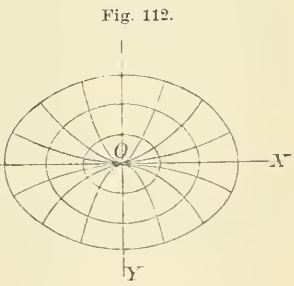
$$\frac{1}{a^2}\, l\, y = \frac{1}{b^2}\, l\, x + \frac{1}{a^2}\, l\, C$$

geschlossen werden, wenn C eine beliebige Konstante bedeutet; daraus aber folgt durch Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen:

$$y = C x^{\frac{a^2}{b^2}}.$$

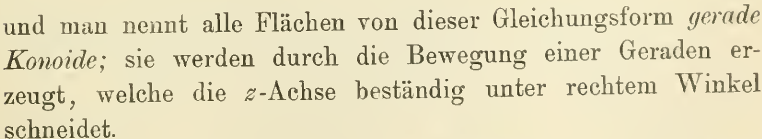
Diese Gleichung stellt das System der xy-Projektionen der Fall-Linien dar. Es sind Parabeln, algebraische oder transzendente, je nachdem $\frac{a^2}{b^2}$ rational oder irrational ist. Im Falle $\frac{a^2}{b^2} = 2$ z. B., der in Fig. 112 dargestellt ist, sind es gewöhnliche Parabeln.

Fig. 112.



2) Die Gleichung der Wendelfläche (185, (15)) ist ein besonderer Fall der allgemeinen Gleichung

$$(3) \qquad z = f\left(\frac{y}{x}\right),$$


und man nennt alle Flächen von dieser Gleichungsform *gerade Konoide;* sie werden durch die Bewegung einer Geraden erzeugt, welche die z-Achse beständig unter rechtem Winkel schneidet.

Daraus folgt schon, daß die Niveaulinien dieser Flächen Gerade sind; damit stimmt auch überein, daß die Gleichung (3), wenn man z als veränderlichen Parameter auffaßt, ein Strahlenbüschel in der xy-Ebene darstellt.

Setzt man für den Augenblick $\frac{y}{x} = u$, so ist

$$p = -f'(u)\frac{y}{x^2}, \qquad q = f'(u)\frac{1}{x}$$

und die Differentialgleichung der Fall-Linien:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

wird unabhängig von der Funktion f. Schreibt man sie in der Form

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

so erkennt man in der linken Seite das halbe Differential von $x^2 + y^2$; infolgedessen ist

$$x^2 + y^2 = C$$

die Gleichung des Systems der xy-Projektionen der Fall-Linien, das also ein System konzentrischer Kreise ist.

210. Krümmungslinien. Die Normalenfläche einer gegebenen Fläche

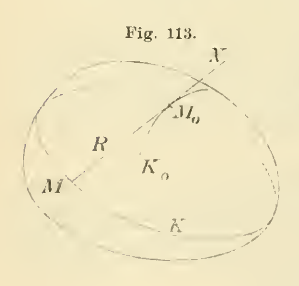
$$z = f(x, y)$$

längs einer ihr aufgeschriebenen Kurve ist im allgemeinen eine *windschiefe Fläche*, d. h. eine solche, deren geradlinige Erzeugende weder durch einen festen (im Endlichen liegenden oder unendlich fernen) Punkt gehen, noch Tangenten an eine Kurve sind.

Ist jedoch die aufgeschriebene Kurve K solcher Art, daß die zu ihr gehörige Normalenfläche eine *abwickelbare Fläche* ist, so heißt sie eine *Krümmungslinie* der gegebenen Fläche; der Grund für diese Bezeichnung wird sich alsbald ergeben.

Es gibt zwei Flächen, für welche jede aufgeschriebene Kurve im Sinne dieser Definition eine Krümmungslinie ist: die Ebene und die Kugel, denn dort ist die Normalenfläche ein Zylinder, hier ein Kegel.

Fig. 113.



Es entsteht nun die Frage, ob auf einer beliebigen Fläche Krümmungslinien existieren und welches ihre analytischen Merkmale und geometrischen Eigenschaften sind.

Angenommen, K (Fig. 113) sei eine Krümmungslinie der Fläche und K_0 die Rückkehrkante der zugehörigen develop-

pabeln Normalenfläche; dann ist die Normale der Fläche in einem Punkte $M(x/y/z)$ von K Tangente an K_0 in einem bestimmten Punkte $M_0(x_0/y_0/z_0)$ und umgekehrt. Bezeichnet man also die Kosinus der positiven Normalenrichtung in M mit X, Y, Z, und beachtet, daß $\frac{dx_0}{du}, \frac{dy_0}{du}, \frac{dz_0}{du}$ proportional sind den Richtungskosinus der Tangente an K_0 in M_0, wobei u der Parameter ist, durch welchen alle auf M als Punkt von K bezüglichen Größen dargestellt sind, so muß

$$\frac{\frac{dx_0}{du}}{X} = \frac{\frac{dy_0}{du}}{Y} = \frac{\frac{dz_0}{du}}{Z}$$

sein; ist $\varkappa$ der gemeinsame Wert dieser Verhältnisse, so hat man:

$$\frac{dx_0}{du} = \varkappa X, \qquad \frac{dy_0}{du} = \varkappa Y, \qquad \frac{dz_0}{du} = \varkappa Z. \tag{4}$$

Nun bestehen, wenn die Länge M_0M mit R bezeichnet wird, zwischen den Koordinaten von M und M_0 die Beziehungen:

$$x_0 = x - RX, \qquad y_0 = y - RY, \qquad z_0 = z - RZ;$$

dabei ist R positiv oder negativ, je nachdem M_0M die Richtung der positiven oder negativen Normale hat; führt man hiernach die Gleichungen (4) aus, so folgt:

$$\varkappa X = \frac{dx}{du} - \frac{dR}{du}X - R\frac{dX}{du}$$

$$\varkappa Y = \frac{dy}{du} - \frac{dR}{du}Y - R\frac{dY}{du}$$

$$\varkappa Z = \frac{dz}{du} - \frac{dR}{du}Z - R\frac{dZ}{du};$$

werden diese Gleichungen der Reihe nach mit X, Y, Z multipliziert und hierauf addiert, wobei zu beachten ist, daß

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

infolgedessen

$$X\frac{dX}{du} + Y\frac{dY}{du} + Z\frac{dZ}{du} = 0,$$

und daß ferner

$$X\frac{dx}{du} + Y\frac{dy}{du} + Z\frac{dz}{du} = 0$$

ist, weil die Normale MN senkrecht ist zur Tangente an K in M, so ergibt sich

$$\varkappa = -\frac{dR}{du};$$

und wird dieser Wert in das obige Gleichungssystem eingetragen, so kommt man zu den die Krümmungslinie charakterisierenden Gleichungen*):

$$\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ} (= R). \tag{5}$$

Bei der am Beginn dieses Artikels vorausgesetzten Gleichungsform der Fläche ist

$$X = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad Y = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}};$$

hieraus berechnet sich

$$dX = \frac{dp\sqrt{p^2 + q^2 + 1} - \frac{p(pdp + qdq)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}}{p^2 + q^2 + 1}$$
$$= \frac{(1 + q^2)(rdx + sdy) - pq(sdx + tdy)}{w^3},$$

$$dY = \frac{dq\sqrt{p^2 + q^2 + 1} - \frac{q(pdp + qdq)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}}{p^2 + q^2 + 1}$$
$$= \frac{(1 + p^2)(sdx + tdy) - pq(rdx + sdy)}{w^3},$$

wenn, wie dies schon an einer früheren Stelle geschah, zur Abkürzung

$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1} = w$$

gesetzt wird.

Mit diesen Ausdrücken gibt (5):

$$\frac{dx}{(1 + q^2)(rdx + sdy) - pq(sdx + tdy)} \tag{6}$$
$$= \frac{dy}{(1 + p^2)(sdx + tdy) - pq(rdx + sdy)} = \frac{R}{w^3};$$

ordnet man die erste dieser Gleichungen nach dx, dy, so erhält man:

$$\text{(7)} \quad \begin{cases} [(1 + p^2)s - pqr]\,dx^2 - [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]\,dx\,dy \\ \qquad - [(1 + q^2)s - pqt]\,dy^2 = 0. \end{cases}$$

*) Diese Gleichungen hat zuerst O. Rodrigues gefunden, vgl. Correspond. sur l'école polytechn., 1816.

Diese Gleichung bestimmt die Richtung der Tangenten an die durch den Punkt M gehenden Krümmungslinien; sie fällt aber zusammen mit jener Gleichung (26), welche sich in **206** zur Bestimmung der Tangentenrichtungen für die Hauptnormalschnitte im Punkte M ergab.

Daraus folgt der Satz: *Durch jeden Punkt einer krummen Fläche, sofern er nicht Nabelpunkt ist, gehen zwei stets reelle Krümmungslinien, welche die Hauptnormalschnitte dieses Punktes berühren und sich daher wie diese unter rechtem Winkel schneiden.*

Jede Fläche, die Ebene und die Kugel ausgenommen, besitzt somit zwei Scharen von reellen Krümmungslinien derart, daß jede Kurve der einen Schar jede der anderen Schar rechtwinklig schneidet.

Die Gleichung (7) charakterisiert die Projektion der Krümmungslinien auf der xy-Ebene und wird als *Differentialgleichung der Krümmungslinien* bezeichnet.

Um die Rückkehrkante der abwickelbaren Normalenfläche längs einer Krümmungslinie näher kennen zu lernen, ordnen wir die beiden Gleichungen, welche sich aus (6) durch Verbindung des ersten und zweiten Ausdrucks mit dem dritten ergeben, nach dx, dy; aus dem so entstehenden Gleichungspaar

$$\left\{\frac{R}{w^3}[(1+q^2)r - pqs] - 1\right\}dx + \frac{R}{w^3}[(1+q^2)s - pqt]\,dy = 0$$

$$\frac{R}{w^3}[(1+p^2)s - pqr]\,dx + \left\{\frac{R}{w^3}[(1+p^2)t - pqs] - 1\right\}dy = 0$$

geht durch Elimination von dx, dy die in bezug auf R quadratische Gleichung

$$(8)\quad (rt - s^2)R^2 - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\,wR + w^4 = 0$$

hervor; diese Gleichung stimmt aber mit jener (27) überein, welche sich in **206** zur Berechnung der Hauptkrümmungsradien ergeben hat.

Demnach gilt der Satz: *Die Normale im Punkte M berührt die Rückkehrkante der Normalenfläche, welche zu der einen durch M gehenden Krümmungslinie gehört, in dem Krümmungsmittelpunkte des Normalschnittes von größter Krümmung, die Rückkehrkante der anderen Normalenfläche im Krümmungsmittelpunkte des Normalschnittes von kleinster Krümmung.*

Dadurch sind die beiden Scharen von Krümmungslinien voneinander unterschieden, daß nämlich die Linien der einen Schar überall die Richtung der stärksten, die der anderen Schar die Richtung der schwächsten Krümmung anzeigen; in dieser Eigenschaft ist auch der Name dieser Linien begründet.

Wenn die Krümmungslinie K die Schar, zu welcher sie gehört, stetig durchläuft, so vollführt die zugeordnete Rückkehrkante K_0 auch eine stetige Bewegung und beschreibt eine Fläche; eine zweite Fläche gleicher Entstehungsweise ergibt sich aus der anderen Schar von Krümmungslinien. Diese zwei Flächen sind aber ebenso als ein einheitliches Gebilde anzusehen, wie die beiden Scharen von Krümmungslinien, die ja auch durch *eine* Gleichung analytisch bestimmt sind; man nennt sie zusammen die *Polar-* oder *Zentralfläche* der gegebenen Fläche; der eine Mantel enthält die Krümmungszentra der Hauptnormalschnitte größter Krümmung, der andere Mantel die Zentra der Hauptnormalschnitte kleinster Krümmung.

211. Krümmungslinien der Rotationsflächen und der abwickelbaren Flächen. Bei zwei Gattungen von Flächen lassen sich die Krümmungslinien ohne weiteres angeben.

Auf einer *Rotationsfläche* bilden die Meridiane das eine System, die Parallelkreise das andere System. Denn die Normalenfläche längs eines Meridians ist eine Ebene, jene längs eines Parallelkreises ein Kegel, beide sind also abwickelbar.

Auf einer *abwickelbaren Fläche* sind die geradlinigen Erzeugenden das eine System von Krümmungslinien; denn weil die Fläche in allen Punkten einer Erzeugenden von einer und derselben Ebene berührt wird, so ist die Normalenfläche längs der Erzeugenden eine Ebene, also abwickelbar. Das andere System schneidet die Erzeugenden rechtwinklig.

Was insbesondere den *Kegel* anlangt, so wird auf diesem das zweite System von Krümmungslinien durch eine Schar konzentrischer Kugeln aus der Kegelspitze ausgeschnitten, und auf dem *Zylinder* durch die Schar der Normalschnittebenen.

In der Abwicklung erscheinen, wenn es sich um eine allgemeine Developpable handelt, die Krümmungslinien der einen Schar als Tangenten an die transformierte Rückkehrkante und

die der anderen Schar als Evolventen dieser Kurve; bei einem Kegel ergibt sich in der Abwicklung ein Strahlenbüschel und ein System konzentrischer Kreise, bei einem Zylinder zwei zueinander senkrechte Parallelstrahlenbüschel.

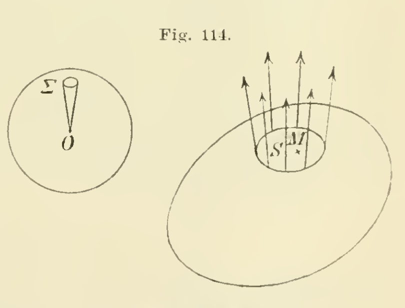
Für eine beliebige Fläche bildet die analytische Bestimmung der Krümmungslinien eine Aufgabe der Integralrechnung.

212. Krümmungsmaß einer Fläche. An die Besprechung der Krümmungslinien möge eine kurze Erörterung über eine Frage geschlossen werden, auf welche Gauß*) zuerst eine präzise Antwort gegeben hat.

Es ist bisher nur von der Krümmung von Linien auf Flächen und nicht von der *Krümmung der Flächen* selbst gesprochen worden. Gauß hat für die Krümmung einer Fläche in einem ihrer Punkte die folgende Definition aufgestellt, welche der Definition für die Flexion einer Raumkurve (173) nachgebildet ist.

Ein den betreffenden Punkt M einschließender (oder wenigstens nicht ausschließender) Teil S (Fig. 114) der krummen Fläche werde auf einer Kugel vom Halbmesser 1 in der Weise abgebildet, daß man aus dem Mittelpunkte der Kugel einen Kegel konstruiert, dessen Seiten parallel sind den Normalen der Fläche längs des Umfanges von S; der innerhalb dieses Kegels liegende Teil Σ der Kugeloberfläche ist unter gewissen alsbald zu erwähnenden Voraussetzungen die *Abbildung* von S in dem Sinne, daß die Punkte von S und Σ durch *parallele Normalen* ein-eindeutig aufeinander bezogen sind. Der Grenzwert des Quotienten $\frac{\Sigma}{S}$ für ein gegen die Grenze Null abnehmendes S heißt das (*Gaußsche*) *Krümmungsmaß der Fläche* im Punkte M.

Fig. 114.

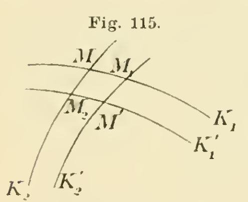


*) Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1828, art. 6 (Werke, Bd. 8).

Hierzu ist folgendes zu bemerken. Die Normalen der Fläche sind, gleichgültig ob der Punkt ein elliptischer oder hyperbolischer ist, insgesamt nach einer und derselben Seite der Fläche zu wenden. Das Element S ist so einzurichten, daß innerhalb und am Rande desselben keine zwei Normalen parallel sind, damit nicht zwei verschiedene Punkte der Fläche sich in dem nämlichen Punkte der Kugel abbilden. Unter diesen Festsetzungen werden bei einem elliptischen Punkte die Umfänge von S und Σ in gleichem Sinne durchlaufen, bei einem hyperbolischen Punkte in entgegengesetztem Sinne.

Ist die Fläche abwickelbar, so schneidet die Erzeugende, welche durch einen Punkt des Umfanges von S geht, diesen Umfang noch ein zweitesmal, und die beiden so bestimmten Punkte des Umfanges bilden sich in *einem* Punkte der Kugel ab; infolgedessen reduziert sich das ganze sphärische Bild von S auf eine Linie, deren Inhalt gleich Null ist; eine abwickelbare Fläche hat daher in jedem Punkte die Krümmung Null (wie eine Ebene).

Fig. 115.



Um den Ausdruck für die Krümmung in M zu erhalten, führen wir durch M die beiden Krümmungslinien K_1, K_2 (Fig. 115) und außer diesen zwei weitere Krümmungslinien K_1', K_2'; K_1 und K_1' wie auch K_2 und K_2' gehören derselben Schar an. Das von diesen vier Krümmungslinien begrenzte Element $S = MM_1M'M_2$ kann dann bei entsprechender Kleinheit wie ein ebenes Rechteck durch

$$S = MM_1 \cdot MM_2$$

ausgedrückt werden. Sein sphärisches Bild $\mu\mu_1\mu'\mu_2$ wird gleichfalls rechte Winkel haben und sich dem Inhalte nach durch

$$\Sigma = \mu\mu_1 \cdot \mu\mu_2$$

ausdrücken lassen. Bezeichnet man weiter den Winkel der Normalen in M und M_1 mit τ_1, den Krümmungshalbmesser des K_1 in M berührenden Hauptnormalschnittes mit R_1; den Winkel der Normalen in M und M_2 mit τ_2 und den Krümmungshalbmesser des K_2 in M berührenden Hauptnormalschnittes mit R_2: so ist, je enger die Krümmungslinien zusammenrücken, um so genauer

$$MM_1 = R_1 \tau_1; \qquad \mu\mu_1 = \tau_1;$$
$$MM_2 = R_2 \tau_2; \qquad \mu\mu_2 = \tau_2;$$

daher

$$S = R_1 R_2 \tau_1 \tau_2,$$
$$\Sigma = \tau_1 \tau_2,$$

und das Krümmungsmaß der Fläche im Punkte M:

$$\mathsf{K} = \frac{1}{R_1 R_2}. \tag{9}$$

Hiernach ist *das Krümmungsmaß der Fläche im Punkte M gleich dem Produkte der Hauptkrümmungen; es ist positiv für einen elliptischen, negativ für einen hyperbolischen, Null für einen parabolischen Punkt der Fläche.*

Man nennt K im Gegensatze zu anderen später vorgeschlagenen Krümmungsmaßen*) das Gaußsche Krümmungsmaß oder auch die *totale Krümmung.* Neben dieser wird die Summe (mitunter die halbe Summe) der beiden Hauptkrümmungen

$$\mathsf{M} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{10}$$

als *mittlere Krümmung* der Fläche in dem betreffenden Punkte in Betracht gezogen. Die analytischen Ausdrücke für beide Krümmungsmaße ergeben sich unmittelbar aus der Gleichung für die Hauptkrümmungsradien **206**, (27), nämlich:

$$\begin{aligned} \mathsf{K} &= \frac{rt - s^2}{w^4} \\ \mathsf{M} &= \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{w^3}. \end{aligned} \tag{11}$$

213. Asymptotische Linien. Eine Kurve C, welche einer krummen Fläche aufgeschrieben ist, bestimmt als Ort von Berührungspunkten eine einfach unendliche Schar von

---

*) Da es der üblichen Vorstellung von der Krümmung widerspricht, in einem parabolischen Punkte, also auch in allen Punkten einer developpabeln Fläche von der Krümmung Null zu sprechen, so hat F. Casorati vorgeschlagen, die Größe $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)$ als *Krümmungsmaß* schlechtweg (neben dem Gaußschen) einzuführen; vgl. Acta mathematica, Bd. 14 (1890).

Tangentialebenen; die Einhüllende dieser Ebenenschar ist eine abwickelbare Fläche. Man nennt sie die der Fläche längs der Kurve C *umschriebene Developpable.*

Wäre die gegebene Fläche selbst abwickelbar, so würde die ihr längs irgend einer Kurve umschriebene Developpable mit ihr zusammenfallen. Dieser Fall böte kein weiteres Interesse, wir setzen daher die Fläche als nichtabwickelbar voraus.

Die umschriebene Developpable ist im allgemeinen von der Tangentenfläche der Kurve C verschieden; fällt sie aber mit ihr zusammen, so heißt die Kurve eine *asymptotische Linie* der Fläche.

Da die Tangentenfläche die Oskulationsebenen der Kurve einhüllt, so kann man auch die folgende Definition aufstellen: *Eine auf einer Fläche liegende Kurve A heißt asymptotische Linie der Fläche, wenn in jedem Punkte von A die Oskulationsebene der Kurve mit der Tangentialebene der Fläche zusammenfällt.*

Es sei M ein Punkt irgend einer Kurve C auf der Fläche; die Tangentialebene der Fläche daselbst hat die Gleichung:

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0, \tag{12}$$

in welcher x, y, p, q als Funktionen *eines* Parameters darstellbar sind; differentiiert man zum Zwecke der Bestimmung der Einhüllenden nach diesem Parameter, so ergibt sich:

$$dp \cdot (\xi - x) + dq \cdot (\eta - y) = 0, \tag{13}$$

weil $-pdx - qdy + dz = 0$ ist. Die Gleichungen (12) und (13) zusammen stellen die Charakteristik dar und können auch in der Form:

$$\frac{\xi - x}{dq} = \frac{\eta - y}{-dp} = \frac{\zeta - z}{pdq - qdp}$$

geschrieben werden; hieraus folgt, wenn man die Koordinaten eines unendlich benachbarten Punktes von M auf der Charakteristik mit $x + d_1 x$, $y + d_1 y$, $z + d_1 z$ bezeichnet, daß:

$$d_1 x : d_1 y : d_1 z = dq : -dp : (pdq - qdp). \tag{14}$$

Zwei Richtungen wie $dx : dy : dz$ und $d_1 x : d_1 y : d_1 z$, die der Relation (14) genügen und durch zwei Tangenten der Fläche

vertreten sind, nennt man *konjugiert*, weil derartige Tangentenpaare in der Indikatrix des Punktes M als konjugierte Durchmesser erscheinen.

Für die xy-Projektion solcher Richtungen ergibt sich aus (14) die Relation:

$$dp d_1 x + dq d_1 y = 0,$$

oder, wenn man für dp, dq die Werte setzt:

$$(14^*) \qquad r dx d_1 x + s(d_1 x dy + dx d_1 y) + t dy d_1 y = 0.$$

Nach der Definition wird nun C zu einer asymptotischen Linie A, wenn die Charakteristik mit der Tangente an C zusammenfällt, wenn also die zwei Richtungen in (14*) sich vereinigen. Demnach hat jede Linie A der Gleichung

$$(15) \qquad r dx^2 + 2 s dx dy + t dy^2 = 0$$

zu genügen; man nennt diese die *Differentialgleichung der asymptotischen Linien.* Die geometrische Eigenschaft, die sie zum Ausdruck bringt, ergibt sich durch folgende Betrachtung.

Der Normalschnitt der Fläche, welcher die Kurve A im Punkte M berührt, hat die Krümmung (**203**, (8))

$$\frac{1}{R} = \frac{r \cos^2 \alpha + 2 s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}};$$

laut (15) aber ist

$$r \cos^2 \alpha + 2 s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta = 0,$$

folglich auch

$$\frac{1}{R} = 0.$$

Eine asymptotische Linie berührt also in jedem Punkte einen Normalschnitt von der Krümmung Null.

Solche Normalschnitte existieren jedoch nur in hyperbolischen und in parabolischen Punkten.

In einem hyperbolischen Punkte gibt es solcher Normalschnitte zwei, und ihre Tangenten sind die Asymptoten der Dupinschen Indikatrix (**204**). *Auf einer Fläche oder einer Flächenregion mit hyperbolischen Punkten lassen sich also zwei Scharen von asymptotischen Linien verzeichnen; in jedem Punkte schneiden sich zwei Linien, aus jeder Schar eine, und ihre*

Tangenten sind die Asymptoten der Indikatrix oder die Haupttangenten der Fläche.

Der letztere Umstand begründet den Namen der asymptotischen Linien, neben welchem auch der Name „Haupttangentenkurven“ gebräuchlich ist.

Die beiden Scharen asymptotischer Linien schneiden sich im allgemeinen unter schiefen Winkeln; nur in Punkten, wo die Indikatrix aus gleichseitigen Hyperbeln sich zusammensetzt, erfolgt der Schnitt rechtwinklig. Es gibt Flächen, wo dies durchwegs geschieht; die Wendelfläche ist ein Beispiel dieser Art (**208**, 2)).

In einem parabolischen Punkte fallen die beiden Normalschnitte von der Krümmung Null in einen zusammen. Hat die Fläche oder Flächenregion nur parabolische Punkte, so vereinigen sich die beiden Scharen asymptotischer Linien zu einer einzigen. *Auf einer abwickelbaren Fläche liegen also die beiden Scharen asymptotischer Linien vereinigt und werden durch die geradlinigen Erzeugenden der Fläche dargestellt.*

Auf einer Fläche oder Flächenregion mit elliptischen Punkten gibt es keine reellen asymptotischen Linien.

Wenn eine Fläche aus Regionen mit hyperbolischen und aus solchen mit elliptischen Punkten besteht, wie dies beispielsweise bei dem **189**, 3) erwähnten Torus der Fall ist, so wird die Grenze zwischen beiderlei Regionen durch Kurven mit parabolischen Punkten gebildet; von jedem Punkte einer solchen Kurve laufen dann zwei asymptotische Linien mit gemeinschaftlicher Tangente aus.

Während die stets reellen und rechtwinklig sich schneidenden Krümmungslinien den Verlauf der algebraisch größten und der algebraisch kleinsten Krümmung anzeigen, bezeichnen die nur bedingt reellen und im allgemeinen schiefwinklig sich schneidenden asymptotischen Linien den Verlauf der Krümmung Null.

Beispiel. Zur Bestimmung der asymptotischen Linien der geraden Konoide (**209**, 2))

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

bilde man mittels der Abkürzung

$$\frac{y}{x} = u$$

die Differentialquotienten:

$$p = -f'(u)\frac{y}{x^2}, \qquad q = f'(u)\frac{1}{x},$$

$$r = f''(u)\frac{y^2}{x^4} + 2f'(u)\frac{y}{x^3}, \qquad s = -f''(u)\frac{y}{x^3} - f'(u)\frac{1}{x^2},$$

$$t = f''(u)\frac{1}{x^2};$$

durch Eintragung der drei letzten in (15) ergibt sich:

$$(y\,dx - x\,dy)\left\{-f''(u)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + 2f'(u)\frac{dx}{x}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung wird zunächst befriedigt durch

$$y\,dx - x\,dy = 0 \quad \text{oder} \quad d\frac{y}{x} = 0,$$

woraus man auf

$$\frac{y}{x} = C$$

schließt; die eine Schar asymptotischer Linien projiziert sich in der xy-Ebene in ein Strahlenbüschel aus dem Ursprung — es sind dies die geradlinigen Erzeugenden der Fläche.

Die andere Schar ist bestimmt durch die Gleichung

$$-f''(u)\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + 2f'(u)\frac{dx}{x} = 0,$$

welcher man die Form

$$2\frac{dx}{x} = \frac{f''(u)\,du}{f'(u)}$$

geben kann; hier ist aber die linke Seite das Differential von $2\,l\,x$, die rechte Seite das Differential von $l\,f'(u)$, daher muß

$$2\,l\,x = l\,f'(u) + l\,C$$

sein, wenn C eine beliebige Konstante bezeichnet; daraus folgt

$$x^2 = Cf'\left(\frac{y}{x}\right)$$

als Gleichung der Projektion der zweiten Schar asymptotischer Linien. Die rechts angedeutete Differentiation bezieht sich auf $\frac{y}{x}$ als Variable.

Beispielsweise ist für das gerade Schraubenkonoid:

$$z = b \operatorname{Arctg}\frac{y}{x},$$

$f\left(\frac{y}{x}\right) = b$ Arctg $\frac{y}{x}$, folglich $f'\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{bx^2}{x^2+y^2}$, so daß die zweite Schar seiner asymptotischen Linien durch

$$x^2 + y^2 = \varkappa$$

bestimmt ist, wenn $bC = \varkappa$ gesetzt wird; die Gleichung stellt ein System konzentrischer Kreise dar, welchem auf der Fläche eine Schar koaxialer Schraubenlinien entspricht.

414. Geodätische Linien. Zu Beginn des vorigen Artikels ist von einer einfach unendlichen Schar von Ebenen gesprochen worden, welche durch eine einer gegebenen Fläche aufgeschriebene Kurve C bestimmt ist; es war die Schar der Tangentialebenen der Fläche in den Punkten von C.

Eine andere einfach unendliche Schar bilden die Normalebenen der Fläche, welche die Kurve C in den einzelnen Punkten berühren; auch sie werden durch eine abwickelbare Fläche eingehüllt, die im allgemeinen verschieden ist von der Tangentenfläche der C.

Ist die Kurve so beschaffen, daß die Einhüllende der sie berührenden Normalebenen mit ihrer Tangentenfläche zusammenfällt, so heißt sie eine *geodätische Linie* der Fläche.

Aus dieser Definition läßt sich eine andere ableiten, die der analytischen Darstellung unmittelbar zugänglich ist. Wenn nämlich G eine geodätische Linie darstellt, so ist die in einem Punkte M derselben durch die Tangente an G gelegte Normalebene der Fläche ihrer Oskulationsebene; die Oskulationsebene enthält aber außer der Tangente der Kurve noch deren Hauptnormale, und weil diese mit der Tangente einen rechten Winkel bildet, so fällt sie notwendig in die Normale der Fläche. Man kann daher auch die folgenden Erklärungen für die geodätische Linie aufstellen:

Unter einer geodätischen Linie ist eine solche Kurve auf der Fläche zu verstehen, deren Oskulationsebene durchweg senkrecht ist zur Tangentialebene der Fläche in dem betreffenden Punkte; oder, *es ist eine solche Kurve, bei welcher in jedem Punkte die Hauptnormale in die Normale der Fläche fällt.*

Jede dieser Erklärungen führt zu einer die geodätische Linie charakterisierenden Beziehung.

Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes M mit x, y, z, die Richtungskosinus der Normale der Fläche daselbst mit X, Y, Z; die Richtungskosinus der Hauptnormale mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ — alle Größen als Funktionen eines Parameters z. B. des Bogens s von G dargestellt —, so ist der ersten Erklärung gemäß auszudrücken, daß die Oskulationsebene (174, (6))

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

auf der Tangentialebene

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0$$

normal stehe. Es hat also die Produktsumme der Koeffizienten von $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ aus beiden Gleichungen den Wert Null, d. h. es ist im ganzen Verlauf von G:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Der zweiten Erklärung zufolge ist

$$\frac{X}{\cos\lambda} = \frac{Y}{\cos\mu} = \frac{Z}{\cos\nu},$$

und zwar ist der gemeinsame Wert der drei Quotienten $+1$ oder -1, je nachdem die positive Richtung der Hauptnormale mit der positiven oder negativen Richtung der Flächennormale zusammenfällt. Führt man für die Richtungskosinus der Hauptnormale die Werte (177, (11)) ein, so entsteht die Beziehung:

$$\frac{X}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{Y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{Z}{\frac{d^2z}{ds^2}} \tag{17}$$

und nun ist der Wert dieser Verhältnisse, mit derselben Unterscheidung, $+\varrho$ oder $-\varrho$, wenn ϱ den Flexionshalbmesser von G in M bezeichnet.

Die Tangentialebene, welche man im Punkte M an die Fläche legt, enthält die Tangente und die Binormale von G; projiziert man G orthogonal auf diese Ebene, *so zeigt die Pro-*

jektion im Punkte M einen Wendepunkt (178), hat hier also die Krümmung Null; auch diese Eigenschaft ist charakteristisch für die geodätische Linie.*)

Das System der Tangentialebenen, von welchen soeben die Rede war, wird durch eine abwickelbare Fläche eingehüllt; es ist die der gegebenen Fläche längs G umschriebene Developpable; in bezug auf G selbst ist es diejenige von den drei einer Raumkurve zugeordneten Developpabeln, welche wir in 195 als rektifizierende Developpable von G bezeichnet haben.

Sie heiße für den Augenblick D. Da die Oskulationsebene von G in einem Punkte M senkrecht ist auf der Tangentialebene von D in diesem Punkte, so spielt G auf der Fläche D ebenfalls die Rolle einer geodätischen Linie.

Daraus folgt der Satz: *Eine geodätische Linie G auf einer Fläche F ist auch geodätische Linie auf jener Developpabeln, welche F längs G umschrieben ist.*

Zur Erläuterung diene das folgende einfache Beispiel. Auf einer Kugel ist jeder größte Kreis eine geodätische Linie; denn die (Haupt-)Normalen eines solchen sind zugleich Normalen der Kugel. Die der Kugel längs eines solchen Kreises umschriebene Developpable ist der die Kugel in diesem Kreise berührende Zylinder; und auch für diesen Zylinder ist der Kreis geodätische Linie, weil seine Normalen zugleich Normalen des Zylinders sind.

215. Kürzeste Linien. *Die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf einer krummen Fläche ist eine geodätische Linie dieser Fläche.*

Um dies zu erweisen**), nehmen wir an, zwei Punkte

*) Ist C eine auf einer Fläche verzeichnete Kurve, M ein Punkt derselben, T die Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte, Γ die orthogonale Projektion von C auf T, so nennt man die Krümmung von Γ in M die *geodätische Krümmung* von C in M auf der betreffenden Fläche. Hiernach kann eine geodätische Linie auch als eine solche der Fläche aufgeschriebene Kurve definiert werden, deren geodätische Krümmung im ganzen Verlaufe Null ist. Diese Definition läßt die Linie am deutlichsten als das Analogon der Geraden auf einer krummen Fläche hervortreten.

**) Ein zweiter Beweis dieses Satzes wird in der Variationsrechnung gegeben werden.

A, B auf der Fläche seien durch eine in der Fläche verlaufende Linie verbunden, welche unter allen genügend benachbarten die kürzeste ist. M sei ein Punkt dieser Linie, MT die zugehörige Tangente; durch diese legen wir einen beliebigen Schnitt; sein Neigungswinkel gegen die Normale der Fläche in M sei θ. Auf dem Schnitte mögen nun zu beiden Seiten von M und sehr nahe daran zwei Punkte, M', M'', angenommen werden derart, daß die Sehnen MM' und MM'' gleiche Länge c haben; dann können auch die Bögen MM', MM'' als gleich und als einem Kreise angehörend betrachtet werden, welcher den Krümmungshalbmesser ϱ des betreffenden Schnittes in M zum Radius hat; bezeichnet schließlich τ den Zentriwinkel, welcher in diesem Kreise der Sehne c zugehört, so hat man einerseits

$$\text{arc } M'MM'' = 2\varrho\tau$$

und andererseits

$$c = 2\varrho \sin \frac{\tau}{2} \cdot$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\tau = 2 \text{arc sin} \frac{c}{2\varrho}$$

und durch Entwicklung (99, 2)) bis zu dem Gliede dritter Ordnung in c:

$$\tau = 2\left(\frac{c}{2\varrho} + \frac{c^3}{48\varrho^3}\right) \cdot$$

Hiermit ist dann

$$\text{arc } M'MM'' = 2c + \frac{c^3}{12\varrho^2};$$

bezeichnet aber R den Krümmungshalbmesser des die Tangente MT berührenden Normalschnittes, so ist dem Satze von Meusnier zufolge (202)

$$\varrho = R \cos \theta;$$

daher hat man schließlich

$$\text{arc } M'MM'' = 2c + \frac{c^3}{12R^2 \cos^2 \theta} \cdot$$

Der Bogen $M'MM''$ ist also am kleinsten, wenn $\theta = 0$ ist, wenn er also dem durch die Tangente MT gelegten Normalschnitte angehört. Dies bleibt fortbestehen, wie klein auch

die Sehne c, wie nahe auch die Punkte M', M'' an M liegen; da nun die auf der Fläche verzeichnete Linie als die kürzeste vorausgesetzt worden ist, so folgt daraus, daß die Grenzlage der Ebene, welche durch M und zwei benachbarte Punkte dieser Linie gelegt wird, die durch die Tangente in M gehende Normalebene ist. Diese Grenzlage ist aber die Oskulationsebene der Kurve in M; mithin geht bei der kürzesten Linie die Oskulationsebene in jedem Punkte durch die Normale der Fläche, und damit ist sie als eine geodätische Linie erwiesen.

Daraus können mehrere wichtige Folgerungen gezogen werden.

Enthält eine Fläche gerade Linien, so gehören sie zu den geodätischen Linien der Fläche, weil sie kürzeste Linien zwischen je zweien ihrer Punkte sind. Bei einer Regelfläche gehören also die geradlinigen Erzeugenden zu den geodätischen Linien.

Jede geodätische Linie einer abwickelbaren Fläche erscheint in der Abwicklung als gerade Linie.

In dem vorigen Artikel ist die Tatsache festgestellt worden, daß eine Raumkurve auf ihrer *rektifizierenden* Developpabeln, d. i. auf jener Fläche, welche die Ebenen durch Tangente und Binormale einhüllt, die Rolle einer geodätischen Linie hat; daher erscheint die Raumkurve in der Abwicklung dieser Developpabeln als Gerade, und hierin liegt der Grund für die Namen „rektifizierende Ebene“ und „rektifizierende Developpable“.

Die Umkehrung des an der Spitze dieses Artikels stehenden Satzes ist aber nicht immer zutreffend; eine geodätische Linie zwischen zwei Punkten A, B braucht nicht auch die kürzeste Linie zwischen diesen Punkten zu sein. Einfache Beispiele hierfür bieten die Kugel und der Zylinder. Die beiden Bögen, in welche der durch A, B gelegte Hauptkreis der Kugel zerfällt, sind geodätische Verbindungen der beiden Punkte; aber nur einer von ihnen ist auch die kürzeste Linie (sofern A, B nicht diametral gegenüberliegen). Jede Schraubenlinie, welche auf einem Zylinder durch zwei Punkte A, B geht, ist eine geodätische Verbindung; aber unter den unendlich vielen links und rechts gewundenen Schraubenlinien ist nur eine die kürzeste Linie zwischen A und B, diejenige nämlich, welche von A bis B nicht mehr als einen halben Gang zurücklegt.

Der Name der geodätischen Linie rührt daher, daß eine Linie, welche auf der mathematischen Erdoberfläche (dem abgeplatteten Rotationsellipsoid) nach dem üblichen Verfahren in relativ kurzen Absätzen abgesteckt würde, die Eigenschaften aufwiese, welche das Wesen einer geodätischen Linie in mathematischem Sinne ausmachen. Die geodätischen, d. i. von geodätischen Linien begrenzten Dreiecke auf dem Erdellipsoid entsprechen den sphärischen Dreiecken auf der Kugel und den geradlinigen in der Ebene.

216. Geodätische Linien auf Rotationsflächen. Die Gleichung einer Rotationsfläche, deren Achse die z-Achse ist, kann in der Form (189, 2))

$$z = f(u), \text{ wenn } u = \sqrt{x^2 + y^2},$$

geschrieben werden. Aus ihr ergibt sich:

$$p = f'(u)\frac{x}{u}, \qquad q = f'(u)\frac{y}{u},$$

$$X = \frac{xf'(u)}{u\sqrt{1 + f'(u)^2}}, \qquad Y = \frac{yf'(u)}{u\sqrt{1 + f'(u)^2}}, \qquad Z = -\frac{1}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}$$

und in Ausführung der Gleichungen (17):

$$\frac{xf'(u)}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{yf'(u)}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{-u}{\frac{d^2z}{ds^2}}.$$

Hieraus folgt die von f, also von der speziellen Form der Fläche unabhängige Gleichung:

$$x\frac{d^2y}{ds^2} - y\frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

die auch in der Form

$$\frac{d}{ds}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

geschrieben werden kann, aus der

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = \text{const.}$$

zu folgern ist. Führt man in dieser Relation, die sich auf die xy-Projektion bezieht, Polarkoordinaten ein und bezeichnet die Konstante mit r_0, so kommt die Gleichung

$$r\frac{r\,d\varphi}{ds} = r_0$$

zustande. Darin bedeutet r den Radius des Parallelkreises, auf welchem der betrachtete Punkt liegt, $r d\varphi$ das Bogenelement des Parallelkreises und ds das Bogendifferential der geodätischen Linie an der betreffenden Stelle, der Quotient also den Kosinus des Winkels, den diese Linie mit dem Parallelkreise oder des Sinus jenes Winkels α, den sie mit dem Meridian einschließt. Hiernach ist

$$r \sin \alpha = r_0 \tag{18}$$

d. h. *das Produkt aus dem Radius des Parallelkreises mit dem Sinus des Neigungswinkels der geodätischen Linie gegen den Meridian ist im ganzen Verlauf derselben konstant.*

Dieser Satz ist geeignet, über den Verlauf einer geodätischen Linie auf einer Rotationsfläche Aufschluß zu geben.

Da für $\alpha < \frac{\pi}{2}$ notwendig $r > r_0$, so verlaufen die zu r_0 gehörigen geodätischen Linien nur in derjenigen Region der Rotationsfläche, in welcher die Parallelkreisradien nicht unter r_0 liegen.







